

UNIVERSIDAD DE MURCIA

DEPARTAMENTO DE TEORÍA E HISTORIA DE LA EDUCACIÓN

Las Escuelas Normales y la renovación de la enseñanza de las matemáticas (1909-1936)

Encarna Sánchez Jiménez

2015

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Teoría e Historia de la Educación

LAS ESCUELAS NORMALES Y LA RENOVACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (1909-1936)

Trabajo que presento para optar al grado de Doctor
Programa: Profesiones educativas, estado de bienestar y ciudadanía
(Departamento de Teoría e Historia de la Educación)
Directores: Dolores Carrillo Gallego y Antonio Viñao Frago
Murcia, octubre de 2015

Encarna Sánchez Jiménez

Agradecimientos

Al finalizar este trabajo, que no podría ser el mismo sin lo aprendido a lo largo de toda mi vida profesional, son muchas las personas a las que quiero expresar mi agradecimiento:

En primer lugar a los directores de la tesis, Dolores Carrillo y Antonio Viñao, por su orientación y sus consejos, siempre valiosos, y por la atención y la rapidez con la que iban revisando cada uno de los capítulos, apenas los concluía. Pero ante todo, y más allá del ámbito profesional y académico, he de destacar las atenciones, las palabras de aliento y de aprobación, los detalles que, a nivel humano, me han brindado, y por los cuales me considero privilegiada.

A María Dolores Saá, maestra, compañera y amiga, desde el principio. A ella y a Loli debo el entusiasmo e incontables aprendizajes en el campo de la Didáctica de la Matemática.

A los muchos compañeros del Departamento y de la Facultad que me han animado durante la realización de la tesis, por los mil gestos con los que me han demostrado su apoyo y su amistad.

A Pedro Luis Moreno, con quien me inicié en la investigación histórica y al resto de compañeros del Centro de Estudios de la Memoria Educativa (CEME).

A Josefina Alarcón, que siempre me ha regalado su experiencia y sus reflexiones, desde la escuela, sobre la enseñanza de las matemáticas, por la lectura atenta de este trabajo y por sus observaciones.

A José Manuel Mira, por su disponibilidad para resolver cada dificultad surgida con el editor de textos Latex, en particular con la gestión de las bases de datos bibliográficas.

A los colegas que trabajan en el marco del Programa Epistemológico de investigación en Didáctica de las Matemáticas, por cuanto he aprendido con ellos.

A los miembros de la Junta directiva de la Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, con quienes he vivido tantas experiencias en torno a la enseñanza de la matemática.

A mi familia y a mis amigas, unas cercanas profesionalmente y otras en absoluto, que aun sin conocer el trabajo realizado, están convencidas de que ha de ser bueno, por los momentos compartidos y por haberme liberado en las épocas de mayor entrega al trabajo.

Y a Conchi, Silvia y Emilio, que en lugar de reclamarme la dedicación que les correspondía, me han obsequiado con el tiempo que necesitaba, por la comprensión y el cariño que me han ofrecido.

A mis padres

Aunque le arranques los pétalos,
no quitarás su belleza a la flor.

Rabindanath Tagore

No selecciones los temas de tu investigación mediante catálogo o por mera conveniencia. Busca, dentro de ti, los problemas que te inquietan, aquello que quieres saber y comprender. La práctica científica es siempre, de una o de otra manera, un «ajuste de cuentas» con nuestra vida. Si no encontramos aquello que nos inquieta, las preguntas a las que queremos responder, si no nos implicamos por entero, jamás produciremos un trabajo con sentido para nosotros y para los otros.

Antonio Nóvoa

Índice general

Índice de figuras IX

Observaciones sobre la redacción XIII

Introducción XV

1. Marco metodológico **1**

1.1. El problema de investigación: la innovación educativa y la formación del magisterio 1

1.2. La investigación histórico-educativa 3

1.3. Algunas herramientas de análisis: las «praxeologías didácticas» 6

1.4. Estado de la cuestión 18

1.5. Fuentes de la investigación 23

1.6. Estructura del trabajo 31

2. La renovación pedagógica y la formación del magisterio en el primer tercio del siglo XX **37**

2.1. La Escuela Nueva y las matemáticas 38

2.1.1. El movimiento de la Educación Nueva 38

2.1.2. Cuestiones planteadas y respuestas 44

2.1.3. La visión de los profesores normalistas más renovadores respecto a las Matemáticas 49

2.2. La Institución Libre de Enseñanza y la renovación educativa 57

2.2.1. Las matemáticas en la revista de la Institución Libre de Enseñanza 62

2.3. La Junta de Ampliación de Estudios y la renovación de la matemática 65
2.3.1. El Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE 71
2.3.2. Instituto-Escuela 77
2.4. La formación de los maestros durante el primer tercio de siglo 81
2.4.1. El Plan de Estudios de 1914 81
2.4.1.1. La aspiración a una formación superior del Magisterio primario 90
2.4.2. El Plan de Estudios de 1931 93
2.4.2.1. Obstáculos a los que había de enfrentarse el Plan Profesional 99
2.5. La JAE y la formación del magisterio 105
2.5.1. La Memoria presentada a la JAE por José María Eyaralar 112
2.5.1.1. Formación antes de viajar a Francia 112
2.5.1.2. La Memoria presentada a la JAE 119
2.5.1.3. Influencia del viaje 123
2.5.2. La influencia de la JAE en la renovación científico-cultural y pedagógica del profesorado de matemáticas 125
2.6. La Escuela Superior del Magisterio 133
2.6.1. Las matemáticas en la Escuela Superior del Magisterio 137
2.6.2. El legado de la Escuela Superior 143
2.7. Protagonistas de la innovación en la educación matemática 150

3. Las matemáticas en el Plan de 1914. Aritmética 153
3.1. La enseñanza de la aritmética: propuestas de los formadores de maestros 153
3.1.1. La numeración en los libros de Aritmética de Eyaralar 154
3.1.1.1. La numeración en el *Nuevo Tratado de Aritmética* 155
3.1.1.2. La numeración en la *Aritmética Intuitiva* . . 159
3.1.1.3. Comentarios 161
3.1.2. Las operaciones en los libros de Aritmética para las Normales de Eyaralar 166

3.1.2.1. La representación gráfica de las operaciones en las dos Aritméticas 177
3.2. La enseñanza de la aritmética en la escuela primaria 179
3.2.1. La aritmética en los libros escritos para la escuela primaria 180
3.2.2. La aritmética en las obras de metodología 189
3.2.2.1. El papel de la intuición 195
3.2.2.2. La relación entre las operaciones y su secuenciación 198
3.3. Las representaciones gráficas y la introducción del simbolismo aritmético 202
3.3.1. Propuesta de nuevos símbolos en Aritmética 210
3.4. La automatización del cálculo 212
3.4.1. El aprendizaje de las combinaciones numéricas básicas o 'tablas' 213
3.4.2. El cálculo mental y el cálculo *rápido* 217
3.4.3. El aprendizaje de los algoritmos 231

4. Las matemáticas en el Plan de 1914. Geometría y Álgebra 243
4.1. La enseñanza de la Geometría 243
4.1.1. El programa de Geometría. Relación con otras materias 244
4.1.2. El cálculo de áreas y volúmenes 249
4.1.3. La Geometría del movimiento 253
4.1.4. Algunas orientaciones para la enseñanza de la Geometría 260
4.1.5. Las construcciones geométricas. El dibujo geométrico 265
4.1.5.1. La relación entre Dibujo y Geometría: El dibujo geométrico 265
4.1.5.2. Los instrumentos de dibujo 270
4.1.5.3. Instrumentos alternativos a los clásicos . . . 273
4.1.5.4. Tareas que involucran técnicas de dibujo . . 276
4.2. El Álgebra 282
4.2.1. Las técnicas para resolver ecuaciones 292

4.2.1.1. Técnicas aritméticas para sustituir a las algebraicas en la escuela primaria 293
4.2.2. La resolución de problemas mediante gráficas de funciones 297
4.2.3. La proporcionalidad 306

5. La asignatura *Metodología de la Matemática* 313
5.1. Qué debe contener una Metodología. Propuestas 314
5.2. Las obras de Metodología publicadas durante la Segunda República 318
5.2.1. Algunos aspectos comunes en los libros de Metodología de la Matemática 330
5.3. Un cambio de perspectiva en la formación didáctica de los maestros 340
5.4. Los índices de las obras sobre *Metodología de las Matemáticas* 349
5.4.1. Margarita Comas: *Metodología de la Aritmética y la Geometría* 350
5.4.2. José María Eyaralar: *Metodología de la Matemática* 351
5.4.3. Luis Paunero: *Ensayo. Las matemáticas en la educación* 354
5.4.4. Rey Pastor y Puig Adam: *Metodología y didáctica de la Matemática elemental. Tomo I. Metodología* . . 355
5.4.5. Felipe Sáiz Salvat: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental* 356
5.4.6. Manuel Xiberta: *Matemáticas. Metodología y Práctica* 358

6. Las organizaciones didácticas en la formación matemática del magisterio 361
6.1. La lección 363
6.1.1. El dispositivo 'lección' en la Escuela Normal 363
6.1.2. La 'lección' en la escuela primaria 366
6.2. Otros dispositivos asociados a la lección 374
6.2.1. Los libros 375
6.2.2. Los cuadernos 379

6.2.3. Los ejercicios 382
6.2.4. Los exámenes 386
6.2.5. Los trabajos colectivos 388
6.3. Una praxeología de formación: Las prácticas de *Metodología*... 391
6.3.1. Los resultados de la propuesta 401
6.3.2. Consejos acerca de una lección de Matemáticas . . 403

7. Las organizaciones didácticas para la enseñanza de las matemáticas en primaria 409
7.1. El Método de Proyectos 409
7.1.1. Cuestiones asociadas a este Método 413
7.1.2. Planteamientos teóricos del Método de Proyectos . 425
7.1.2.1. Contexto histórico y pedagógico 425
7.1.2.2. Principios en los que se basa el Método de Proyectos 427
7.1.3. Críticas realizadas al Método de Proyectos 428
7.1.4. El Método de Proyectos y las matemáticas. Análisis didáctico 434
7.1.4.1. Restricciones que ayuda a superar el Método de Proyectos 435
7.1.4.2. Limitaciones del Método de Proyectos en relación con la Matemática 437
7.1.4.3. La presencia de la Matemática en los proyectos. 438
7.1.4.4. La secuenciación de los conocimientos matemáticos 441
7.1.4.5. La función de los conocimientos matemáticos 443
7.1.4.6. Cambios que introduce el Método de Proyectos en la actividad matemática 446
7.2. Los materiales de enseñanza 453
7.2.1. Funciones del material 454
7.2.2. Tipo y procedencia del material 460
7.2.3. La elaboración de material propio 464

7.2.4. José María Eyaralar: inventor de materiales para enseñar matemáticas 467
7.2.4.1. Material para la Aritmética: Las Reglas Superpuestas 468
7.2.4.2. Material para la Geometría: El *material EYA* 470
7.2.5. El material en las praxeologías matemáticas y didácticas 475
7.3. El juego y la matemática recreativa como dispositivos didácticos 480
7.3.1. Tipos de actividades matemáticas recreativas . . . 484
7.3.2. Función de la matemática recreativa en la enseñanza 492
7.3.3. Actualidad de los problemas lúdicos 499

8. El tratamiento de algunos procesos matemáticos 501
8.1. Las definiciones 501
8.1.1. La definición en los libros de metodología de la matemáticas 502
8.1.1.1. Requisitos de una definición 509
8.1.2. La definición desde la perspectiva ecológica 511
8.1.2.1. Propuestas sobre la definición en la escuela primaria: el cuadrado 513
8.1.2.2. La definición en los textos para las Escuelas Normales: José María Eyaralar 523
8.1.2.3. La definición en los textos para Bachillerato 529
8.2. La validación 537
8.2.1. La demostración en los libros de metodología de la matemática 538
8.2.2. Enseñanza intuitiva y validación en matemáticas . . 555
8.2.3. El tratamiento de la demostración en los textos de matemáticas para la formación de maestros: José María Eyaralar 568
8.2.3.1. Las técnicas de demostración en aritmética 575
8.3. El tratamiento de la resolución de problemas 578
8.3.1. Los problemas en matemáticas 579

8.3.2. El planteamiento de los problemas 582
8.3.2.1. Cualidades que generan el interés por los problemas. El realismo 584
8.3.2.2. La invención de problemas 589
8.3.2.3. Clasificación de los problemas 594
8.3.2.4. La gradación de los problemas 601
8.3.3. La resolución de los problemas 602
8.3.3.1. La comprensión de los enunciados 603
8.3.3.2. La intuición y la representación gráfica . . . 605
8.3.3.3. El método de análisis-síntesis 614
8.3.3.4. La comprobación de la solución 619

Síntesis y reflexiones finales **621**

Fuentes primarias utilizadas **653**

Fuentes secundarias consultadas **673**

Índice de figuras

1.1. Jerarquía de niveles de codeterminación didáctica 17

2.1. Principios de la Escuela Nueva (1925) 43
2.2. Plan de Estudios de Magisterio de 1914. Cursos primero y segundo. 83
2.3. Plan de Estudios de Magisterio de 1914. Cursos tercero y cuarto. 84
2.4. Plan de Estudios de Magisterio de 1931. 95
2.5. Profesores Normalistas pensionados por la JAE en relación con la Metodología de las Matemáticas 106
2.6. Eyaralar. Alineaciones 117
2.7. Eyaralar. Propiedad aritmética con soporte geométrico . . 118
2.8. Eyaralar. «Escaparate del panadero» para la multiplicación y «Casa con balcones», para la división 124

3.1. Eyaralar. Ábacos 158
3.2. Eyaralar. Representación en la recta numérica 159
3.3. Eyaralar. Definición 'gráfica' de la división 169
3.4. Eyaralar. Algoritmo de la multiplicación 172
3.5. Eyaralar. Representación gráfica de operaciones 178
3.6. Eyaralar. Representación gráfica de operaciones encadenadas 179
3.7. Comas. Cambios de unidades del sistema métrico decimal . 183
3.8. Charentón. Representación de números en un sistema aditivo 189
3.9. Comas - Mackinder. Representación analógica de cantidades 203
3.10. Charentón. Descomposiciones básicas del número 203
3.11. Comas. Descomposiciones de números 203

3.12. Charentón. Material de fichas de dominó 204
3.13. Eyaralar. Materiales para la numeración y el análisis del número 204
3.14. Romero. Descomposiciones del 9 en dos sumandos 205
3.15. Romero. Situaciones de suma 206
3.16. Comas. Situación de suma 206
3.17. Eyaralar. Introducción de los símbolos 206
3.18. Charentón. Descomposiciones de números de la segunda decena 207
3.19. Eyaralar. Cinematógrafo numérico 207
3.20. Saiz Salvat. Sumas con fichas de dominó 207
3.21. Eyaralar. Método gráfico para propiedades de la multiplicación 209
3.22. Eyaralar. Símbolos de aproximación (1) 212
3.23. Eyaralar. Símbolos de aproximación (2) 212
3.24. Nelson. Juego aritmético 214
3.25. Romero. Descomposiciones de 8 en dos sumandos 215
3.26. Eyaralar. Tabla de multiplicar 217
3.27. Romero. Suma de tres números consecutivos 219
3.28. Romero. «Ábaco Jackson» 220
3.29. Comas. Ruedas de números 227
3.30. Comas. Cuadro de descomposición de números 229
3.31. Charentón. Representación analógica para el algoritmo de la suma 235
3.32. Eyaralar. Representación analógica para el algoritmo . . . 236
3.33. Saiz Salvat. Representación del algoritmo de la suma . . . 236
3.34. Eyaralar. Procedimiento de multiplicación mental (1) . . . 239
3.35. Eyaralar. Procedimiento de multiplicación mental (2) . . . 239
3.36. Romero. Multiplicación desordenada 242

4.1. Eyaralar. Principio de Cavalieri 251
4.2. Eyaralar. Demostración dinámica sobre cuadriláteros . . . 256
4.3. Rey Pastor y Puig Adam. Demostración dinámica sobre cuadriláteros 256

4.4. Mahler. Demostración dinámica sobre cuadriláteros 257
4.5. Xiberta. Demostraciones geométricas 258
4.6. Charentón. Frisos (1) 259
4.7. Charentón. Frisos (2) 259
4.8. Rey Pastor y Puig Adam. Comprobación de una regla . . . 271
4.9. Rey Pastor y Puig Adam. La circunferencia como lugar geométrico (1) 276
4.10. Rey Pastor y Puig Adam. La circunferencia como lugar geométrico (2) 277
4.11. Rey Pastor y Puig Adam. División de un segmento en partes iguales 281
4.12. Puig. División de un segmento en partes proporcionales . . 281
4.13. Eyaralar, José María. El cálculo mental. Revista de Escuelas Normales 287
4.14. Charentón. Representación funcional de un problema. . . . 299
4.15. Sáiz Salvat. Representación funcional de un problema. . . . 300
4.16. Eyaralar. Ejercicio resuelto en diferentes marcos 301
4.17. Eyaralar. Representación de la marcha de un peatón que recorre 5 km por hora 302
4.18. Eyaralar. Representación de la marcha de un peatón que recorre 5 km por hora. La porción vertical indica un descanso en el recorrido 303
4.19. Eyaralar. Resolución geométrica de ecuaciones 305

6.1. Detaille. «Crítica de una lección» 395

7.1. Charenton. Suma con objetos 453
7.2. Eyaralar. Triángulo con mecano. 457
7.3. Eyaralar. Aparato para trazar paralelas 457
7.4. Paunero. Aparato de proyección 459
7.5. Charentón. Cantidades de la segunda decena 462
7.6. Charentón. Suma con decenas 462
7.7. Charentón. 'Contador' con encuadernadores 463
7.8. Eyaralar. Reglas superpuestas 469
7.9. Eyaralar. Láminas de la *Metodología* 469

7.10. Eyaralar. Disco *EYA* 471
7.11. Eyaralar. Estrellas, figuras de aplicación y rosáceas 473
7.12. Eyaralar. Aparato «Arquímedes» 474
7.13. Eyaralar. Puzles geométricos 488
7.14. Comas. Material de numeración 491
7.15. Eyaralar. Demostración intuitiva del teorema de Pitágoras 495
7.16. Nelson. Juego aritmético 497

8.1. Eyaralar. Clasificación de líneas 507
8.2. Xiberta. Demostración por síntesis 541
8.3. Suma de los n primeros números impares 558
8.4. Mahler. Demostración del teorema de Pitágoras 559
8.5. Eyaralar. 64 = 65 565
8.6. Eyaralar. Propiedad distributiva (*Nuevo Tratado de Aritmética*) 570
8.7. Eyaralar. Propiedad distributiva (*Aritmética Intuitiva*) . . 571
8.8. Eyaralar. División de un producto por un número (*Nuevo Tratado de Aritmética*) 573
8.9. Eyaralar. División de un producto por un número (*Aritmética Intuitiva*) 574
8.10. Eyaralar. Tabla de resolución de un problema 591
8.11. Charentón. Representación gráfica de un problema (1) . . . 608
8.12. Charentón. Representación gráfica de un problema (2) . . . 608
8.13. Eyaralar. Problema del paquete 611
8.14. Eyaralar. Problema de los vasos 611
8.15. Eyaralar. Resolución de un problema doblando una cuerda 612
8.16. Eyaralar. Resolución de un problema 612
8.17. Eyaralar. Sucesión numérica con tablero de ajedrez 613
8.18. Charentón. Método de análisis-síntesis 616
8.19. Eyaralar. Resolución de un problema geométrico 619

Observaciones sobre la redacción

Abreviaturas utilizadas

Solo se han utilizado las abreviaturas cuyo uso está muy generalizado.

JAE	Junta para la Ampliación de Estudios
TAD	Teoría Antropológica de lo Didáctico

Ortografía de las citas

Se ha respetado la ortografía y la sintaxis original en las citas. En particular, la forma de escribir los numerales y las unidades de medida, que es diferente a la utilizada actualmente.

Sobre el lenguaje utilizado

En este trabajo, cuando la oposición de sexos no es relevante en el contexto, utilizamos nombres genéricos como «alumno», «profesor», «maestro», etcétera, que se refieren a los dos sexos, sin intención discriminatoria alguna, sino por la aplicación de la ley lingüística de la economía expresiva, tal como establece la Real Academia Española (RAE).

Introducción

Este trabajo tiene su origen en nuestra experiencia en la formación matemática de los futuros maestros.

Nos preguntamos por el origen de nuestra disciplina, por los procesos que han llevado a configurarla en su estado actual. Pero también por la problemática que se plantearon las personas que ejercieron una función similar a la nuestra y por las respuestas que dieron. Esto, teniendo en cuenta que los contextos tienen similitudes, pero también diferencias.

A lo largo de su elaboración hemos sentido muy cerca a ese grupo de profesores entusiastas que, entre la segunda y la cuarta década del siglo XX, se propusieron mejorar la sociedad en la que vivían y, confiando en el poder de la educación primaria para elevar la cultura de la sociedad, utilizaron como herramienta de transformación la profesión de formador de maestros. El trabajo pretende profundizar en la tarea que abordaron.

Nos interesan las prácticas didácticas que describen estos profesores, pero más allá de la identificación y descripción, nuestro trabajo pretende hacerlas comprensibles, es decir, explicar las razones que las hacían posibles –que pueden ser más o menos explicitas– y a su vez la teoría que las fundamenta. Este discurso didáctico, que tiene lugar en una época y en el seno de ciertas instituciones, incluirá algunas referencias a las condiciones de viabilidad de esas prácticas en esas instituciones, en nuestro caso, la Escuela Normal y la escuela primaria.

Llevamos a cabo, como acabamos de señalar, un análisis histórico a partir de los materiales existentes, pues no existe la posibilidad de diseñar otros, sobre todo intentando comprender unas aportaciones realizadas en un momento histórico concreto. En este sentido, el desarrollo actual de la didáctica de la

matemática nos proporciona herramientas útiles para nuestro estudio, que no dudamos en aprovechar, aunque sin caer en una crítica ilegítima. Antes bien, la perspectiva que nos proporciona casi un siglo transcurrido permitirá arrojar luz sobre el pasado desde el presente.

Capítulo 1

Marco metodológico

1.1. El problema de investigación: la innovación educativa y la formación del magisterio

El primer tercio del siglo XX se suele denominar la «edad de plata» de la cultura española. En lo que se refiere a la educación, fue más bien una «edad de oro» para España. Fue un momento en el que la sociedad española manifestaba una gran confianza en el poder de la educación para su progreso y en el que se plantearon, se proyectaron y se implementaron muchas reformas relativas a la educación.

Las innovaciones se hicieron teniendo como referencia movimientos educativos que se estaban desarrollando en Europa y en América, en especial el movimiento de la *Escuela Nueva*.

En ese contexto, nuestro perfil profesional nos ha llevado a interesarnos por la innovación en el ámbito de la enseñanza de la matemática en las Escuelas Normales y, subsidiariamente, en las escuelas primarias. Y los problemas de investigación que, en principio, nos hemos planteado han sido:

Q_1 **¿Qué aportaciones realizaron los profesores de Escuelas Normales al proceso de innovación educativa, en lo que se refiere a la formación matemático-didáctica de los maestros?**

Q_2 **¿Qué características tuvieron sus propuestas innovadoras en matemáticas? ¿Algunas de esas características son específicas de las matemáticas?**

Q_3 **¿Qué propuestas realizaron para la innovación en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria?**

Se trata de un trabajo de Historia de la Educación Matemática.

Por tanto, la investigación debe tener en cuenta los métodos de investigación histórica, con las características específicas relativas a la Historia de la Educación. Pero también debe realizar el análisis de los contenidos matemáticos, y para ello debe utilizar las herramientas que ha puesto a punto la investigación en Didáctica de las Matemáticas. En este capítulo recogemos consideraciones metodológicas tanto en lo que se refiere a la investigación en Historia de la Educación, en especial en la historia de las disciplinas escolares, como en la Didáctica de las Matemáticas.

En el desarrollo del trabajo se recurre a un tipo de fuente de gran importancia: los libros escritos por esos profesores. Pero para el análisis de lo que ocurre en las instituciones en las que se desarrolla el estudio de las matemáticas no es suficiente el análisis de dichos textos. Por ello, hemos utilizado la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD), que se ha desarrollado a partir de la *Teoría de la Transposición Didáctica* y que se centra en la caracterización de las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas que se dan en un proceso de estudio de las matemáticas dentro de una institución. Creemos que la TAD proporciona herramientas muy útiles para la investigación en Historia de la Educación Matemática que, sin embargo, han sido poco empleadas en ese sentido, no conociéndose toda su potencialidad. De ahí han surgido otros de los problemas de investigación planteados:

Q_4 **¿Qué análisis de los procesos de estudio matemático, desarrollados en el pasado, permite la aplicación de las herramientas de la TAD? ¿Cómo influyen las fuentes de que se dispone?**

Q_5 **¿Qué relación se detecta entre el modelo pedagógico, el epistemológico y el docente de las matemáticas?**

Estas cuestiones nucleares de nuestro trabajo se han ido desglosando en otras más específicas que irán apareciendo en los diferentes capítulos.

1.2. La investigación histórico-educativa

Como ha puesto de manifiesto A. Viñao[1], la investigación sobre la historia de las disciplinas escolares es escasa, especialmente en algunas de ellas, entre las que se encuentra la matemática. En ese mismo trabajo afirma que una disciplina es un organismo vivo que se va construyendo continuamente, siendo por tanto un producto social e histórico, cuyo núcleo fundamental es lo que se denomina su *código disciplinar*. Siguiendo a Cuesta, señala que el código disciplinar

> está integrado por un conjunto de ideas, valores, suposiciones y pautas formales e informales, explícitas o implícitas, sobre: (a) un cuerpo de contenidos –saberes, conocimientos, destrezas, técnicas, habilidades– reconocible a través de memorias y ejercicios de oposiciones, libros de texto, programas, trabajos de alumnos y exámenes; (b) un discurso o argumentos sobre su importancia y utilidad académica, profesional y laboral y su valor formativo que legitiman la presencia de la disciplina en los planes de estudio; y (c) unas prácticas y rutinas profesionales relativas tanto al modo de transmitir, enseñar y aprender los contenidos respectivos –lo que implica, entre otras cosas, analizar el contexto espacial y temporal en que la disciplina se imparte, sus útiles y materiales didácticos, y los roles y modos de interacción entre profesores y alumnos– como al de presentarse en sociedad y en el mundo académico quienes las imparten[2].

[1] Viñao Frago, Antonio: «La historia de las disciplinas escolares en España: una revisión con especial atención a la educación secundaria». En: Leoncio López-Ocón; Santiago Aragón y Mario Pedrazuela (Eds.), *Aulas con memoria. Ciencia, educación y patrimonio en los Institutos históricos de Madrid (1837-1936)*, pp. 265–277. CEIMES, CSIC y Comunidad de Madrid, Madrid, 2012.

[2] Viñao Frago, Antonio: «Historia de las disciplinas, profesionalización docente y formación de profesores: el caso español». *Pro-Posiçoes*, 2012, **23(3 (69))**, pp. 103–118. Cita en p. 116.

En esta Memoria analizamos la formación en matemáticas y en metodología de las matemáticas de los futuros maestros. Nos referiremos por tanto a materias, como la Aritmética o la Geometría, constituidas como disciplinas, formando parte de la Matemática, y a otra materia, la Metodología de la Matemática (o didáctica de la matemática), en aquel momento en proceso de disciplinarización. Estos procesos se desarrollan dentro de un sistema educativo, en confluencia o confrontación con otras disciplinas, afectadas por las políticas educativas y los cambios en los planes de estudio y en estrecha relación con la profesionalización de sus docentes. Viñao[3] plantea un esquema para el análisis de una disciplina, atendiendo a elementos como:

- Lugar, denominación y peso en el plan de estudios.
- Objetivos y discursos que la legitiman.
- Contenidos: planes, libros, programas...
- Profesores: formación exigida, selección, carrera docente, asociacionismo, publicaciones y otros méritos, presencia social e institucional.
- Acercamiento, el posible, a las prácticas escolares y la realidad del aula.

A estos elementos haremos referencia en nuestro estudio, en particular a los libros de matemáticas y a los documentos que abordan su enseñanza y aprendizaje.

La investigación sobre la historia de las disciplinas y la investigación sobre los libros de texto no pueden ser independientes. El análisis de los libros y el estudio de la historia de las disciplinas no se conciben el uno sin el otro. Como afirma el profesor Viñao, «la historia, el análisis de los libros de texto y del material de enseñanza como productos pedagógicos y culturales sólo adquiere un sentido histórico pleno cuando se inserta en el ámbito, más amplio, de la historia de las disciplinas»[4]. De hecho, estima apropiado un cambio de perspectiva, en el sentido de analizar los libros de texto desde la historia de las disciplinas, «considerándolos como uno de los instrumentos

[3] Viñao Frago, Antonio: «La historia de las disciplinas escolares». *Historia de la Educación*, 2006, **25**, pp. 243–269. Cita en p. 262.

[4] Ibídem, p. 256.

fundamentales para la determinación y el conocimiento de la evolución del código disciplinar respectivo»[5].

El libro de texto sería así un instrumento que, junto con otros, contribuye a conocer la evolución de la disciplina. Su análisis es una vía ineludible para comprender cómo funciona y caracterizar el estado del sistema educativo en un momento dado[6].

Chaachoua y Comiti señalan como elementos de análisis de los libros de texto los siguientes:

- El momento de edición. Consideramos el sistema de enseñanza como un sistema dinámico donde cada programa define un estado de referencia para su funcionamiento. En nuestro estudio se comparan algunos aspectos de dos obras de aritmética, para el mismo nivel educativo, del mismo autor y escritas en distintas épocas; asímismo, se observan las características específicas de la «Metodología de las matemáticas», asignatura nueva de la que se detectan los antecedentes en las publicaciones, en revistas fundamentalmente, de los profesores de Escuelas Normales.

- La representatividad; en nuestro caso, la relevancia de sus autores como exponentes de la renovación, las citas en otras obras o en revistas.

- La estructura, no solo el contenido, sino cómo está organizado; los ejercicios propuestos, su localización y su función.

- La utilización complementaria de dos aproximaciones: la *ecológica* y la *praxeológica*. Para realizar estos aspectos del análisis hay que recurrir a los datos que proporcionan otros documentos como los legislativos, obras de pedagogía, revistas profesionales...

El **análisis ecológico** de un objeto de conocimiento se organiza en torno a dos conceptos: el *hábitat*, que indica el lugar en el que vive y el entorno

[5] Viñao Frago, *Historia... profesionalización...*, op. cit., p. 114.

[6] Chachaoua, Hamid y Comiti, Claude: «L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique». En: A. Bronner y al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 771–789. IUFM de l'Academie de Montpellier, Montpellier, 2010.

conceptual del objeto de conocimiento, y el *nicho*, que indica la función de este objeto en el sistema de objetos con los que interactúa. El análisis ecológico de los libros de texto puede apoyarse sobre la articulación de estos dos conceptos.

Tiene en cuenta las limitaciones debidas a las interrelaciones entre los objetos educativos mediante la implementación de un cuestionamiento ecológico de la realidad. «¿Qué existe, y *por qué*? Pero también, ¿Qué *no existe*, y *por qué*? ¿Y qué *podría* existir? ¿En qué condiciones? Por el contrario, dado un conjunto de *condiciones*, ¿qué objetos están empujados a vivir, o están impedidos de vivir en éstas condiciones?»[7]. Son cuestiones que plantearemos para tratar de comprender por qué la estructura de una obra es una u otra, por qué se incluyen o no ciertos contenidos o por qué se perciben en las obras influencias diferentes.

El **análisis praxeológico** proporciona un método de análisis de las prácticas institucionales que permite la descripción y el estudio de las condiciones de realización. Algunas de sus características se comentan en el apartado siguiente.

1.3. Algunas herramientas de análisis: las «praxeologías didácticas»

En esta Memoria utilizaremos algunas herramientas teóricas de la Didáctica de la Matemática, que es preciso describir.

La elección de dichas herramientas está vinculada al programa de investigación en Didáctica de las Matemáticas en el que nos situamos y a la teoría a las que pertenecen los constructos empleados. En nuestro caso, se trata del ***Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de la Matemática*** que, a diferencia de otros enfoques calificados como «cognitivos», considera la propia actividad matemática como objeto primario de estudio.

[7] Artaud, Michèlle: «Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques». En: M. Bailleul; C. Comiti; J.L. Dorier; J.B. Lagrange; B. Parzysz y M.H. Salin (Eds.), *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 101–139. ARDM et IUFM, Caen, 1998. Citado por: Chachaoua y Comiti, *L'analyse du rôle...*, op. cit., p. 773. La traducción es nuestra.

En dicho Programa, se afirma la interdependencia entre los aspectos matemáticos y los pedagógicos[8] o, dicho de otro modo, entre los conocimientos matemáticos y las condiciones de uso en la institución en la que se aprenden y enseñan. Otra de las hipótesis básicas del Programa Epistemológico es que el *modelo epistemológico de las matemáticas* que predomina en una institución va a condicionar en gran medida las prácticas docentes en esa institución, sea la escuela primaria o la Escuela Normal[9]. En otras palabras, «todo modelo epistemológico de las matemáticas (en el sentido de la epistemología clásica de las matemáticas) es, en realidad, el germen de un modelo epistemológico-didáctico»[10].

En la Memoria utilizaremos nociones pertenecientes a la *Teoría de las Situaciones Didácticas*, formulada por Guy Brousseau, que inicia este nuevo paradigma de investigación o visión epistemológica de la Didáctica de la Matemática, y a otras teorías que se han ido desarrollado en el marco del mismo Programa y que aportan instrumentos de análisis útiles para nuestro estudio, en particular la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD), desarrollada por Yves Chevallard.

La **Teoría de las Situaciones Didácticas**[11] considera fundamental la noción de situación. Brousseau habla de situaciones matemáticas y de *situaciones didácticas*, concebidas estas últimas para describir la actividad matemática del profesor y del alumno. Estas últimas pueden ser: de *acción*,

[8] Chevallard, Yves: «Aspectos problemáticos de la formación docente». En: *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, pp. 1–10. Huesca, 2001. `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15`. Consultado el 10-10-2015.

[9] Gascón Pérez, Josep: «Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 2001, **4**, pp. 129–159.

[10] Bosch Casabó, Marianna y Gascón Pérez, Josep: «Las prácticas docentes del profesor de matemáticas». *Boletín SI-IDM*, 2001, **13**. `www.ugr.es/~godino/siidm`. Consultado el 13-10-2015.

[11] Brousseau, Guy: «Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques». *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 1986, **7(2)**, pp. 33–115.

Brousseau, Guy: *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas, de Guy Brousseau*. Traducido por Dilma Fergona. Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2007.

cuando los alumnos han de enfrentarse a un medio que demanda poner en juego una o varias estrategias; de *formulación*, cuando la elaboración y la comunicación de un mensaje adquieren un carácter de necesidad y no son una demanda del docente; de *validación*, si además de comunicar lo que se hace, se requiere una justificación de su validez; de *institucionalización*, en las que el conocimiento construido adquiere un carácter institucional, culturalmente compartido.

> Las situaciones didácticas se clasifican en tipos de acuerdo al modelo de interacciones posibles del alumno con su medio. Así, se distinguen las situaciones de acción, de comunicación, de validación..., y las interacciones que caracterizan a cada una de ellas están estrictamente incluidas porque un intercambio de juicios acerca de la verdad es un intercambio de informaciones particulares, y éste es un tipo particular de acción y de toma de decisiones[12].

La organización del medio está ligada a las *variables didácticas*[13] de la situación, entendidas como condiciones que el docente puede decidir y variar y que, según los valores que toman, determinan la categoría de estrategias válidas para resolver la tarea propuesta en cada caso, y con ello hacen intervenir conocimientos matemáticos diferentes.

La **Teoría Antropológica de lo Didáctico** considera que deben tenerse en cuenta todas las instituciones que intervienen en la creación, difusión o utilización de las matemáticas, y no solo las escolares. O sea, que las condiciones y restricciones que afectan a las matemáticas que han de ser enseñadas en una institución –en nuestro caso la escuela primaria o la Escuela Normal– no son solo de origen estrictamente didáctico, sino que hemos de situarnos en un nivel *institucional* y, por tanto, más amplio, que considere el conjunto de las instituciones que intervienen. En particular esto supone que no basta tener en cuenta las características individuales de los profesores o de los alumnos de una institución.

[12] Fregona, Dilma y Orús Báguena, Pilar: *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2011. Cita en pp. 55-56.

[13] El concepto de «variable didáctica» pertenece a la Teoría de las Situaciones Didácticas, desarrollada por Guy Brousseau.

Los conocimientos matemáticos se construyen en la medida en que se intenta dar respuesta a *cuestiones* problemáticas, en el marco de un *proceso de estudio*. Las Matemáticas pueden verse como ese proceso de estudio y también como su resultado. En la TAD las dimensiones matemática y didáctica de la actividad matemática se consideran relacionadas e inseparables.

La idea de **praxeología** ayuda a superar la visión más o menos 'transparente' (en el sentido de no cuestionada) del contenido matemático que se estudia en la escuela. La *Teoría de la Transposición Didáctica*, de Chevallard[14] cuestiona esa transparencia al afirmar que todo saber matemático sufre transformaciones para ser enseñado en una institución –que no pueden identificarse simplemente con las adecuaciones que ha de hacer un docente al planificar la enseñanza para sus alumnos–, lo que a su vez ayuda a superar la separación clásica entre la producción de las matemáticas y su enseñanza.

> Situándonos en el marco de la TAD, admitimos que tanto la matemática que se desarrolla en una institución, la actividad matemática llevada a cabo en ella, como el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en esa misma institución, pueden modelizarse [describirse] ambos en términos de *praxeologías*, matemáticas o didácticas, respectivamente. De hecho, para la TAD cualquier actividad humana puede explicarse mediante la noción de praxeología: lo que tienen en común la escuela para la gente y la escuela para [los] profesores es que, según solía decirse de la segunda categoría, son escuelas normales. La palabra «normal» en este contexto ha dejado, desde hace tiempo, de ser una palabra viva: el sintagma «escuela normal» es hoy en día una expresión estereotipada, casi petrificada, un significante sin significado, a lo sumo con un único «referente». Pero hay que recordar que el calificativo «normal» quiere decir simplemente que estas escuelas crean y difunden normas –normas de vida en el primer caso, normas de enseñanza, o de educación, o de lo que queráis, en el segundo–.
>
> Esas normas toman la forma de praxeologías. En el primer caso, es decir en el caso de la formación de «la gente», se trata de praxeologías «para la vida», lo que quiere decir, en principio, praxeologías de

[14] Chevallard, Yves: *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage, Grenoble, 1991. Segunda edición aumentada. La primera edición es de 1985.

> cualquier índole, incluso ¡de índole matemática!
>
> En el segundo caso, el de la formación de los profesores (que, luego, son profesores «para la vida»), se trata de praxeologías didácticas, o, más específicamente, docentes, respecto a las praxeologías para la vida –incluidas las matemáticas– que se proporcionan a la gente a través de la escuela[15].

La noción de praxeología se considera, en el marco de la TAD, la unidad mínima de análisis, tanto de la actividad matemática como de la didáctica, referida a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta noción tiene la virtud de permitir el estudio conjunto de los aspectos relativos a la práctica matemática ('saber-hacer') y los relativos a su descripción, explicación y justificación ('saber'), aspectos que se consideran *inseparables*, ligando así la dimensión teórica de la actividad matemática con su dimensión práctica.

Dado un tema de estudio matemático podemos considerar, por un lado, la matemática que los alumnos –de primaria o normalistas– pueden llegar a construir por el estudio de ese tema; por otro, la manera en la que se puede realizar dicho estudio. Nos estamos refiriendo, respectivamente, a la praxeología u *organización matemática* y a la praxeología u *organización didáctica*[16].

El trabajo matemático conlleva estudiar tipos de problemas, así como las técnicas usadas para abordarlos y el discurso razonado que justifica las técnicas y establece bajo qué condiciones pueden aplicarse. Cuando se habla de *praxeología matemática* se hace referencia a la existencia de dos componentes en la actividad matemática: la *praxis*, que incluye las *tareas* y las *técnicas*, y el *logo*s, que comprende las *tecnologías* y las *teorías*, las cuales permiten justificar y entender lo que se hace, formando el discurso razonado sobre la práctica. Así pues, una praxeología matemática está compuesta por cuatro elementos: tipos de *tareas*, *técnicas* matemáticas, elementos tecnológicos o *tecnologías* y elementos teóricos o *teorías*.

En el origen de una praxeología están una, o varias, **cuestiones** proble-

[15] Chevallard, *Aspectos problemáticos...*, op. cit., cita en p. 1.

[16] Chevallard, Yves: «L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1999, **19(2)**, pp. 221–266.

máticas a las que se propone responder, cuestiones que entrañan la *razón de ser* de toda praxeología (razones de ser que a veces han desaparecido de las propuestas educativas para ciertas praxeologías matemáticas). Al intentar describirlas y delimitarlas dan lugar a las **tareas** o los *tipos de tareas* que, por lo tanto, son construcciones institucionales.

Para un determinado tipo de tareas, una organización matemática relativa a ese tipo de problemas requiere la existencia de un modo de realizar dichas tareas, lo que se llama una **técnica**. Este término se usa para referirse a una 'manera de hacer', no necesariamente de tipo algorítmico.

Normalmente existen una o varias técnicas reconocidas en la institución en la que se realiza el proceso de estudio (en nuestro caso la escuela primaria o la Escuela Normal) para abordar cada tipo de problemas.

Las técnicas van asociadas a un determinado tipo de problemas y pueden fracasar en otro (por ejemplo, cuando se plantea un mismo problema en otro campo numérico). En cualquier caso, la evaluación de las técnicas para un tipo de tareas ha de tener en cuenta otros factores, además de su 'alcance' o de la posibilidad de ampliación a otros campos de problemas[17].

La **tecnología** de la técnica es el discurso racional que tiene por objeto justificarla, pero también explicarla, e incluso posibilitar la modificación o ampliación de la técnica y, con ello, la producción de nuevas técnicas.

Cuando se habla de justificación de la técnica o de discurso 'racional', se entiende que es con relación a una institución concreta; así, una justificación pragmática, por ejemplo por superposición, de una propiedad o teorema de la geometría clásica puede ser admitida como justificación en la enseñanza primaria o secundaria pero no en los estudios universitarios de Matemáticas.

Cuando en una institución solo se reconoce y se usa una única técnica para un tipo de tareas –es decir, existe una técnica 'canónica'–, no se suele echar en falta ningún tipo de justificación, ya que la técnica se considera 'natural' y se convierte así en 'autotecnológica'.

La **teoría** supone, respecto a la tecnología, lo que ésta respecto a la técnica. Constituye un nivel superior de justificación y también de explicación y producción, por lo general, de varias tecnologías.

[17] En la sección 3.1 se hacen observaciones con relación a las técnicas de cálculo, considerando aspectos como la 'economía' de las técnicas.

Por ejemplo, la cuestión de poder determinar si en una colección hay los mismos elementos tras un intervalo de tiempo, da lugar a formular la tarea de comparar dos conjuntos; una técnica –no la única– para hacerlo es la técnica de contar; formando parte de la tecnología de la técnica estarían propiedades como la transitiva de la coordinabilidad de conjuntos; la construcción de los números naturales y del sistema de numeración explica y justifica la tecnología.

Hemos de tener en cuenta que las nociones que forman parte de las praxeologías son relativas. Así, hablamos de *relatividad institucional* de las técnicas, ya que técnicas presentes en una institución pueden no estarlo en otras. Por ejemplo, en la época que estudiamos 'vivían' en la enseñanza primaria ciertas técnicas aritméticas para resolver algunos tipos de problemas que hoy se resuelven mediante técnicas algebraicas, lo que en la práctica ha motivado que aquellas técnicas ya no sean objeto de estudio en el primer ciclo de la enseñanza secundaria actual.

Otra relatividad es la que se refiere a la *función* que desempeñan estas nociones como objetos matemáticos en una cierta actividad. Por ejemplo, algunas propiedades de las operaciones aritméticas pueden tener una función tecnológica para justificar ciertas técnicas de cálculo en el nivel de enseñanza primaria, mientras que en la enseñanza superior pueden formar parte de una tarea, por ejemplo cuando se pide su justificación formal.

Según su complejidad, las praxeologías pueden ser *puntuales* (caracterizadas por un único tipo de tareas), *locales* (combinan varias praxeologías puntuales y se caracterizan por una tecnología común que justifica todas las técnicas de esas praxeologías puntuales), *regionale*s (articulan e integran varias de las anteriores, alrededor de una teoría matemática común) o *globales* (se componen de varias regionales e integran diferentes teorías). Por ejemplo, una praxeología puntual sería el cálculo del cociente entero de dos números naturales con la técnica del algoritmo tradicional; esta praxeología puntual está inscrita en una praxeología local en torno a la división en el conjunto de los números naturales; esta praxeología se inscribe en otra de nivel superior, como la parte de la aritmética escolar relativa al número y las operaciones en $\mathbb{N}$.

Para determinar la manera en que los profesores más innovadores organizaban y proponían a sus alumnos normalistas estructurar la enseñanza de las matemáticas utilizaremos la noción de **praxeología didáctica**, en la que participan el profesor y los estudiantes. Hace referencia, como toda construcción praxeológica, a dos bloques: la 'praxis' y el 'logos'. El primero, también llamado bloque práctico-técnico, se refiere a la práctica didáctica, y comprende las *tareas didácticas* y las *técnicas didácticas* de que dispone el profesor para enfrentarse a esas tareas, y dirigir el estudio. Mientras que el bloque tecnológico-teórico comprende las *tecnologías* de las técnicas, esto es, su explicación y su justificación, así como la *teoría didáctica* que justifica a la vez las tecnologías.

Según Chevallard[18], todo proceso de estudio se realiza en una *comunidad de estudio* –que puede ser una clase o un grupo de alumnos– y se pueden observar tipos de situaciones que necesariamente estarán presentes y que aparecen como invariantes independientes de las características de la comunidad de estudio, sean culturales, sociales, individuales o de otra índole; a estos invariantes los denomina *momentos didácticos*, o *momentos del estudio*. Aunque los momentos se suceden, el término 'momento' se refiere a la actividad matemática que se lleva a cabo y no tiene aquí un significado cronológico, en el sentido de que un proceso de estudio no se desarrolla de manera lineal, sino que a lo largo del proceso cada uno de estos momentos se repite varias veces con intensidad variable e incluso de manera simultánea, y cada uno de ellos responde a una *función didáctica*.

Se distinguen seis momentos[19]:

- El momento del *primer encuentro* con un tipo de tareas, que pueden abordarse en una o en más ocasiones a lo largo del proceso de estudio, en función de los entornos matemáticos y didácticos en los que se producen; este primer encuentro debe llevar a la emergencia de un embrión de técnica.

- El momento de la *exploración* y de la *elaboración de una técnica relativa a un tipo de tareas* matemáticas. Estudiar y resolver un problema

[18] Chevallard, *L'analyse des practiques...*, op. cit.
[19] Ibídem.

conlleva construir una técnica para realizarlo, aunque sea embrionaria, que después podrá evolucionar hacia otras más desarrolladas. De esta manera, estudiar un problema *particular*, representante de un tipo de problemas, no sería en sí mismo un fin, sino un *medio* para desarrollar una técnica de resolución. Se establece pues una dialéctica fundamental, que podemos expresar diciendo que estudiar problemas es un medio que permite crear y poner en funcionamiento una técnica relativa a los problemas de un mismo tipo, técnica que actuará después como un medio para resolver de forma casi rutinaria los problemas de ese tipo.

- El momento de la elaboración del *entorno tecnológico-teórico* de la técnica. Este momento está en estrecha relación con cada uno de los otros pues, desde el primer encuentro con un cierto tipo de tareas, se utilizan justificaciones (componente tecnológico-teórico), elaboradas en anteriores procesos de estudio, y comienzan a aparecer justificaciones específicas más o menos explícitas –en general implícitas–. En este momento se trata de precisar y trabajar sobre esas justificaciones. Pero sucede que en ocasiones, en modelos de enseñanza tradicionales y por razones de *economía didáctica global*, el profesor hace de este momento la primera etapa del proceso; en ese caso, en esta primera etapa se presentan las técnicas, acompañadas o no de sus justificaciones, y los problemas constituyen una *aplicación*.

- El momento del *trabajo de la técnica* debe extender la técnica, ampliando su alcance, aumentando su fiabilidad, haciendo que los alumnos lleguen a dominarla, incluso a automatizarla. Poner a prueba la técnica va a requerir habitualmente nuevas tareas y un cierto trabajo tecnológico[20].

- El momento de la *institucionalización* de la organización matemática construida. Hay que distinguir la 'matemática necesaria' de la 'matemá-

[20]En esta Memoria vemos ejemplos, no solo de la importancia que confieren algunos de los profesores que estudiamos a la práctica suficiente de las técnicas, sino de cómo se propone una secuencia de problemas para, a partir de una técnica matemática o un procedimiento primitivo de resolución, ir adaptándolo –y ampliándolo– con cada uno de los problemas, y generar así nuevo conocimiento matemático.

tica contingente'. Ésta última está constituida por definiciones incompletas o inexactas que han resultado útiles hasta un cierto momento del proceso, primeras formulaciones de propiedades o de resultados, pruebas que al avanzar el estudio se consideran insuficientes, procedimientos que han resultado útiles para elaborar otros que finalmente los superan... Sin embargo, solo la matemática necesaria habrá de ser oficializada como saber colectivo de la clase o de la comunidad de estudio; entonces se podrá decir que pertenece a su cultura matemática.

- El momento de la *evaluación*, entendida como algo necesario en el proceso de estudio, y no como una construcción escolar. Se trata de un momento vinculado al de la institucionalización, donde se trata de hacer balance no solo de la relación personal de cada alumno al saber, sino también de la organización matemática realmente aprendida, de su valor; esta evaluación puede relanzar el estudio o propiciar la revisión de alguno de los momentos, incluso de todo el recorrido. En definitiva, aportar señales al profesor para planificar o guiar la continuación del estudio.

Del mismo modo que no existe una correspondencia entre los seis momentos descritos y una secuencia temporal fija, tampoco existe una correspondencia biunívoca entre las *funciones* o *momentos* del estudio y las *estructuras* o *dispositivos* en los que se concretan los momentos; así, según Chevallard, la corrección de un ejercicio, en principio, participa del momento de *trabajo de la técnica*, pero también del momento de la *institucionalización*, puesto que la solución puede propiciar un trabajo de *síntesis*[21].

El modelo de los momentos de estudio constituye una herramienta para que el profesor cree las situaciones didácticas apropiadas que aseguren que en el proceso de estudio están presentes todos los momentos; pero también se revela como una interesante herramienta de análisis[22], que en ocasiones nos será útil para el estudio que llevamos a cabo en esta Memoria. Este marco teórico que aporta la Didáctica de la Matemática nos ayuda pues a identificar

[21] Chevallard, Yves: «Organiser l'etude: 1. Structures & Fonctions». En: *XIe école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3–32. La Pensée sauvage, Grenoble, 2001.

[22] Ibídem.

y describir aspectos de la práctica didáctica de los profesores de los que nos ocupamos, pero también a caracterizar dicha práctica de manera más precisa.

Chevallard opina que el estudio de una organización didáctica debe abarcar, junto con los aspectos propios de las praxeologías matemáticas estudiadas, algunos pertenecientes a niveles compartidos con otras materias y que no son exclusivos de la matemática, como las condiciones y las restricciones propias del sistema de enseñanza y de sus centros –aquí la Escuela Normal y la escuela primaria–. Sin olvidar, en un nivel intermedio, aquellos aspectos característicos de la materia que se estudia, de índole general, como la experimentación o la demostración en Matemáticas (sección 8.2)[23].

Para ello, adoptamos en nuestro análisis un punto de vista **'ecológico'**[24] que se caracteriza por considerar, junto a los problemas específicos del estudio de una organización matemática, los aspectos más genéricos de la organización del estudio, las elecciones didácticas, a veces inconscientes, hechas en niveles menos específicos; tal es el caso del nivel pedagógico o incluso político. Así, incorporaremos a nuestro análisis las condiciones y restricciones impuestas por el sistema de enseñanza y por las instituciones en las que ésta tiene lugar, condiciones y restricciones que afectan a todas las materias o disciplinas y de las que, consecuentemente, nos tenemos que ocupar en relación con la enseñanza de las matemáticas.

Un principio ecológico esencial es la codeterminación entre las organizaciones didácticas y las organizaciones matemáticas:

> El principio fundador de las didácticas, al menos en el sentido brousseauniano de la palabra, es que no sólo lo transmitido depende de la herramienta con la que se pretende conseguir su transmisión, sino al revés que las organizaciones 'transmisoras', es decir didácticas, se configuran de manera estrechamente vinculada a la estructura dada a lo que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas, las OD como diré en adelante, dependen fuertemente de las organizaciones por enseñar –las OM, si se trata de organizaciones matemáticas–[25].

[23] Chevallard, *L'analyse des practiques...*, op. cit.

[24] Chevallard, Yves: «Organiser l'étude: 3. Ecologie et régulation». En: *XIe école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 41–56. La Pensée Sauvage, Grenoble, 2002.

Chevallard, *Aspectos problemáticos...*, op. cit.

[25] Ibídem, p. 2.

Esta dependencia mutua entre lo matemático y lo didáctico viene expresada por medio de una jerarquía de niveles de codeterminación entre las organizaciones matemáticas que se estudian en una institución y las organizaciones didácticas correspondientes. Se trata de una jerarquía asociada a una época histórica concreta y a un cierto tipo de cuestiones y se puede representar mediante la escala de la figura 1.1 (p. 17)[26], que va del nivel más genérico hasta el más específico de la cuestión matemática estudiada[27].

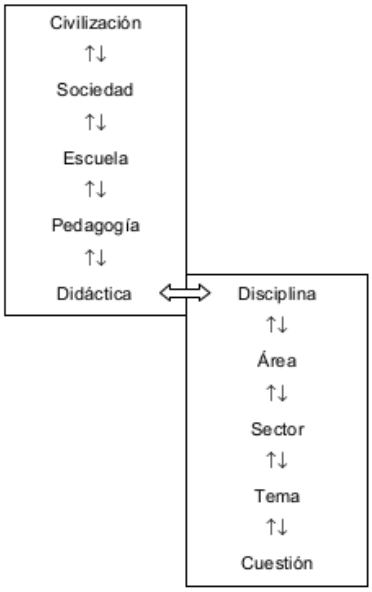


Figura 1.1: Jerarquía de niveles de codeterminación didáctica

En cada uno de estos niveles, las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas se verán afectadas por condiciones y restricciones mutuas. Respecto a las organizaciones matemáticas nos encontramos con restriccio-

[26]El esquema especificando los niveles que quedan por arriba y por abajo del disciplinar, está tomado de: Barquero, Berta: *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2009. Anexo al Capítulo 2. Figura en p. A.61.

[27]Chevallard, Yves: «Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique». En: Luisa Ruiz Higueras; Antonio Estepa y Francisco Javier García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 1–41. Diputación de Jaén, Jaén, 2007.

Chevallard, *Organiser l'étude... 3. Ecologie*, op. cit.

nes, en los distintos niveles, que determinarán las posibilidades didácticas para organizar el proceso de estudio al que se enfrentan el profesor y sus alumnos, y que no son solamente las referentes al tema concreto que es objeto de estudio o las que se identifican en el aula (distribución del tiempo, recursos disponibles, etc.). Del mismo modo, los dispositivos didácticos y la función que desempeñan en cada nivel condicionan y determinan la matemática que es posible construir en la institución de que se trate.

Es importante en la investigación considerar el aspecto ecológico de las praxeologías matemático-didácticas, en el sentido de poder establecer las restricciones existentes y situarlas en el nivel al que corresponden[28]. Concretamente, interesa analizar la influencia de los niveles *Sociedad* y *Escuela* en los procesos de estudio de las matemáticas en una institución y en la función que se le atribuye a esta disciplina, e intentar determinar de qué modo esta influencia condiciona dicho estudio.

1.4. Estado de la cuestión

Nuestra investigación se nutre del interés que, en el campo de la Historia de la Educación en España, han despertado los cuatro primeros decenios del siglo XX y, más allá, los trabajos realizados sobre la Institución Libre de Enseñanza y su influencia en el desarrollo de la educación en España en todos los niveles educativos. Son fundamentales para realizar nuestro trabajo algunos estudios que se han venido realizando sobre el movimiento internacional de la Escuela Nueva, sobre instituciones que desempeñaron un papel clave en el movimiento de renovación pedagógica acaecido durante esos años, como la Junta para Ampliación de Estudios o la Escuela Superior del Magisterio, y sobre las reformas que tuvieron lugar en la formación de los maestros en ese periodo.

Entre ellos, citaremos solo algunos trabajos de los más relevantes, sobre la Junta de Ampliación de Estudios y las personas que obtuvieron pensión

[28] Bosch Casabó, Marianna y Gascón Pérez, Josep: «25 años de transposición didáctica». En: L. Ruiz Higueras; A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 385–406. Diputación de Jaén, Jaén, 2007.

de la misma, tenemos los trabajos de Teresa Marín Eced[29], Francesca Comas i Rubí[30] y Pedro Luis Moreno[31]; entre otros autores, Comas estudió la figura de José María Eyaralar, cuya aportación en el campo de la enseñanza de la matemática analizamos en profundidad en este trabajo. Acerca del movimiento de la Escuela Nueva, están las publicaciones de María del Mar del Pozo[32] y Antonio Viñao[33]. Entre los estudios sobre la Escuela Superior del Magisterio, destaca el coordinado por María del Mar del Pozo y Antonio Molero[34].

Esta tesis se encuadra en el espacio de las investigaciones que se llevan a cabo en la Universidad de Murcia de carácter interdisciplinar con investigadores procedentes, unos del campo de la historia de la educación, y otros del de las llamadas didácticas específicas; un grupo surgido en torno al profesor Antono Viñao Frago. En este marco se han realizado varias tesis doctorales en las que se estudia la historia del currículum o la de la construcción de las disciplinas escolares, en los ámbitos de las ciencias sociales y de las ciencias

[29] Marín Eced, Teresa: *La renovación pedagógica en España (1907-1936). Los pensionados en Pedagogía por la Junta para la Ampliación de Estudios*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1990.

Marín Eced, Teresa: *Innovadores de la Educación en España*. Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca, 1991.

[30] Comas Rubí, Francesca: *Les relacions de la JAE (Junta para la Ampliación de Estudios) amb Balears. Els viatges pedagògics i la renovació educativa*. Tesis doctoral, Universitat de les Illes Balears, 2000.

[31] Moreno Martínez, Pedro Luis: «Los pensionados de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE) y la Higiene Escolar». *Revista de Educación*, 2007, **Número extra, 1**, pp. 167–190. Ejemplar dedicado a: Reformas e innovaciones educativas (España, 1907-1939).

[32] Como Pozo Andrés, María del Mar del: «La Escuela Nueva en España: crónica y semblanza de un mito». *Historia de la Educación*, 2003-2004, **22-23**, pp. 317–346, o Pozo Andrés, María del Mar del: «El movimiento pedagógico de la Escuela Nueva». En: María del Mar del Pozo Andrés (Ed.), *Teorías e instituciones contemporáneas de educación*, pp. 197–220. Biblioteca Nueva, Madrid, 2004.

[33] Viñao Frago, *La historia de las disciplinas...*, op. cit.

[34] Molero Pintado, Antonio y Pozo Andrés, María del Mar del (Eds.): *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio(1909-1932): Un precedente histórico en la Formación Universitaria del Profesorado Español*. Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares, Madrid, 1989.

experimentales. Además, enmarcados en la investigación histórica sobre la enseñanza de las ciencias experimentales se han escrito libros sobre personajes como Margarita Comas[35] y Aurelio Rodríguez Charentón[36] profesores que también van a resultar relevantes para nuestro trabajo, por su aportación a la enseñanza de las matemáticas.

En el caso de las matemáticas la cantidad de estudios es menor; un antecedente de este trabajo interdisciplinar ha sido la tesis doctoral de Dolores Carrillo Gallego, *La metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*[37], defendida en la Universidad de Murcia en 2005. En reuniones científicas de la Sociedad Española de Historia de la Educación (SEDHE) y de la Sociedad Española para el Estudio del Patrimonio Histórico Educativo (SEPHE) se han presentado trabajos por parte de la autora de esta Tesis Doctoral y de su directora sobre las propuestas acerca de la enseñanza de la matemática realizadas por algunos profesores normalistas durante el periodo republicano y también en los años previos[38]. La elección del tema de esta tesis está relacionada con ese trabajo que venimos desarrollando desde hace varios años.

[35] Delgado Martínez, María de los Ángeles: *Margarita Comas Camps (1892-1972). Científica i pedagoga.* Govern de les Illes Balears, Palma de Mallorca, 2010.

[36] López Martínez, José Damián: *Aurelio Rodríguez Charentón, un maestro en el olvido.* Editum. Ediciones de la Universidad de Murcia, Murcia, 2014.

[37] Carrillo Gallego, Dolores: *La Metodología de la Aritmética en los comienzos de los Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes.* Tesis doctoral, Universidad de Murcia, 2005.

[38] Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «Aprender matemáticas jugando: la propuesta educativa de José María Eyaralar». En: Agustín Escolano (Ed.), *La cultura material de la escuela. En el centenario de la Junta para la Ampliación de Estudios, 1907-2007*, pp. 183–194. CEINCE, Berlanga de Duero, 2007.

Sánchez Jiménez, Encarna: «La resolución de problemas: aportaciones de Aurelio Rodríguez Charentón». En: Pablo Celada (Ed.), *Arte y oficio de enseñar. Dos siglos de perspectiva histórica*, tomo II, pp. 507–516. SEPHE. Universidad de Valladolid, El Burgo de Osma (Soria), 2011.

Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «Propuestas de uso de los instrumentos de dibujo para la enseñanza de la Geometría en la edad de plata». En: Ana María Badanelli Rubio; María Poveda Sanz y Carmen Rodríguez Guerrero (Eds.), *Pedagogía museística. Prácticas, usos didácticos e investigación del patrimonio educativo*, pp. 391–400. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Educación, Madrid, 2014.

Otros trabajos sobre la historia de la enseñanza de las matemáticas son los realizados en la Universidad de Granada y en la de Córdoba por Luis Rico y Alexander Maz; en Valencia, por Bernardo Gómez, o en la Universidad de Salamanca por María Teresa González, Carmen López y Modesto Sierra –los dos últimos han trabajado también sobre la enseñanza de la matemática en las Escuelas Normales[39]–, por citar los más relevantes.

En cuanto a la utilización de herramientas procedentes de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, en el campo de la Historia de la Educación Matemática, nos hemos basado, fundamentalmente, en investigaciones procedentes del Programa Epistemológico de Investigación, especialmente de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Una contribución en este sentido es el trabajo de Carrillo[40], en el que se utiliza la TAD para evidenciar la codeterminación entre lo matemático y lo didáctico en dos experiencias educativas de comienzos del siglo XIX. El trabajo de Bolea[41] introdujo una de las nociones que se han llegado a considerar hoy básicas en el marco de la TAD, la de *modelo epistemológico de referencia*, que se ha usado también en este trabajo.

Investigaciones en el campo de la Historia de la Educación Matemática, que han utilizado herramientas procedentes del Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, son las de Ángel Contreras[42],

[39] López Esteban, Carmen: *La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto*. Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, 2011.

[40] Carrillo Gallego, Dolores: «La codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas. Pestalozzi y la enseñanza mutua». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2004, **24(1)**, pp. 11–44.

[41] Bolea Catalán, Pilar: *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2002.

[42] Sánchez Gómez, Carmen y Contreras de la Fuente, Ángel: «Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función, en cuanto a los ejemplos». En: Elena Ausenjo Martínez y María del Carmen Beltrán (Eds.), *La enseñanza de las ciencias: una perspectiva histórica*, tomo I, pp. 329–352. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2003.

Sánchez Gómez, Carmen y Contreras de la Fuente, Ángel: «Análisis de la evolución de los ejemplos que se plantean en libros de texto de bachillerato y COU para la enseñanza del concepto de límite de una función (1950-1993)». En: Elena Ausenjo Martínez y María del Carmen Beltrán (Eds.), *La enseñanza de las ciencias: una perspectiva histórica*,

Tomás Sierra, Marianna Bosch y Josep Gascón[43] o Luisa Ruiz Higueras y Francisco Javier García[44]. También en esta línea venimos trabajando desde hace varios años[45].

La investigación en historia de las disciplinas escolares conlleva el análisis de los libros de texto, campo que no es exclusivo de este ámbito de investigación. Algunas de los trabajos previos que aportan esquemas, o al menos elementos de análisis son, además de los ya citados:

- Los realizados en la Universidad de Valladolid por equipos de profesores liderados por Tomás Ortega[46], que aportan modelos de análisis y

pp. 311–328. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón, niversidad de Zaragoza, Zaragoza, 2003.

[43]Bosch Casabó, Marianna; Gascón Pérez, Josep y Sierra Delgado, Tomás: «Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: el caso de los sistemas de numeración». En: M.J. González; M.T. González y J Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 139–150. SEIEM, Santander, 2009.

[44]Ruiz Higueras, Luisa y García García, Francisco Javier: «Arithmetica Practica y Speculativa de J. Pérez de Moya (1513-1596). Análisis epistemológico y didáctico». *Llull*, 2009, **32**, pp. 103–133.

[45]Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «La validación en la formación de maestros». En: M. Bosch y al. (Eds.), *Un panorama de la TAD*, tomo 10, pp. 283–298. Centre de Recerca Matemática, Bellaterra (Barcelona), 2011.

Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «El material de enseñanza en las praxeologías de formación de maestros en España (1920-1936)». En: *IVe Congrès International sur la TAD*, IUFM de l'Academie de Toulouse, Toulouse (Francia), 2013. En prensa.

[46]Ortega del Rincón, Tomás: «Modelo de valoración de textos matemáticos». *Números*, 1996, **28**, pp. 4–12.

Ortega del Rincón, Tomás y Ibañes Jalón, Marcelino J.: «Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de bachillerato». *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 2001, **28**, pp. 39–59.

Monterrubio Pérez, María Consuelo y Ortega del Rincón, Tomás: «Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas». *PNA*, 2011, **5(3)**, pp. 105–127.

Monterrubio Pérez, María Consuelo y Ortega del Rincón, Tomás: «Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria». *Revista de Educación*, 2012, **358**, pp. 471–496.

Conejo Garrote, Laura y Ortega del Rincón, Tomás: «Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes españolas». *Números*, 2014, **87**, pp. 5–23.

valoración de textos escolares de matemáticas. Precisamente en uno de estos trabajos, «Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas»[47], los autores hacen una síntesis de las aportaciones de varios investigadores sobre el análisis de textos escolares, en particular de matemáticas, en la que citan a algunos de los autores mencionados, y a otros como Salvador Llinares y María Victoria Sánchez.

- Los enmarcados en el Programa Epistemológico de Investigación, como los de Yves Chevallard[48] y otros, como el de Hamid Chaachoua y Claude Comiti[49], en el marco de la TAD; y los de Juan D. Godino, Ángel Contreras, Vicenç Font, Miguel R. Wilhelmi, junto con otros investigadores[50], bajo el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS).

1.5. Fuentes de la investigación

Para describir las fuentes a partir de las cuales hemos llevado a cabo nuestra investigación hay que diferenciar, en principio, dos tipos: primarias y secundarias. Y entre las fuentes primarias diferenciar a su vez las fuentes inéditas o de archivo y las publicaciones de la época estudiada.

Hemos prestado una atención especial a la selección de las **fuentes primarias** de la investigación, ya que, al tratarse de una investigación histórica, lo consideramos un aspecto fundamental. En este sentido, y para garantizar que los datos utilizados son fidedignos, para estudiar las disposiciones legis-

[47] Monterrubio Pérez y Ortega del Rincón, *Diseño y aplicación...*, op. cit.

[48] Chevallard, Yves: «Organiser l'etude: 1. Structures & Fonctions». En: *XIe école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3–32. La Pensée sauvage, Grenoble, 2001. Chevallard, Yves y Bosch Casabó, Marianna: «Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations». *Petit x*, 2002, **59**, pp. 43–76.

[49] Chachaoua y Comiti, *L'analyse du rôle...*, op. cit.

[50] Godino, Juan Díaz; Font Moll, Vicenç y Willhelmi, Miguel R.: «Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 2006, **9 (Especial)**, pp. 133–156.

Konic, Patricia M.; Godino, Juan Díaz y Rivas, Mauro A.: «Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto». *Números*, 2010, **74**, pp. 57–74.

lativas, hemos procurado consultar, aunque no solo, documentos –decretos, órdenes– originales, normalmente publicados en la *Gaceta de Madrid* o en compendios legislativos; hemos examinado otras fuentes primarias indirectas que hacen referencia a ellos o los analizan, para detectar el grado de aceptación, las ventajas e inconvenientes que se les atribuyen, y la interpretación que en ese momento se hacía de su contenido.

La posibilidad de aplicar las herramientas de análisis que proporciona la Teoría Antropológica de lo Didáctico está condicionada por las fuentes primarias disponibles: no se observa un proceso de estudio de las matemáticas, no se puede repetir esa observación; se trabaja a partir de las huellas que han dejado esos procesos. Por ello, se ha realizado un esfuerzo de recopilación de fuentes escritas.

Entre las fuentes primarias hay que destacar los documentos inéditos de archivo. En este trabajo se ha utilizado especialmente el archivo de la *Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas* (JAE), archivo digitalizado[51], en el que hemos consultado: las *Memorias* de la JAE de los años 1907 hasta 1934; los *Anales*, tomos I a XIX, editados entre 1909 y 1924, que contienen los trabajos o informes presentados a su vuelta por los pensionados, que la Junta publicó; los expedientes de quienes obtuvieron o simplemente solicitaron alguna pensión o la consideración de pensionado. En estos expedientes hemos consultado: cartas dirigidas por los aspirantes al presidente de la Junta, a veces con la documentación acreditativa (hojas de servicio 'compulsadas' o certificadas por el centro de trabajo), que son una fuente de información para obtener o verificar datos biográficos y curriculares, y para conocer las opiniones e intenciones del solicitante; cartas e informes sobre la estancia del becado en el extranjero y las actividades desarrolladas; trabajos previos presentados como mérito; memorias e informes presentados a la vuelta (aunque era obligatorio presentar una memoria cuando finalizaba el disfrute de la pensión, solo algunas fueron publicadas y del resto tampoco se conservan todas).

Otra fuente primaria importante son los libros escritos por profesores normalistas principalmente, y también por inspectores, profesores de enseñanza secundaria, profesores universitarios, maestros, o simplemente matemáticos o

[51]Puede consultarse en http://archivojae.edaddeplata.org/jae_app/

pedagogos españoles y extranjeros. La mayor parte de los autores seleccionados son personas vinculadas a la formación del magisterio y las instituciones relacionadas, en particular, las Escuelas Normales, la Escuela Superior del Magisterio y la Junta de Ampliación de Estudios, incluidos los organismos dependientes de ella, como el Instituto-Escuela de Madrid. Libros que van dirigidos la mayoría de las veces a alumnos normalistas, pero también a la enseñanza primaria o secundaria y a los maestros.

Entre los libros publicados en el periodo estudiado hay: libros de matemáticas (aritmética, geometría, etc.) para estudiantes normalistas; libros de matemáticas para la enseñanza primaria y la enseñanza secundaria; libros de metodología de la matemática; libros para la formación pedagógica de los maestros, entre ellos traducciones de obras de metodología extranjeras y obras sobre aspectos o métodos considerados novedosos en aquel momento en que se estaban difundiendo y asumiendo las ideas del movimiento pedagógico conocido como Escuela Nueva.

Conseguir estos libros ha sido una tarea que ha requerido dedicación y que se ha ido completando a lo largo de años. La mayoría de estas obras específicas de matemáticas o relacionadas con las matemáticas, aunque no únicamente esas, han sido localizadas en librerías 'de antiguo' –en general a través de internet, y en otras ocasiones mediante visitas reposadas a las propias librerías, examinando material no catalogado por ellas– y adquiridas por la doctoranda; otras veces han sido compradas por internet a particulares. Es ésta una labor que requiere realizar consultas minuciosas y periódicas, por varias razones. En primer lugar, las obras se van poniendo a la venta conforme van apareciendo o las librerías consiguen catalogar bibliotecas adquiridas íntegramente o, simplemente, sus propietarios deciden venderlas; en segundo lugar, no siempre se sabe de antemano qué libros buscar, ya que el proceso de depuración que puso en marcha el gobierno franquista no solo ocasionó a veces su pérdida, sino que se perdiera también el rastro sobre su existencia. Por otra parte, las citas y las referencia de una obra no siempre incluían todos los datos; así, es frecuente que falte la fecha de publicación, de qué edición se trata, la editorial, o que figuren incompletos otros campos; ni siquiera coinciden, en ocasiones, los libros citados en el texto con las referencias bibliográficas al final del libro, y esto cuando el libro incluye una

lista de la bibliografía empleada. Ello ha supuesto un esfuerzo añadido para establecer y para localizar los libros que se supone que ha utilizado un autor o en los que se ha inspirado, con el fin de poder determinar las posibles influencias en la obra analizada.

Por ello, no es suficiente hacer un rastreo de las publicaciones de un autor en tesis doctorales y otros trabajos anteriores a éste, sino que se requiere, además, buscar las reseñas en otras fuentes, como las revistas profesionales de antaño o los anuncios en la prensa de la época. En particular, se ha adquirido y empleado en este trabajo un libro del que no habíamos hallado referencia en documento –antiguo o reciente– ni en biblioteca alguna[52], solo una referencia al mismo en Villalaín, en el sentido de que fue autorizado como libro de texto en los institutos de segunda enseñanza por el gobierno republicano (R.O. de 28 de febrero de 1938)[53].

En aquellos casos en los que no ha sido posible adquirir un ejemplar de las obras, hemos recurrido a visitar la Residencia de Estudiantes y la Biblioteca Nacional, con el fin de consultar y reproducir aquellas que nos interesaban.

Otros libros –en este caso no específicamente de matemáticas– los teníamos disponibles en la biblioteca del Área de Historia de la Educación de la Universidad de Murcia, en la que también hemos consultado obras sobre legislación y la *Revista de Pedagogía*. Los directores de la tesis y otros compañeros del *Centro de Estudios de la Memoria Educativa* (CEME) de la Universidad de Murcia nos han facilitado algunas obras concretas. Por último, ciertos libros de matemáticas antiguos, sobre todo extranjeros, pueden consultarse en internet o en la Facultad de Matemáticas.

Hemos manejado asimismo artículos aparecidos en revistas de la época, de los mismos autores cuyos libros analizamos y de otros profesores o personas representativas, algunos no vinculados a la enseñanza en las Escuelas Normales, aunque sí al movimiento de renovación metodológica que tenía lugar en ese periodo, artículos que utilizaremos ocasionalmente para contrastar o ilustrar las cuestiones planteadas en este trabajo. En ellos consultamos

[52] Eyaralar Almazán, José María: *Nociones de Aritmética y Geometría. Primer curso*. Sardá, Guadalajara, 1936.

[53] Villalaín Benito, José Luis: *Manuales escolares en España. Tomo III. Libros de texto autorizados y censurados (1874-1939)*. UNED, Madrid, 2002, p. 411.

propuestas acerca de aspectos metodológicos generales o de las matemáticas, puntos de vista sobre la formación de maestros o las Escuelas Normales en general, artículos de opinión sobre legislación, sobre instituciones o sobre las reformas educativas, posiciones ante todos estos asuntos y reseñas de libros que empleamos, además de referencias a sus autores.

Todo esto contribuye, entre otras cosas, a determinar la representatividad de las obras que usamos para nuestro análisis de las propuestas renovadoras para la enseñanza de la matemática en la formación de maestros. Puesto que se trata de analizar propuestas renovadoras, el número de ediciones que se hiciesen de los libros o su grado de utilización –la cantidad de alumnos o de Escuelas Normales en las que se usaran–, es decir, la difusión y la aceptación, no es lo único ni lo más importante.

No obstante, estudiamos obras cuya representatividad podemos asegurar por varias razones: la mayoría de estos libros se publicaron por editoriales con amplia difusión y prestigio y de algunas se hicieron varias ediciones; varias de ellas fueron declaradas oficialmente «de mérito»; están reseñadas en revistas profesionales, anunciadas en la prensa, citadas algunas de ellas por otro autor, etc.

Y si atendemos a la representatividad de quienes las escribieron, la mayoría de estos profesores estudió en la Escuela Superior del Magisterio o fueron pensionados por la JAE, pertenecían a la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales, ocuparon puestos de responsabilidad en la Junta Directiva de la Asociación o de la *Revista de Escuelas Normales*, tenían cargos directivos o responsabilidades adicionales en sus Escuelas Normales –o en organismos dependientes de la JAE–, participaron en numerosas actividades de difusión de la cultura y de formación permanente del magisterio, fueron invitados por las autoridades educativas republicanas para tomar parte en actividades de formación y en la elaboración de programas y materiales sobre la enseñanza de las matemáticas, en particular para los futuros maestros, etc. Estos criterios son los que han influido en la elección de las obras.

En cualquier caso, sabemos que las propuestas reformadoras, pese a su difusión y aun en momentos que se consideran de gran renovación educativa, conviven, casi siempre en minoría, con los planteamientos más clásicos e inmovilistas. En la época que nos ocupa, ocurrió además que, precisamente

cuando desde la Administración se estaba dando el mayor impulso posible a los nuevos ideales educativos, y con ello, a un cambio curricular y metodológico que aumentaba el protagonismo de estos textos, todo el proceso se interrumpió bruscamente y se invirtió durante varias décadas, por lo que no hubo continuidad ni se puede, pues, determinar la difusión y la aceptación que estos materiales impresos hubiesen alcanzado entre el profesorado normalista y los maestros[54].

Las revistas profesionales consultadas han sido, en primer lugar, la *Revista de Escuelas Normales* y la *Revista de Pedagogía*, *La Escuela Moderna*, y ocasionalmente, el *Boletín de Escuelas Normales*, el *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza* (B.I.L.E.) y revistas de matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española, como la *Revista Matemática Hispano-Americana*. Para aquellos números de la *Revista de Escuelas Normales* no disponibles en la Biblioteca Nacional ni en nuestra universidad, hemos recurrido a las bibliotecas de otras universidades, principalmente la de Alcalá de Henares.

Completan las fuentes primarias informaciones consultadas en actas de congresos, discursos y conferencias editadas y, puntualmente, la prensa de aquel momento (anuncios, esquelas de defunción, etc).

Han sido útiles a la hora de localizar fuentes bibliográficas la Red de Bibliotecas Universitarias REBIUN y la Red de Bibliotecas y Archivos del CSIC, aunque también hayamos tenido que investigar la existencia de documentos en bibliotecas locales –normalmente de lugares seleccionados, según la relación de los autores con el lugar–.

Una dificultad con la que nos hemos encontrado en varios casos ha sido la de fechar un libro. Unas veces porque publicaciones, o trabajos actuales sobre los autores y sus obras, se contradicen entre ellos o con la información que figura en las revistas profesionales contemporáneas a la publicación de la obra. En ocasiones no parece haberse tenido en cuenta si el libro que se referencia es o no la primera edición. A esto se añade que a veces se publicaban libros, reelaboración o casi reedición de otro anterior, con un título muy similar. Por último, puede que ni en el propio libro figure la fecha de edición o de publicación. Cuando se ha podido establecer con certeza

[54]Hemos de indicar, no obstante, que de los libros de Comas, Eyaralar, Sáiz, Romero, etc. hay reseñas en las revistas profesionales y, a veces, en la prensa de la época.

la fecha correcta, es la que hemos reflejado en esta Memoria, aunque no coincida con otras fuentes actuales. En alguna ocasión solo se conoce, y solo hemos podido aportar, la fecha aproximada[55]. Hay incluso un libro que en las bibliotecas oficiales autorizadas se sitúa en los años treinta y que, no obstante, considerando el título, la ciudad en la que se publicó[56] y la biografía de su autor, hemos llegado a la conclusión de que hubo de publicarse dos décadas después[57]. En todos los casos hemos puesto el mayor empeño en ser rigurosos incluso en este aspecto.

Las **fuentes secundarias** de la investigación son fundamentalmente de dos tipos: libros y artículos de Historia de la Educación, por un lado, y de Didáctica de las Matemáticas, por otro.

Se trata de un trabajo de Historia de la Educación Matemática, que comparte elementos de dos disciplinas, la Historia de la Educación y la Didáctica de la Matemática. Y las fuentes secundarias pertenecen a ambas áreas de conocimiento, en particular, la Historia de las Disciplinas Escolares y la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Hemos recurrido a publicaciones sobre el movimiento pedagógico de la

[55]Los libros de matemáticas de Charentón para primaria sabemos que fueron escritos en la década de los 30, pero no conocemos el año exacto de publicación. El libro *Elementos de Aritmética*, de la *Colección Elemental Intuitiva*, de Rey Pastor y Puig Adam, que en publicaciones recientes figura que es de 1928, se publicó en 1927, ya que existen reseñas de ese año en las revistas de la época. Otras veces, trabajos recientes no tienen en cuenta, al situar el libro en un periodo u otro, si se trata o no de la primera edición; por ejemplo, el libro Comas Camps, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1923, se fecha en 1932 (año en el que se publicó la 5.ª edición) y, por tanto, se incluye como representativo de los escritos durante el periodo republicano para la asignatura *Metodología de las Matemáticas* en López Esteban, Carmen: *La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto*. Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, 2011.

[56]En el proceso de depuración al que fueron sometidos todos los profesores, a Sáiz Salvat se le trasladó forzosamente a la Escuela Normal de Málaga, en la que estuvo hasta que se revisó su expediente y pudo trasladarse a la Escuela Normal de Castellón, donde se jubiló en 1961 (BOE n.º 239, 1961, p. 14423). El libro se publicó en Málaga y su título cpincide con el de una asignatura de segundo curso del plan de 1950 para las Normales. Seguramente fue publicado entre 1950 y 1952.

[57]Sáiz Salvat, Felipe: *Geometría y ampliación. Didáctica. Trigonometría*. El autor, Málaga. 195?.

Escuela Nueva y a publicaciones –o tesis realizadas– sobre las instituciones que influyeron en las propuestas de renovación de la enseñanza de la matemática y de la didáctica de la matemática en la formación de los maestros: la Institución Libre de Enseñanza y, sobre todo, la JAE y la Escuela Superior del Magisterio. Sin olvidar, por supuesto, las que dependen de ellas, el Laboratorio Matemático de la JAE y el Instituto-Escuela, centros que no constituyen el objetivo principal de este trabajo, pero a los que nos hemos de referir por su relación con el tema que estudiamos.

Las reformas en la enseñanza de la matemática se producen en el marco de reformas en las leyes que regulan la formación de los maestros, los requisitos de acceso a los estudios de maestro, la estructura, los planes de estudio y el acceso a la profesión. Junto a los documentos legislativos, ya mencionados, hemos consultado fuentes secundarias que nos han permitido conocer la visión de otros investigadores, sus juicios sobre las reformas que estaban teniendo lugar en general en la formación de maestros y que habían de afectar a las matemáticas.

La biografía de los protagonistas en parte se ha reconstruido a partir de fuentes primarias, sobre todo de la consulta de los expedientes de la JAE, pero también de otros trabajos más o menos recientes. En particular, publicaciones sobre las instituciones citadas o sobre personajes concretos, vinculados principalmente a otras áreas diferentes de la matemática, y que nos han servido –junto con obras a veces muy alejadas de las disciplinas que abordamos y la consulta de prensa de diferente tipo– para completar algunos datos biográficos.

Todo ello sin olvidar los trabajos sobre la historia de las disciplinas escolares, en particular los realizados por quienes han dirigido esta tesis.

Entre las fuentes secundarias consultadas están las referidas al análisis de libros de texto de matemáticas, algunas ya citadas en el apartado dedicado al «estado de la cuestión», que hemos leído con interés, tanto las que proponen esquemas o metodologías de análisis como aquellas en las que se tratan ejemplos concretos.

Puesto que el análisis del contenido de los textos y de otros artículos sobre diversos aspectos de la enseñanza de la matemática se ha hecho en el marco de

la TAD, hemos utilizado como referencia numerosos trabajos y publicaciones enmarcadas en el Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de la Matemática, en particular en la TAD y otras teorías relacionadas, como la Teoría de las Situaciones Didácticas. Muchos de ellos se han realizado en el seno del Grupo de investigación en Teoría Antropológica de lo Didáctico[58]; otras tesis doctorales y publicaciones, casi todas escritas en francés, se deben a Guy Brousseau[59], Yves Chevallard[60] y, en general, a investigadores que utilizan los marcos teóricos de la Teoría de Situaciones Didácticas y, sobre todo, de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Por último, junto a las fuentes citadas hemos utilizado trabajos propios, realizados unas veces en el contexto de la Historia de la Educación y otras en el contexto de la Didáctica de la Matemática, en ambos casos trabajos que aplicaban las herramientas metodológicas de la Didáctica de la Matemática para investigar aspectos de la Historia de la Educación, más concretamente de la historia de aquella disciplina.

1.6. Estructura del trabajo

Una vez descritos los objetivos que nos proponemos con nuestra investigación, las herramientas metodológicas y las fuentes, comentamos cuál es, en lineas generales, el contenido de los diferentes capítulos.

Los cambios y las propuestas de reforma en la enseñanza de la matemática y en la formación matemática y didáctica de los maestros no se pueden entender si no es situándolos en el contexto en el que tuvieron lugar. En el capítulo segundo exponemos precisamente la situación en la que se desarrollaba la formación de los maestros en el periodo estudiado. Tomar en consideración los aspectos ecológicos –en el sentido de la TAD– supone ocuparnos de niveles de codeterminación que están más allá del disciplinar, los niveles Pedagogía, Escuela y Sociedad, niveles en los que, por otra parte, se estaban operando cambios significativos en este momento. Dedicamos pues el primer apartado al movimiento de renovación pedagógica conocido como Escuela Nueva, cen-

[58] `www.atd-tad.org`

[59] `http://guy-brousseau.com`

[60] `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip`

trándonos en lo que supuso para la educación matemática en particular; nos interesamos a continuación por las instituciones que fueron decisivas para las reformas puestas en marcha.

La Institución Libre de Enseñanza es un antecedente de las renovaciones pedagógicas que tendrían lugar en el primer tercio del siglo XX y continuó siendo el germen de los movimientos y las instituciones renovadoras, así como de los cambios que fueron aconteciendo en ese periodo. Hemos prestado atención a su incidencia en el campo de las matemáticas, materia que constituye el interés central de nuestro trabajo, aunque no haya mucho que destacar. Otras instituciones creadas a principios de siglo y que fueron decisivas en las reformas en la formación, también matemática, del magisterio primario –aunque no solo– son la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas y la Escuela Superior del Magisterio. En ambos casos haremos un análisis especial en lo que se refiere a la matemática.

Y formando parte del estudio ecológico al que nos referíamos están los cambios legislativos, en íntima relación con las nuevas instituciones y con el nuevo estado de opinión en cuanto a la escuela y al maestro. Se trata de los planes de formación de maestros, concretamente los de 1914 y 1931, por ser en el marco de estos planes de formación cuando tuvo lugar el movimiento renovador. Incluso para la matemática como ciencia, en 1915 se creó un organismo –el Seminario Matemático– que habría de hacer despegar la investigación matemática en España.

Finaliza el capítulo presentando brevemente, o completando la presentación, de los que fueron los protagonistas principales de las propuestas renovadoras para la formación matemática y didáctica de los maestros, personas cuyos trabajos y publicaciones iremos describiendo y analizando en el resto del trabajo.

Los capítulos 3, 4 y 5 están dedicados a las asignaturas de matemáticas que formaban parte de los planes de estudio en las Escuelas Normales; los dos primeros a las del Plan de 1914, asignaturas que hacían referencia a ramas de la matemática -Aritmética, Geometría, Álgebra[61]–; y el último a

[61] En el plan de estudios de las Escuelas Normales de 1914 las asignaturas de matemáticas están en los tres primeros cursos y son *Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría*,

una materia que, aunque contemplada en el plan anterior a la vez que las puramente matemáticas, no tiene la entidad de una asignatura como tal hasta el plan de 1931; se trata de la *Metodología de la Matemática*.

En los capítulos 3 y 4 no nos proponemos examinar sistemáticamente todos y cada uno de los contenidos de estas asignaturas, nuestra intención es otra. Lo que se pretende es aportar una visión de cómo se concibe la enseñanza de esas materias, incluso la relación entre ellas, en las Escuelas Normales y en la escuela primaria, qué cambios se estaban proponiendo, cuáles fueron las influencias recibidas y qué reelaboración pudo haber en cada caso. Sobre todo nos interesa comparar las propuestas de los diferentes protagonistas de la renovación en la enseñanza de la matemática. Por ello, nos centramos en algunos tópicos, en los que basamos nuestro análisis.

Estudiamos el pasado, pero nuestro interés surge también del presente.

Hay que señalar que la estructura del capítulo 3 y de cada uno de los apartados del capítulo 4 no coinciden exactamente; por una parte hemos considerado la propia disciplina, cómo se concibe en una época dada, qué aspectos se consideran relevantes, o su lugar en el currículo; por otra, las fuentes disponibles condicionan en parte el tipo de cuestiones de las que podemos ocuparnos en cada una de estas tres ramas de la matemática.

En la Aritmética (capítulo 3) atendemos al sistema de numeración, el sentido de las operaciones y las técnicas de cálculo, algorítmico o no, sin olvidar el cálculo mental. Las representaciones gráficas y el simbolismo son otros elementos que hemos seleccionado como base para la reflexión.

Para nuestro análisis empleamos elementos teóricos de la TAD. Nos interesa estudiar qué recursos se utilizan pero, sobre todo, con qué fin se emplean la historia de la matemática, los materiales manipulativos, el tratamiento de las técnicas matemáticas, etc. Centramos la atención en las definiciones, las justificaciones, los tipos de ejercicios y su función. En el caso de la formación de maestros comparamos dos libros de aritmética de un mismo autor, profesor normalista, escritos con una década de diferencia. Igualmente, analizamos algunos libros, escritos por diferentes autores, para la enseñanza primaria y comparamos éstos con las ideas sobre la enseñanza de la matemática declaradas en libros de metodología y otros trabajos por esos mismos autores.

Aritmética y Geometría, y *Álgebra*, respectivamente.

Los tópicos elegidos para la Geometría (capítulo 4) son, fundamentalmente, el dibujo geométrico, y los problemas relacionados con él, y el papel de la geometría del movimiento en la forma de plantear la enseñanza de esta materia. Y, por supuesto, intentamos indagar acerca de las influencias recibidas por estos profesores, sobre todo, relacionadas con su experiencia fuera de nuestro país, pensionados por la JAE. En este caso, para determinar esas influencias y para situar las posibles innovaciones en el marco más amplio de la renovación en la educación matemática en España, nos serviremos también de algunos libros escritos para la enseñanza secundaria, la mayoría por los mismos profesores normalistas, que contribuyen, por tanto, a determinar sus ideas respecto a la enseñanza de esta rama de la matemática.

En el tema del Álgebra –seguimos en el capítulo 4– disponemos de menos obras para nuestro estudio. No obstante, a partir de los tratados de metodología de la matemática que escribieron estas mismas personas y de algunos artículos intentamos caracterizar la epistemología de estos profesores en relación con el álgebra. En este caso los tópicos elegidos son las ecuaciones y la proporcionalidad.

A la asignatura *Metodología de la Matemática* va dedicado el capítulo 5. Los años previos a la II República fueron de intensa renovación metodológica, lo que motivó comentarios y propuestas sobre cuál había de ser la formación en metodología que necesitaba un maestro. Consideramos estas propuestas –recogidas en artículos publicados en revistas profesionales– y las que finalmente se plasmaron en libros cuando la citada asignatura fue una realidad, con el *plan profesional* de formación de maestros. En este caso y por tratarse de una asignatura novedosa, en la que no se contaba con antecedentes sobre los que construirla, las diferencias entre los libros analizados son mayores, no solo en los enfoques sino en los contenidos mismos, cuya relación incluimos en este capítulo. Como en los dos capítulos anteriores, comparamos las propuestas, señalando los aspectos diferentes sobre los que tratan, pero también contrastando el enfoque que se daba en los aspectos comunes tratados, enfoque que, como veremos, está en íntima relación con el modelo epistemológico y didáctico de la matemática en cada caso.

El último apartado es una reflexión acerca de lo que supuso el cambio

de plan en la formación matemática y didáctica del magisterio, reflexión no exenta de crítica en algunos puntos. Hacemos algunas consideraciones acerca de lo que las reflexiones compartidas sobre la metodología de la matemática podían suponer de cara a la constitución de la didáctica de las matemáticas como disciplina.

Los capítulos 6 y 7 se dedican al análisis de las organizaciones didácticas en la formación matemática de los maestros y en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, respectivamente. En el primero estudiamos los dispositivos de formación empleados en las clases de matemáticas en la Escuela Normal, basándonos principalmente en la descripción que hace un profesor, José María Eyaralar, del desarrollo de una lección y de otros dispositivos asociados; estableceremos algunas comparaciones con aspectos de las propuestas de otros autores que, en general, no las explicitan de modo tan sistemático, y también con lo que él mismo y los otros profesores aconsejan para la escuela primaria. Una praxeología de formación relevante de la asignatura de Metodología son las prácticas docentes de la asignatura, a las que se destina el último apartado de este capítulo.

Las praxeologías analizadas en el capítulo 7 tienen que ver con el método de proyectos, el papel y la utilización del material didáctico y, por último, el juego y la matemática lúdica en general. Igual que en el capítulo anterior, no nos hemos limitado a describir las orientaciones y las propuestas realizadas en aquel momento con las finalidades declaradas; el marco teórico que proporciona la TAD nos ha permitido profundizar más y determinar el alcance y la validez de estas aportaciones para el caso concreto de las matemáticas.

El capítulo 8 afronta el tratamiento que se da en los textos a algunos procesos importantes en matemáticas: la definición, la demostración y la resolución de problemas. Se han elegido estos procesos estratégicamente ya que conllevan –sobre todo la resolución de problemas– otros procesos más elementales[62]. Nos interesamos por las indicaciones que ofrecen los libros de

[62] «Algunos de los [procesos] más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos, puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.». Godino, Juan Díaz; Batanero Bernabeu, Carmen y Font Moll, Vicenç: «Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática»,

metodología de la matemática con relación a la definición y a la validación, sin olvidar el estudio ecológico que permita determinar qué características de la manera de abordarlas dependen de la institución en la que se manejan –Escuela Normal o escuela primaria–, ni tampoco la comparación entre distintas propuestas, incluso del mismo profesor en diferentes momentos, en el caso de la validación. No abandonamos tampoco la perspectiva ecológica al estudiar la resolución de problemas, que analizamos diferenciando las fases en el trabajo de resolución de un problema a la vez que consideramos ciertas cuestiones. Una de ellas es el papel de la intuición, aspecto fundamental del ideario de la Escuela Nueva, y que vemos cómo es asumida y potenciada en función de la epistemología de cada autor. Entre otros aspectos, prestamos interés al papel de las representaciones gráficas y al método de análisis-síntesis.

En el último capítulo presentamos las conclusiones de nuestra investigación, las aportaciones realizadas y las cuestiones abiertas para futuras investigaciones.

2009. `http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm`. Consultado el 10-10-2015 (pp. 1-24, cita en p. 10). Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo,Godino, Juan Díaz; Batanero Bernabeu, Carmen y Font Moll, Vicenç: «The onto-semiotic approach to research in mathematics education». *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 2007, **39(1-2)**, pp. 127–135.

Capítulo 2

La renovación pedagógica y la formación del magisterio en el primer tercio del siglo XX

La escuela será lo que sea el Maestro. Pero el Maestro ha de formarse según el ideal que se tenga de la Escuela

Francisco Romero

El primer tercio del siglo XX fue un momento importante de impulso a la renovación de la enseñanza en todos los niveles. Las Escuelas Normales habían sufrido un proceso de decadencia y no es hasta el siglo XX cuando comienza a dignificarse de nuevo la formación de los maestros. A ello contribuyeron los planes de estudios de las Normales de 1914 y 1931 y también algunas instituciones fundamentales para la regeneración cultural, científica y educativa en España, no solo para el magisterio primario. Nos referimos fundamentalmente a la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE) –y los centros dependientes de ella– y a la Escuela Superior del Magisterio. Ambas se sitúan en el ámbito de influencia de la Institución Libre de Enseñanza, fundada en el siglo anterior.

Todas estas instituciones asumieron las ideas de un movimiento pedagógico que se desarrolló a nivel internacional, el movimiento de la Escuela

Nueva o Educación Nueva, con ideas renovadoras en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje. En este capítulo estudiamos el movimiento de la Escuela Nueva, las instituciones citadas, así como el Instituto-Escuela, dependiente de la JAE, y los dos planes de estudios nombrados. En particular, en lo referente a las matemáticas.

2.1. La Escuela Nueva y las matemáticas

En el análisis de propuestas de enseñanza que llevamos a cabo en esta Memoria, procuramos considerar, junto al análisis praxeológico, un análisis *ecológico* que tenga en cuenta la institución en la que se realizan los aprendizajes (en este caso la escuela primaria) y trate de determinar el *nicho ecológico* de aspectos relacionados con el proceso de estudio de las matemáticas en esa institución, manifestado en posibilidades y límites de dicho proceso de estudio[1]. Este análisis ecológico debe tener en cuenta que el periodo considerado fue un tiempo de cambios, inspirados en los principios de la Escuela Nueva, que afectaban al sistema educativo y, en particular, a la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria y a las Escuelas Normales, que estaban demandando primero, y después realizando, un proceso de cambio en sus planes de estudio.

2.1.1. El movimiento de la Educación Nueva

En aquel momento las corrientes innovadoras en la enseñanza estaban influidas por el movimiento de la *Escuela Nueva*, surgido a finales del siglo XIX y consolidado y difundido precisamente en el primer tercio del siglo siguiente[2]. Se trataba de una alternativa a la escuela tradicional, que consideraba al

[1] Chachaoua, Hamid y Comiti, Claude: «L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique». En: A. Bronner y al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 771–789. IUFM de l'Academie de Montpellier, Montpellier, 2010.

[2] En la década anterior y durante la II República las ideas y los métodos de la Escuela Nueva se encontraban precisamente en un momento de difusión, consolidación y oficialización. Carreño, Myriam; Colmenar, Carmen; Egido, Inmaculada y Sanz, Florentino: *Teorías e instituciones contemporáneas de educación*. Síntesis, Madrid, 2000.

niño como elemento central a la hora de organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Su característica principal es la importancia que se concede a la actividad y al respeto a los intereses del niño, así como a su individualidad.

Como ya hemos comentado, la ideología pedagógica dominante en un momento histórico y en una institución determinada, y el modelo epistemológico de las matemáticas subyacente, se consideran factores principales de las dimensiones de la actividad matemática que se estiman prioritarias en dicha institución[3].

En el momento estudiado, esa ideología pedagógica se encuentra formulada en la *Revista de Pedagogía*, como órgano de expresión en España de la *Liga Internacional de Educación Nueva*[4]. Ángel Casado considera que en esta revista:

> Se insiste en la necesidad del pensamiento filosófico como fundamento indispensable para la teoría y la práctica educativas. Y ello, porque, desde el primer momento, queda claro que no se trata sólo de reformar y mejorar los procedimientos o las técnicas, sino sobre todo de penetrar los grandes principios (filosóficos, científicos, didácticos...) que les sirven de soporte, como la vía más apropiada en la consideración teórica de la realidad educativa, contribuyendo a una visión más global e integradora del hecho educativo, sus interrelaciones y las profundas implicaciones humanas que lleva consigo[5].

Se pretendía, en última instancia, una renovación cultural y social de España, renovación que, en lo referente a movimientos, métodos e instituciones escolares, recibió su mayor inspiración en los principios de la *Educación*

[3]Bosch Casabó, Marianna y Gascón Pérez, Josep: «Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas. De los 'talleres de prácticas' a los 'recorridos de estudio e investigación'». En: A. Bronner y al. (Eds.), *Diffuser les mathematiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 55–91. IUFM de l'Academie de Montpellier, Montpellier, 2010. Cita en p. 60.

[4]Viñao Frago, Antonio: «La modernización pedagógica española a través de la "Revista de Pedagogía" (1922-1936)». *Anales de Pedagogía, Universidad de Murcia*, 1994-95, **12-13**, pp. 7–45.

[5]Casado, Ángel: «Filosofía y educación en España: Luzuriaga y la Revista de Pedagogía. Bajo Palabra». *Revista de Pedagogía II Época*, 2011, **6**, pp. 53–62. Cita en p. 62.

Nueva o *Escuela Nueva*, que propugnaba una renovación en los sistemas y métodos de educación y que originó numerosas experiencias educativas a nivel mundial, métodos y experiencias que los profesionales españoles conocerían a través de las obras publicadas y también de sus viajes por el extranjero, becados por la JAE, precisamente con este fin.

Personas relacionadas con el movimiento de la Escuela Nueva (a través de la Institución Libre de Enseñanza, la *Revista de Pedagogía*, la *Revista de Escuelas Normales*, la Junta de Ampliación de Estudios) llegaron a puestos de responsabilidad en el ámbito educativo durante la Segunda República, y mediante la legislación y la gestión trataron de institucionalizar esa ideología pedagógica dominante, y las experiencias relacionadas que se habían llevado a cabo en España en los tres decenios anteriores.

El deseo de renovación se observa ya a nivel de Sociedad[6]:

> Por primera vez en la historia de la educación la escuela activa se ve consagrada en un texto constitucional. En el artículo 48 de la Constitución de la República española, promulgada el 9 de diciembre de 1931, se estatuye que «La enseñanza hará del trabajo el eje de su actividad metodológica»[7].

Esta influencia social se infiltrará también en las propuestas para la enseñanza de la matemática, como apunta Luis Paunero en el prólogo de su libro sobre educación matemática. Éstas son «ideas que se expusieron en clase, cosas que si se dijeron en clase se repiten hoy en la calle, porque creemos que en la calle de hoy interesan tanto estas cuestiones como en nuestra clase de la Escuela Normal»[8].

Los profesores normalistas tratan de integrar propuestas de diferentes disciplinas, lo que se observa particularmente en sus obras sobre metodología de la matemática, pudiéndose detectar fenómenos de *codeterminación didáctica*

[6]Hace referencia a los niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2001) (figura 1.1, p. 17).

[7]Roselló, P.: «La instrucción pública mundial 1931-1932». *Revista de Pedagogía*, 1932, **132**, pp. 531–537. Cita en p. 534.

[8]Paunero Ruiz, Luis: *Ensayo. Las matemáticas en la educación*. Tipografía Heliópolis, Sevilla, 1935, pp. 5-6.

(figura 1.1, p. 17) que afectan a niveles superiores al de la *Disciplina*, en particular los niveles *Pedagogía* y *Sociedad*:

> ¿Cuáles son las ideas capitales de la nueva orientación?
>
> Como ocurre casi siempre en estos casos, no son, en su mayor parte, exclusivas del campo matemático: han ido influyendo de la misma manera, aunque con reacción distinta, en otras disciplinas, y *son, en último término, hijas del espíritu filosófico de la época*[9].

La visión que tenían de cada materia escolar y de cómo podía contribuir a la educación, así como lo que podemos llamar *modelo didáctico*, o sea, las ideas acerca de la enseñanza y aprendizaje en un momento histórico, en una cultura y en una institución determinada, en el caso del movimiento de la Escuela Nueva, no suponían un *modelo docente espontáneo*[10], hecho sin un soporte teórico, 'desde lo cotidiano'[11]. Por el contrario, se trataba de un modelo sobre el que había un cuestionamiento cuya justificación se hacía explícita. En este caso, el ideal al que tendía la Escuela Nueva, sus propósitos, se plasmaron en siete principios, formulados por la *Liga Internacional de la Educación Nueva*, fundada en 1921:

> 1.º El fin esencial de toda educación es preparar al niño para querer y para realizar en su vida la supremacía del espíritu. Aquélla debe, pues, cualquiera que sea el punto de vista en que se coloca el educador, aspirar a conservar y aumentar en el niño la energía espiritual.
>
> 2.º Debe respetar la individualidad del niño. Esta individualidad no puede desarrollarse más que por una disciplina que conduzca a la liberación de las potencias espirituales que hay en él.
>
> 3.º Los estudios, y de una manera general el aprendizaje de la vida, deben dar curso libre a los intereses innatos del niño, es decir, a los que se despiertan espontáneamente en él y que encuentran su expresión en las actividades variadas de orden manual, intelectual, estético, social y otros.

[9] Comas Camps, Margarita: «La enseñanza de las Matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1922, **6**, pp. 215–220, p. 215. La cursiva es nuestra.

[10] Barquero, Berta: *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2009, cap. 2.

[11] Usamos este término vulgar en contraposición a especializado o fundamentado en un contexto académico o por especialistas.

> 4.º Cada edad tiene su carácter propio. Es necesario, pues, que la disciplina personal y la disciplina colectiva se organicen por los mismos niños con la colaboración de los maestros; aquéllas deben tender a reforzar el sentimiento de las responsabilidades individuales y sociales.
>
> 5.º La competencia o concurrencia egoísta debe desaparecer de la educación y ser sustituida por la cooperación, que enseña al niño a poner su individualidad al servicio de la colectividad.
>
> 6.º La coeducación reclamada por la Liga –coeducación que significa a la vez instrucción y coeducación en común– excluye el trato idéntico impuesto a los dos sexos; pero implica una colaboración que permite a cada sexo ejercer libremente sobre el otro una influencia saludable.
>
> 7.º La Educación Nueva prepara en el niño no sólo al futuro ciudadano capaz de cumplir sus deberes hacia su prójimo, su nación y la Humanidad en su conjunto, sino también al ser humano, consciente de su dignidad de hombre[12].

Pero los criterios que sirven de base a la justificación de las innovaciones se hacen aún más explícitos. Los fundamentos de este nuevo modelo educativo se concretan y se reformulan (varias veces) por Adolphe Ferrière, en los treinta principios de la Oficina Internacional de las Escuelas Nuevas (figura 2.1, p. 43)[13].

La orientación contenida en los principios citados aparece expuesta por Lorenzo Luzuriaga en una obrita, titulada *Las Escuelas Nuevas*[14]. Algunos manuales de Historia de la Educación[15] la sintetizan en estos puntos:

- *«Escuela centrada en el niño y sus intereses»*. En contraposición a la enseñanza clásica, centrada en el maestro, se impone el paidocentrismo.
- *«Escuela activa»*. Este principio es tan importante que incluso el propio Ferrrière usa esta denominación y la de *Escuela Nueva* indistintamente.

[12] Marín Ibañez, Ricardo: «Los ideales de la Escuela Nueva». *Revista de Educación*, 1976, **242**, pp. 23–42.

[13] Ibídem, pp. 28-34. Esta formulación es la que hizo Ferrière en 1925.

[14] Luzuriaga, Lorenzo: *Las escuelas nuevas*. Publicaciones del Museo Pedagógico Nacional. J. Cosano, Madrid, 1923.

[15] Carreño, Colmenar, Egido y Sanz, *Teorías e instituciones...*, op. cit., pp. 32-34.

Organización

1. La escuela nueva es un *laboratorio de pedagogía práctica.*
2. La escuela nueva es un *internado.*
3. La escuela nueva está situada *en el campo.*
4. La escuela nueva agrupa a los alumnos por *casas separadas.*
5. Gran parte de la escuela nueva utiliza la *coeducación* de los sexos.

Vida física

6. La escuela nueva organiza *trabajos manuales.*
7. La escuela nueva atribuye una importancia especial a: A) La *carpintería* (. . .) B) El *cultivo* del campo (. . .) C) La *crianza*, si no de grandes animales, al menos de los pequeños.
8. La escuela nueva estimula en los niños *trabajos libres.*
9. La escuela nueva asegura el cultivo del cuerpo por la *gimnasia* natural.
10. La escuela nueva cultiva los *viajes* a pie o en bicicleta, en *campamento*, bajo la tienda. Se cocina al aire libre.

Vida intelectual

11. La escuela nueva entiende por *cultura general* el cultivo del juicio y de la razón.
12. La escuela nueva añade a la cultura general una *especialización.*
13. La escuela nueva basa su enseñanza en los *hechos* y las *experiencias.*
14. La escuela nueva recurre a la *actividad personal* del niño.
15. La escuela nueva establece su programa sobre los *intereses espontáneos del niño.*

Organización de los estudios

16. La escuela nueva recurre al *trabajo individual* de los alumnos.
17. La escuela nueva recurre al *trabajo colectivo* de los alumnos.
18. En la escuela nueva, la enseñanza propiamente dicha *se limita a la mañana.*
19. En la escuela nueva se estudian *pocas materias por día.*
20. En la escuela nueva se estudian *pocas materias por mes* o por trimestre.

Educación social

21. La escuela nueva forma, en ciertos casos, una *república escolar.*
22. En la escuela nueva se procede a la *elección de los jefes.*
23. La escuela nueva reparte entre los alumnos los *cargos sociales.*
24. La escuela nueva utiliza *recompensas* o sanciones positivas.
25. La escuela nueva utiliza *castigos* o sanciones negativas.

Educación artística y moral

26. La escuela nueva pone en juego la *emulación.*
27. La escuela nueva debe tener un *ambiente de belleza.*
28. La escuela nueva cultiva la *música colectiva.*
29. La escuela nueva educa la *conciencia moral.*
30. La escuela nueva educa la *razón práctica.*

Figura 2.1: Principios de la Escuela Nueva (1925)

Esta idea de actividad comprende otras como el respeto a la individualidad de cada niño, la importancia concedida a la actividad espontánea del niño, a su autonomía y a su libertad.

- *«Cambios en la relación maestro alumno»*. Como consecuencia del respeto a la libertad del alumno, el papel del maestro es el de un guía que posibilita al niño el acceso al conocimiento, a partir de sus intereses y necesidades.

- *«Escuela vitalista»*. La actividad escolar debe ser un reflejo de la vida y no solo preparar para ella.

- *«Escuela centrada en la comunidad».* Sin menosprecio, al contrario, de la individualidad y de la libertad de cada niño, se le confiere importancia al trabajo colectivo en la escuela.

En definitiva, como señala Luzuriaga, «estas cinco ideas: vitalidad, actividad, libertad, infantilidad y comunidad creemos pueden servir para caracterizar la concepción nueva de la educación»[16], y considera que el resto de ideas están subordinadas o se desprenden de ellas.

2.1.2. Cuestiones planteadas y respuestas

El último de los siete principios en los que la Liga Internacional de la Educación Nueva recogió su Ideario[17] expresa bastante bien la *«cuestión general»* planteada en aquel momento:

¿Cómo preparar al niño para que sea el buen ciudadano, que la sociedad necesita, a la vez que un ser humano consciente de su dignidad de hombre?

Esa cuestión condiciona las cuestiones que se plantean los enseñantes, a un nivel más general que el de la disciplina:

- *¿Cómo organizar la enseñanza respetando la autonomía del niño?*

[16] Luzuriaga, Lorenzo: *Métodos de la nueva educación*, capítulo Conceptos de la nueva educación. Losada, Buenos Aires, 3.ª edición, 1961, p. 19.

[17] Citado en la página 41.

- *¿Cómo llevar a cabo una enseñanza activa, que atienda a los intereses de cada niño?*

- *¿De qué manera transformar la competitividad en cooperación en el aula?*

Cuestiones que se trasladan a cada una de las disciplinas, entre ellas las matemáticas.

Por ello, las diferentes propuestas que se realizaron y las experiencias que se llevaron a cabo planteaban metodologías diferentes, todas ellas basadas en los principios de la Oficina Internacional de las Escuelas Nuevas, como:

> «13. La Escuela Nueva basa su enseñanza en los *hechos* y en las *experiencias*».
>
> «14. La Escuela Nueva recurre a la *actividad personal* del niño».
>
> «15. La Escuela Nueva establece su programa sobre los *intereses espontáneos del niño*»[18].

Como señalaba Francisco Manuel y Nogueras, «la fórmula "aprender para hacer" debe cambiarse por ésta otra expuesta con las mismas palabras: "hacer para aprender"»[19]. Una de las consecuencias es, por ejemplo, la importancia que se concede al juego (que estudiaremos en la sección 7.3, p. 480) y al material de enseñanza (sección 7.2, p. 453).

Respecto al primero, afirma Vicente Valls:

> Pero esta actividad creadora tiene una singular expresión: el *juego*. [...] El interés no es opuesto al esfuerzo si éste se basa en aquel. Con su actividad libre, expresa el niño lo que su pensar ha elaborado, moldea una idea en una realidad que está fuera de él, *crea*. «Y el niño no *crea*, es decir, no es artista sino cuando juega»[20].

[18] Marín Ibañez, *Los ideales...*, op. cit., pp. 31-32.

[19] Manuel Nogueras, Francisco: «Los trabajos manuales, ayer y hoy». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **88**, pp. 102–104. Cita en p. 103.

[20] Valls, Vicente: *El material de enseñanza*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 2.ª edición, 1928, p. 6. La frase entrecomillada es una cita de Manuel Bartolomé Cossío. La escuela, el maestro y el material de enseñanza. Madrid. La Lectura.

Luzuriaga, ya en el exilio, seguiría escribiendo sobre la relación entre juego y trabajo y de ambos con la escuela activa:

> La fórmula definitiva para ésta (para la educación) sería que el trabajo se llegara a realizar con el mismo sentido deportivo y desinteresado que el juego y que éste tuviera el mismo espíritu creador de valores morales que el trabajo. Tal podría ser la característica esencial de la escuela del trabajo y el juego, es decir de la escuela activa y vital[21].

El material está relacionado con el *principio de actividad* en la enseñanza. Los profesores de Escuela Normal estudiados consideran que para hacer la enseñanza activa, hay que dar «todo el margen posible a [la] actividad sensorial y manual»[22], y coinciden en la importancia de la actividad manual, «comprendida entre el juego y el trabajo manual»[23]. Para conseguir que los aprendizajes sean realmente funcionales, la matemática debe ir asociada con la vida y, en particular, con las otras ciencias y con los trabajos manuales[24].

Esta construcción activa del conocimiento que proclama la nueva pedagogía, requiere igualmente el empleo, incluso la construcción, de materiales de enseñanza. Ello motivó que aquél fuese un momento de gran creatividad en cuanto a propuestas de materiales didácticos, también en matemáticas, que se corresponde con el interés mostrado por los aspectos estéticos de las matemáticas[25], de acuerdo con el principio 27 de la Escuela Nueva: «La Escuela

[21] Luzuriaga, Lorenzo: *La educación de nuestro tiempo*. Losada, Buenos Aires, 1957. Citado en Barreiro, Herminio: «Lorenzo Luzuriaga y el movimiento de la Escuela Única en España. De la renovación educativa al exilio (1913-1959)». *Revista de Educación*, 1989, **289**, pp. 7–48. Cita en p. 29.

[22] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual*. Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?, p. 8.

[23] Eyaralar Almazán, José María: *Metodología de la Matemática*. Reus, Madrid, 1933, p. 200.

[24] Ibídem, p. 190.

[25] Sáiz Salvat habla de la formación estética en varios trabajos y dedica todo un capítulo de su obra metodológica precisamente a esto. Lo titula: «Empleo de las matemáticas para desarrollar el sentimiento estético». Sáiz Salvat, Felipe: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental*. Imp, Mercé, Castellón, 1931.

Nueva debe tener un *ambiente de belleza*»[26].

La influencia de este último principio se manifiesta en las propuestas para la enseñanza de la matemática, cuando se justifica el interés de los problemas de geometría[27], o cuando se insiste en que una de las cualidades del material es que resulte agradable por su aspecto y acabado, «ya que es preciso inculcar el afecto por lo bello y perfecto»[28].

Otro elemento de respuesta a las cuestiones planteadas lo constituyen los temas o aspectos que debían abordarse en la escuela, y sobre los que debía basarse el trabajo. En este sentido, el tercero de los apartados que se enumeran para detallar el undécimo principio, dice así:

> «C) Nada de instrucción enciclopédica basada en conocimientos memorizados, sino capacidad de extraer del medio ambiente y de los libros los elementos para desarrollar desde dentro y desde fuera todas las facultades innatas»[29].

Las recomendaciones de los profesores de matemáticas normalistas se hacen eco de esta idea; Sáiz Salvat, por ejemplo, aclara que en sus clases de primer curso en la Escuela Normal, «los problemas son presentados por el profesor y otros por el alumno en relación a cuestiones de su vida diaria (centros de interés de Decroly) o del porvenir (enseñanza por proyectos)»[30].

Las formas de organizar el trabajo de los alumnos tenían que ver también con las respuestas a las cuestiones planteadas y se plasman en los principios de la nueva educación:

> «16. La Escuela Nueva recurre al *trabajo individual* de los alumnos».

[26] Marín Ibañez, *Los ideales...*, op. cit., p. 27. En la formulación de 1915 éste era el principio número 26: «La Escuela Nueva debe presentar una atmósfera estética y acogedora».

[27] Eyaralar Almazán, José María: *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría. Normas para su planteo y resolución*. Sardá, Guadalajara, 1936, p. 85.

[28] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 215.

[29] Marín Ibañez, *Los ideales...*, op. cit., p. 31.

[30] Sáiz Salvat, Felipe: «El sentido de la Normal». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **25**, pp. 176–177. Cita en p. 176.

> «17. La Escuela Nueva recurre al *trabajo colectivo* de los alumnos»[31].

Los nuevos métodos pedagógicos trajeron nuevos métodos de trabajo, que igualmente pueden considerarse respuestas a las cuestiones planteadas, y comprendían métodos individuales y colectivos. Entre los primeros están los métodos Montessori, Mackinder y el plan Dalton; el método de proyectos o las técnicas Freinet son métodos de trabajo colectivos, mientras que el método Decroly o el sistema de Winnetka contienen elementos de ambos[32]. Muchos de estos métodos fueron descritos y comentados por los profesores normalistas representantes de las corrientes innovadoras en matemáticas y, por ello, encontraremos referencia a los mismos en los siguientes capítulos de esta Memoria.

María del Mar del Pozo reproduce las palabras del pedagogo norteamericano Walter Barnes, en las que se aprecia la confianza en los nuevos métodos y las expectativas generadas alrededor de las nuevas ideas pedagógicas:

> Never in the history of the world since the first school was established have we had a theory and art of teaching, a system of education as effective, as nearly perfect, as that founded and fostered by the new education[33].

Aunque también hay personas que, a pesar de ser grandes defensoras de la nueva educación, no obstante son más críticas con estas nuevas metodologías. Es el caso de María Sánchez Arbós, profesora de Escuela Normal, y después

[31] Marín Ibañez, *Los ideales...*, op. cit., p. 32.

[32] En Carreño, Colmenar, Egido y Sanz, *Teorías e instituciones...*, op. cit., p. 41, se encuentra la relación completa de métodos, clasificados como lo hizo Luzuriaga. Aquí solo hemos citado algunos.

[33] «Nunca en la historia el mundo, desde que se estableció la primera escuela, hemos tenido una teoría y arte de enseñanza, un sistema de educación tan efectivo, tan casi perfecto, como el fundado y fomentado por la nueva educación». Pozo Andrés, María del Mar del: «The transnational and national dimentions of pedagogical ideas: the case of the project method, 1918-1939». *Paedagogica Historica: International Journal of the History of Education*, 2009, **45(4-5)**, pp. 453–693. Cita en p. 564. La cita está tomada de Walter Barnes, «The new education: an interpretation», *Educational Review*, LXIV, 1922, pp. 124-134. La traducción es nuestra.

directora de una escuela primaria en tiempos de la República, quien no cree que la 'espontaneidad' que caracteriza a los métodos de la Escuela Nueva pueda asumirse sin cuestionamiento alguno.

En particular, para el método de proyectos, recogemos las críticas que hubo en el apdo. 7.1.3 (pp. 428 y sig.).

2.1.3. La visión de los profesores normalistas más renovadores respecto a las Matemáticas

En las publicaciones de los profesores normalistas que lideraron las propuestas de reforma en Matemáticas se observa, como ya han apuntado algunos testimonios en el apartado anterior, la influencia de los principios de la Escuela Nueva[34]. Lo vemos en Aurelio Rodríguez Charentón, cuando critica el intelectualismo y el formalismo de la escuela, o cuando apela a la intuición y a la intervención personal del alumno y defiende la importancia de partir de la experiencia de éste:

> Nuestra escuela no ha podido purgarse todavía de aquella tendencia tradicional que le lleva a abusar de la teoría, a moverse en una zona de puro formalismo y formulismo, olvidando no sólo las condiciones mentales del niño, sino el carácter esencial de la función escolar primaria[35].

Margarita Comas insiste en dejar de lado el carácter abstracto de la matemática en la escuela primaria, en favor de una matemática más cercana a las ciencias experimentales[36].

[34]Por supuesto, hubo también profesores de Escuela Normal que rechazaban los presupuestos de la Escuela Nueva y continuaron haciendo propuestas clásicas para las matemáticas, incluso en ocasiones justificaban su rechazo por las nuevas ideas, como ocurrió con Manuel Xiberta, por ejemplo (ver sus valoraciones en p. 324 de esta Memoria).

[35]Charentón, Aurelio Rodríguez: *Metodología de los problemas. Enseñanza razonada de los problemas de Aritmética y Geometría en la Escuela Primaria.* Editorial Instituto Samper, Madrid, 1930, pp. 5-6.

[36]Comas Camps, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría.* Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 5.ª edición, 1932. La primera edición es de 1923.

Del mismo modo se advierte la inspiración de la Escuela Nueva cuando Felipe Sáiz Salvat se refiere a la relación entre la escuela y el mundo exterior:

> El ambiente, la vida del niño, se descompone en dos mundos, el de la escuela y el del hogar que deben estar relacionados ya que la 1.ª es preparación para el mundo y en consecuencia debe iniciar ya aquélla (reducidos al nivel escolar) problemas fundamentales de éste[37].

José María Eyaralar destaca el *interés* como la principal cualidad que ha de tener un problema para que el niño se implique verdaderamente en él; es más, entre el interés directo y el indirecto (recompensa o castigo), opina que solo el directo es verdaderamente pedagógico[38]. Añade:

> Nótese que esta clase de problemas [los que surgen de la Escuela, la casa, el juego o el trabajo manual] implican una relación de la Escuela con la casa; una colaboración del alumno en la organización de la Escuela, y la existencia de juegos escolares y del trabajo manual[39].

Desde la perspectiva de profesores de Escuelas Normales relacionados con los presupuestos de la Escuela Nueva, ¿qué función asignaban a los diferentes dispositivos de enseñanza que se propusieron en este contexto renovador?, ¿qué tipos de dispositivos, materiales o no, recomendaban?, ¿cómo se usaban?

En esta Memoria nos iremos planteando cuestiones como esas y aportando elementos de respuesta. En particular, en el capítulo 7 se analizan algunos de los dispositivos, como los proyectos, el trabajo manual o el juego.

Cualquier cambio significativo en las prácticas docentes se sustenta a su vez en un cambio del modelo epistemológico, en este caso de las matemáticas, que les sirve de base[40]. Del modelo epistemológico de las matemáticas que

[37] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 190.

[38] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit, pp. 12 y 87.

[39] Ibídem, p. 13.

[40] Brousseau, 1987, citado por Espinoza, Lorena; Barbé, Joaquim y Gálvez, Grecia: «Análisis de la tecnología didáctica de profesores que gestionan procesos de enseñanza aprendizaje matemáticos que incorporan TIC en el aula». En: M. Bosch y al. (Eds.), *Un panorama de la TAD*, pp. 321–347. Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona, España, 2011.

subyace en las propuestas que analizamos destaca su carácter experimental –aunque sean una ciencia fundamentalmente deductiva–, la relación con la vida y la importancia de los métodos inductivos y en general de los que implican la acción:

> De las Matemáticas se dice que son Ciencias deductivas y de las Ciencias Naturales se dice que son inductivas. No debe afirmarse tal exclusivismo; tanto unas como otras son, en realidad, inductivas en la invención, deductivas en la demostración[41].
>
> El método exclusivamente deductivo, empleado hasta hace pocos años, ha sido un error. Los matemáticos modernos, tienden –especialmente en las enseñanzas primaria y media– al método inductivo, entre cuyos defensores se encuentran Poincaré, Tannery, Picard, Painlevé, Enriques, Amaldi, Borel, Wenwort, Smit, Rey Pastor, etc.[42]

Sin embargo, los principios de la Escuela Nueva no se adaptan de la misma forma a todas las materias escolares. En particular, los tres apartados que se especifican para el décimo tercer principio, dejan claro qué disciplinas están en la mente de quienes formularon esta teoría:

> A) Observaciones personales de la naturaleza.
>
> B) Observación de las industrias y organizaciones sociales.
>
> C) Ensayos científicos de cultivo, cría de animales y trabajos de laboratorio; trabajos cualitativos en el niño, cuantitativos en el adolescente.

Es decir, los principios de la Escuela Nueva son asumibles prácticamente tal como están formulados, en el caso de las ciencias experimentales y las ciencias sociales, pero no lo son de igual modo cuando se trata de la enseñanza de las matemáticas. La *teoría didáctica*, tan bien adaptada a las ciencias experimentales, inspira también las praxeologías didácticas en matemáticas, pero requiere de una reelaboración desde su epistemología.

[41] Sánchez Pérez, José Augusto: «Cursillo de información metodológica. Grupo de Matemáticas: Conferencias. Metodología matemática». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **92 y 93**, pp. 24–28, 43–47. Cita en p. 26

[42] Ibídem, p. 47.

Este cuestionamiento motiva los frecuentes comentarios encaminados a justificar por qué en matemáticas la aplicación de los principios anteriores requiere establecer algunas diferencias, y precisar los principios de la teoría que está en la base de la praxis didáctica. Es lo que ocurre con la *intuición*, uno de los pilares de los nuevos métodos, pero que, para que sirva a los fines de la educación matemática, requiere una reflexión más profunda[43].

En realidad, las críticas a los métodos de enseñanza asociados a la Escuela Nueva van dirigidas más bien a la manera en que se llevan a la práctica en el caso de las matemáticas, sobre todo cuando se aplican al margen de una reflexión epistemológica e ignorando, por tanto, las características de esta materia y sus diferencias con otras, incluso las que tradicionalmente se consideran más cercanas. Como se pone de manifiesto en el comentario de Eyaralar acerca de lo que había ya ocurrido en la práctica escolar con el método Froebel, por parte de muchos de los maestros que lo seguían: «quitaron al método una de sus más importantes cualidades: la de servir a la espontaneidad infantil, transformándolo en una serie de ejercicios en que el niño se limitaba a seguir, con más o menos agrado, al maestro...»[44].

No cabe duda de que José María Eyaralar es uno de los profesores normalistas que asumen los principios e ideales de la Escuela Nueva: la importancia concedida a la *intuición*, la *acción* con materiales, el *interés* del niño (avivado –entre otras cosas– por los juegos y en general las actividades de carácter lúdico), etc. El título de uno de los epígrafes del libro *Metodología de la Matemática*, «Cómo hacer la enseñanza agradable, activa e intuitiva», es bastante representativo. Es más, incluso reclama para esta materia una mayor atención que en el resto a los nuevos medios pedagógicos:

> La necesidad de recurrir a los medios pedagógicos que hagan esta enseñanza grata y educativa, con el mayor cuidado y el máximo interés, siendo, por lo tanto, el estudio de estos medios pedagógicos de la más alta importancia, mucho mayor que en aquellas otras disciplinas como la Geografía y la Historia o las Ciencias Naturales que tienen

[43] En la sección 8.2 (pp. 537 y sig.) analizamos la percepción de los profesores normalistas encargados de las matemáticas acerca de los límites de la intuición en su aprendizaje y enseñanza

[44] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 244.

> para el niño mayor atractivo, utilizan mayor número de actividades y desenvuelven facultades que aparecen dentro de la edad escolar[45].

No obstante, advierte, refiriéndose a las escuelas nuevas: «La enseñanza metódica que la Matemática requiere no se compagina muy bien con el carácter de estas escuelas»[46]. Y del método Decroly, uno de los más valorados entonces, también por este autor –lo había visto aplicar en algunas escuelas maternales en Francia[47]–, destaca su importancia, precisamente «porque representa algo intermedio, tal vez una solución armónica entre la enseñanza clásica por materias separadas, que es la más adecuada para la matemática por sí misma, y *la enseñanza puramente ocasional a que tienden las escuelas nuevas*»[48]. A pesar de lo cual señala que «del método en cuestión conviene tomar algunos procedimientos y sugestiones, pero [...] su principal mérito no reside en el aspecto parcial de la enseñanza de la Matemática»[49].

Curiosamente Lorenzo Luzuriaga –gran difusor de la Escuela Nueva en España– también había expresado sus reservas hacia algunos aspectos del método Decroly, sobre todo para el aprendizaje del cálculo (en general de las técnicas de lectura, escritura y cálculo)[50].

Otro tipo de restricciones que se tenían en cuenta eran las institucionales que, aunque situadas en un nivel superior al de la *Disciplina*, afectaban en particular a las matemáticas. En el caso de la enseñanza primaria, está la necesidad de compaginar la nueva pedagogía con las condiciones de las escuelas primarias españolas de la época: con escasos recursos pero, sobre todo, no graduadas la mayoría y con excesivo número de alumnos.

Por ello Margarita Comas considera que deben alternar y convivir los métodos de trabajo individuales (Winnetka[51], Dalton, Mackinder) y los colectivos (como el de proyectos[52]):

[45] Ibídem, p. 159.

[46] Ibídem, p. 254.

[47] Eyaralar Almazán, José María: «La enseñanza de las Matemáticas en las escuelas francesas». En: *Anales de la JAE*, tomo XIX, pp. 1–96, 1924.

[48] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 251-252 . La cursiva es nuestra.

[49] Ibídem, p. 254.

[50] Luzuriaga, Lorenzo: «El juego y el trabajo en la educación». *Revista de Pedagogía*, 1929, **93**, p. 414.

[51] A diferencia de Luzuriaga, Comas considera el método Winnetka individual.

[52] El método de proyectos en relación con las matemáticas está tratado en el apartado

> En nuestras escuelas es particularmente interesante la preparación de esta labor individual, porque si bien es quizá pronto para adoptar el sistema en su totalidad, pues hay que perfeccionar antes la educación social que es un contrapeso indispensable, resulta que parcialmente es innecesaria y en una forma o en otra se viene aplicando desde muy antiguo, porque teniendo con mucha frecuencia el maestro gran número de alumnos de todas edades y condiciones, se ve precisado a dejar que unos trabajen solos mientras él se ocupa de otros[53].

Una de las ventajas que pone de manifiesto esta profesora sobre el material asociado al método Mackinder es que podría resolver para las escuelas rurales, e incluso urbanas, el problema de la falta de graduación. La consideración de la situación española le lleva a hacer otras recomendaciones, en las que se vuelve a apreciar la influencia de factores situados en los niveles *Escuela* y *Sociedad*. Concretamente recomienda implantar el método individual de manera gradual, pensando en la reacción de las familias y de la inspección, las cuales, acostumbradas a los métodos memorísticos, podrían ver en estos nuevos métodos una manera de que el maestro eluda parte de su trabajo[54].

De hecho, en el método Mackinder, exponente típico del trabajo individual, la propia Margarita Comas reconoce que «en realidad, las únicas enseñanzas individualizadas son la lectura, escritura y el cálculo, y aun en este último se junta siempre que es posible un grupo de niños para la introducción de cada nueva regla»[55].

María del Mar del Pozo opina que, respecto a los métodos de la Escuela Nueva, en España «se copiaron, se glosaron, se tradujeron y se calcaron los planteamientos teóricos y metodológicos diseñados por los pedagogos extranjeros» y la mayoría de los educadores «se limitaron a imitar admirativamente a unos pocos representantes de la Nueva Educación, siguiendo al pie de la letra sus escritos»[56], tal como se reconocía ya en publicaciones de la época: «No

7.1.4, (pp. 434 y sig.).

[53]Comas Camps, Margarita: *Metodología de la Aritmética y la Geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1932, pp. 6-7. La cursiva es nuestra.

[54]Comas Camps, Margarita: *El método Mackinder*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1930 Capítulo VII.

[55]Ibídem, p. 12.

[56]Pozo Andrés, María del Mar del: «La Escuela Nueva en España: crónica y

se sabe otra cosa que rezar mecánicamente pasando las cuentas del rosario formado con Decroly, Claparède, Winnetka, Howard, Parkhurst, Montessori, Dewey... Falta el sentido crítico, la confianza en nosotros mismos»[57].

No obstante, algunos profesores normalistas, al menos en el campo de la matemática, a la vez que describían en sus obras estos métodos e integraban muchas de sus orientaciones en sus propuestas, reconocían la necesidad de un análisis más sereno y sobre todo más fundamentado, también desde la propia disciplina, que superara la «pasión por lo nuevo»[58] de la que habla la autora citada, y situara los métodos y las técnicas innovadoras en su contexto, reconociendo que una labor integradora no es lo mismo que una simple imitación[59].

Así, Eyaralar, en el epígrafe titulado «La Matemática en las Escuelas Nuevas», señala que «la apelación a la *experiencia individual* y la relación íntima con la *sociedad*, pueden ser ocasión de métodos y procedimientos que no variarán gran cosa los expuestos por nosotros»[60], y aclara que el contenido de su asignatura se estudia partiendo de problemas de la vida extraescolar y del trabajo manual. Respecto a los materiales asociados a algunos de los métodos, comenta:

> En esencia está reducido [el material Mackinder] al material recomendado por nosotros aumentado con sus soluciones. Así, por ejemplo,

semblanza de un mito». *Historia de la Educación*, 2003-2004, **22-23**, pp. 317–346. Cita en p. 343.

[57] «Notas. Actitud crítica», Escuelas de España, 3 (1934), p. 37. En: Pozo Andrés, *La escuela nueva...*, op. cit., p. 343.

[58] Ibídem p. 339.

[59] Aunque aquí nos ocupamos de los profesores de Matemáticas de las Escuelas Normales, hubo otros profesionales destacados del magisterio que advertían de la necesidad de tener en cuenta las característica de la propia disciplina matemática. En el libro escrito por Juan Francisco García, Norberto Herranz y Francisco Bayón (estos dos últimos cofundadores, junto a Pablo de Andrés Cobos, de la revista *Escuelas de España*), señalan que, además de la mentalidad del niño y el ambiente local, las matemáticas infantiles no pueden desatender el encadenamiento lógico de las ideas y la aplicación de los principios matemáticos a la práctica. García, Juan Francisco; Hernanz, Norberto y Bayón, David: *Programas escolares graduados. LETRAS Y CIENCIAS. Con instrucciones didácticas para su desarrollo.* Yagües, Madrid, 1932, p. 82.

[60] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p.254.

> nosotros proponemos tiras de bolas o de botones que se hacen corresponder con cifras escritas en tarjetas, y Mac Kinder presenta además cuadros con las soluciones, y otras veces apela a la obtención directa del resultado mediante la manipulación de objetos. Análogo a él es el método Winnetka[61].

Si bien es cierto que no siempre las personas son conscientes de las influencias recibidas o de cómo han contribuido a conformar sus ideas y a elaborar las propuestas que se desprenden de ellas, y que la pérdida de ese rastro puede llevar a ignorar o a minimizar el papel de dichas influencias[62], lo cierto es que en Eyaralar, alguien comprometido con la renovación pedagógica sobre todo en el ámbito de las matemáticas, no hay una asunción acrítica de todos los principios y métodos nuevos, que este profesor normalista no aceptaba como simples «modas pedagógicas»[63].

Por ejemplo, con relación a los métodos individuales cuestiona la utilidad de algunas de las series graduadas de ejercicios con soluciones, utilizadas en ciertas escuelas nuevas americanas para la enseñanza del cálculo, que califica de robinsonianas:

> Precisamente la ayuda del maestro sirve para abreviar el camino siempre largo y penoso de la *propia experiencia*, y no creemos que se gane gran cosa aislando excesivamente al maestro del alumno y sustituyendo la acción consciente y adaptada de éste por la mecánica de un libro de *test* por muy bien hechos que estén. La orientación es excelente, pero creemos que ha sido llevada a la exageración[64].

Margarita Comas, defensora del método Mackinder, sobre el que escribe un libro del mismo título, dedica un capítulo a hacer una crítica reflexiva

[61] Ibídem, p. 255.

[62] Eyaralar recomienda, en su obra *Metodología de la Matemática*, materiales que había visto usar en algunas escuelas maternales francesas, inspirados en el método Decroly, aunque antes de la estancia en ese país ya había demostrado gran capacidad de reflexión sobre la matemática y su enseñanza. Lo comentaremos en el apartado 2.5.1, pp. 112 y sig.

[63] Esta expresión está aquí utilizada en el sentido expuesto en Chevallard, Yves; Bosch, Marianna y Gascón, Josep: *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. I.C.E Universitat Barcelona and Horsori, Barcelona, 1997.

[64] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 256.

de este método, y otro a comentarlo en relación con las escuelas españolas. Reconoce que es un método que tiene la ventaja de organizar el trabajo individual en una etapa posterior a la del parvulario (para la que existen los métodos Froebel y Montessori) y anterior al final de la primaria y secundaria (para la que se adapta el plan Dalton). Pero advierte, asimismo, que sus ventajas están sobre todo en la aplicación al aprendizaje de la lectura, la escritura y el cálculo; es decir, «instrumentos para la adquisición del saber, no del saber mismo»[65]. Reconoce, pues, que se trata de un material para el aprendizaje, o la práctica sobre todo, de las técnicas, y en el caso de las matemáticas, de las técnicas de cálculo.

La postura que adoptaron en particular los profesores de matemáticas normalistas más renovadores y con mejor formación –también matemática–, que eran a su vez los más partidarios de las ideas de la Escuela Nueva, ante los principios y los métodos que ésta introdujo, se resume en estas palabras de Margarita Comas:

> Nada más lejos del dinamismo de los tiempos modernos que la adopción servil de un método, por bueno que sea, pues todos ellos pierden su eficacia en cuanto pasan a ser una cosa muerta, una especie de patrón, de molde. [...] una vez hallada la idea, conviene que cada maestro tenga en cuenta las condiciones de su escuela y las suyas propias[66].

A ello habría que añadir, como indican estos profesores, que se tuvieran en cuenta las características de las matemáticas.

2.2. La Institución Libre de Enseñanza y la renovación educativa

Cuando el ministro de Instrucción Pública de la Restauración Borbónica se pronunció en contra de la libertad de cátedra, se creó un gran descontento en un grupo de profesores entre los más destacados del profesorado secundario y universitario. Así surge la *Institución Libre de Enseñanza* (ILE),

[65] Comas Camps, *El método Mackinder*, op. cit., p. 94.
[66] Ibídem, p. 109.

constituida en Madrid en 1876, e impulsada por Francisco Giner de los Ríos, uno de los firmantes de sus estatutos, que dejan claro que la Institución

> es completamente ajena a todo espíritu e interés de comunión religiosa, escuela filosófica o partido político; proclamando tan solo el principio de la libertad e inviolabilidad de la ciencia y de la consiguiente independencia de su indagación y exposición respecto de cualquiera otra autoridad que la de la propia conciencia del profesor, único responsable de sus doctrinas (Art. 15.º)[67]

Giner de los Ríos estuvo siempre vinculado a la Institución Libre de Enseñanza como profesor, como rector o como director de la revista de la Institución, el *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza* (BILE), fundada en 1877:

> La Institución no es Giner, pero no se entiende sin Giner. De ahí que la influencia de éste último llegue por vía personal o institucional, de forma directa o difusa, a personas, actividades e instituciones docentes de signo ideológico liberal e incluso próximas al socialismo, a través sobre todo de organismos y centros creados y controlados por institucionistas[68].

El ideario que compartían los profesores que fundan e integran la ILE es la filosofía krausista, «aunque no tardase en difuminarse y quedar asumida por el espíritu institucionista»[69], y su objetivo último era la reforma de la sociedad por medio de la educación. Esta corriente filosófica, y los movimientos internacionales del Higienismo y la Escuela Nueva (de la que la Institución es un precedente) forman el contexto en el que hay que enmarcar a la Institución Libre de Enseñanza. En un principio iba a ser una 'universidad libre' con un centro de segunda enseñanza anexo, pero finalmente –por motivos de

[67] «Estatutos de la Institución Libre de Enseñanza». *BILE*, 1877, **1(11)**, pp. 61–63.

[68] Viñao Frago, Antonio: «Francisco Giner de los Ríos. Educación, pedagogía y reforma social». En: Manuel Esteban Albert y Juan Sáez Carreras (Eds.), *Pensadores de ayer para problemas de hoy... Teóricos de las ciencias sociales*, pp. 41–62. Nau Llibres, Valencia, 2013. Cita en p. 47.

[69] Capitán Díaz, Alfonso: *Educación en la España Contemporánea*. Ariel, Barcelona, 2000, p. 85.

financiación– fue un centro en el que se estudiaba desde la educación infantil hasta el bachillerato.

Los principios fundacionales de la Institución son: la fe en la educación como instrumento para regenerar al hombre y a toda la sociedad, la neutralidad filosófica, política y religiosa –la libertad de ciencia y cátedra–, el europeísmo y el gradualismo[70]. Junto a los principios citados hay otros de carácter más pedagógico. El primero defiende que la educación debía ser integral, contemplar las dimensiones intelectual, afectiva, estética y físico-corporal; una educación por tanto general, enciclopédica y universal. En palabras del propio Giner:

> A difundir este sentido universal, educador e íntimo, que no tiende a instruir, sino en cuanto la instrucción puede cooperar a formar hombres, aspira con sincero esfuerzo la Institución libre, de cuyo pensamiento quisiera en esta hora ser fiel órgano [...].
>
> La Institución no pretende limitarse a instruir, sino cooperar a que se formen hombres útiles al servicio de la humanidad y de la patria[71].

Los otros dos son el principio de actividad (alentar la iniciativa del niño para que 'investigue' y descubra relaciones) y el de intuición (no reducida al experimentalismo, en ninguna de sus manifestaciones) que implican que el alumno investigue, que se cuestione los hechos y las razones, que argumente.

El *reformismo gradual*, uno de los que hemos señalado como rasgos básicos de este modelo, se concreta en aspectos más específicos[72]:

- Introducción gradual de las reformas, según identificación de los profesores con ellas y según su formación. En este sentido decía Giner,

[70] Viñao Frago, *Francisco Giner...*, op. cit.

[71] Giner de los Ríos, Francisco: «Discurso de apertura del curso 1880-81 en la Institución Libre de Enseñanza», 1880. `http://www.tiempodehistoria.com/opinion/recordando-el-discurso-de-apertura-del-curso-1880-81...` Consultado el 10-10-2015.

[72] Viñao Frago, Antonio: «Las innovaciones educativas». En: José García Velasco y Antonio Morales Moya (Eds.), *La Institución Libre de Enseñanza y Francisco Giner de los Ríos: nuevas perspectivas. 2. La Institución Libre de Enseñanza y la cultura española*, pp. 420–435. Fundación Francisco Giner de los Ríos (Institución Libre de Enseñanza) / Acción Cultural Española, Madrid, 2013.

recordando a Saavedra Fajardo: «El vaso de vidrio, formado de un soplo, otro soplo lo rompe. Las obras lentas son las duraderas. Ojalá esta nación lo comprenda algún día»[73].

- Envío de profesores al extranjero. El Decreto de 18 de julio de 1901, de Romanones, sobre la concesión de pensiones para ir al extranjero a ampliar estudios, reproduce varios párrafos de las «Bases generales» del programa que llevó Cossío –director del Museo Pedagógico– en 1899 a la Asamblea nacional de Productores, en Zaragoza[74]. La primera de las Bases se refiere a la necesidad de enviar a la mayor cantidad posible de personas a formarse al extranjero.

- Supresión de oposiciones, en favor del acceso directo desde las instituciones formativas. Giner apostaba por que en lugar de concentrar los esfuerzos en 'elegir' al profesorado, se tratara de 'formar' al profesorado.

- No imponer las reformas por la vía de leyes o decretos, sino por la creación de instituciones docentes de reforma y ensayo, para formar a los profesores. En todo caso, reformas legales de apariencia poco relevante, pero efectivas.

En definitiva, para Giner y para los institucionistas el elemento crucial de la enseñanza es el profesor: «Dadme el maestro y os abandono la organización, el local, los medios materiales; cuantos factores, en suma, contribuyen a auxiliar su función. Él se dará arte para suplir la insuficiencia o los vicios de cada uno de ellos»[75]. Por ello, en la formación de profesores deben concentrarse todos los esfuerzos. Los maestros y en general los profesores aparecen como el motor de la *educación nacional*. La educación fundamental del profesor debe comprender una completa educación general (formación integral como persona), una formación científica específica, amplia y actualizada, y una preparación pedagógica, las cuales no han de ser necesariamente correlativas. La institución que entendían que debía proporcionar esa formación

[73] Giner de los Ríos, *Discurso de apertura...*, op. cit.

[74] Ruiz Berrio, Julio: «Aportaciones de la I.L.E. a la formación universitaria del profesorado». *Revista Complutense de Educación*, 1993, **4(1)**, pp. 209–232.

[75] Giner de los Ríos, *Discurso de apertura...*, op. cit.

a los profesores de cualquier nivel era la Universidad, y reclamaron siempre que fuese en ella donde se adquiriese la formación pedagógica[76].

En el plano metodológico, didáctico y organizativo, los pilares básicos de la propuesta educativa institucionista son: la escuela única y el carácter cíclico de las enseñanzas (la enseñanza secundaria ha de ir ligada a la primaria, los únicos niveles de enseñanza que pueden distinguirse son la educación llamada «general» y la «especial o profesional» que prepara para ejercer una profesión); una educación que atienda a los ámbitos científico, físico, estético y moral; el papel de los juegos y los trabajos manuales; la trascendencia de las excursiones, las visitas, los museos y colonias escolares; el rechazo de los libros de texto, sustituidos por libros de lectura y cuadernos de clase; la supresión de castigos y de exámenes en favor de la motivación intrínseca; y la importancia de la oralidad, en sentido socrático.

El ideal educativo de la Institución Libre de Enseñanza abarca también aspectos institucionales como los edificios escolares (la arquitectura, el mobiliario y material de la escuela constituían temas de interés para los institucionistas); las escuelas al aire libre; un nuevo modelo organizativo, la *escuela graduada* y la educación popular. Esta última comprendía la educación de la mujer, las conferencias y cursos de extensión universitaria y las «misiones pedagógicas»; las 'misiones ambulantes' propuestas por Cossío fueron un antecedente de las Misiones Pedagógicas creadas durante la época republicana.

Entre los congresos y publicaciones promovidos o respaldados por la Institución, están el Primer Congreso Nacional de Pedagogía (Madrid, 27 de mayo al 2 de junio de 1882), al que asistió incluso Alfonso XII, y el Congreso Pedagógico Hispano-Luso-Americano-Filipino (1892) (con carácter internacional y 2000 asistentes): en ambos hubo una sección para la enseñanza primaria y las Escuelas Normales; y el *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza* (B.I.L.E.), así como numerosos cursos y conferencias, entre las que destacan las de Extensión Universitaria de la Universidad de Oviedo.

Los frutos de la Institución –directos o indirectos– los podemos ver en prácticamente cualquier iniciativa educativa o cualquier propuesta innovado-

[76] Ruiz Berrio, *Aportaciones de la ILE...*, op. cit.

ra de finales del siglo XIX y primer tercio del XX. Por citar los más relevantes: el Museo Pedagógico Nacional[77] (1882), la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (1907) y las instituciones dependientes de ella, el Instituto-Escuela (1918) y la Residencia de Estudiantes (1910), y la Escuela Superior del Magisterio (1909). Todas ellas claves en un modelo de reforma como el institucionista, basado sobre todo en la *formación de profesores*.

Las reformas educativas que tuvieron lugar durante la II República tampoco eran ajenas al espíritu de la Institución Libre de Enseñanza; a nadie se le escapaba que la labor de los institucionistas estuvo detrás del Plan profesional del Magisterio primario de 1931. Así, Ángel Llorca recuerda que el segundo ministro de Instrucción Pública, Fernando de los Ríos, es una de las personalidades más destacadas de la Institución:

> Triunfa la República. En el Ministerio de Instrucción Pública, en los despachos en donde reside el pensamiento creador de una nueva España, aparecen los retratos de D. Francisco y del Sr. Cossío. [...]
>
> No hace muchos días me decía el subsecretario de Instrucción Pública, enseñándome un delicioso retrato de D. Francisco, colocado enfrente de la mesa de trabajo de su despacho: «Antes de resolver los asuntos difíciles nunca dejo de mirarle»[78].

Se puede afirmar que en la España del último cuarto del siglo XIX y el primer tercio del siglo XX «solo existió un modelo coherente de reforma del sistema educativo en su conjunto, que, por tratarse de un proceso de reforma a largo plazo, mereciera tal nombre: el de la Institución»[79].

2.2.1. Las matemáticas en la revista de la Institución Libre de Enseñanza

El *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza* (B.I.L.E.) publicó más de 4000 artículos, en los 920 números editados a lo largo de 60 años, entre

[77] La denominación original era Museo Pedagógico de Instrucción Primaria.

[78] Llorca García, Ángel: «A nuevo Estado, nueva escuela. La escuela de la República española». *Revista de Pedagogía*, 1932, **125**, pp. 215–223. Cita en pp. 217-218.

[79] Viñao Frago, *Las innovaciones educativas*, op. cit., p. 434.

1877 y 1936; de ellos 46 tienen contenido matemático. El B.I.L.E. constaba de tres secciones: *Pedagogía* (a partir de 1889 se llamó *Educación y Enseñanza*), *Enciclopedia* e *Institución*; la mayoría de las contribuciones o trabajos corresponden a la primera sección.

De los 46 trabajos de matemáticas, 38 corresponden a artículos originales, de los cuales 27 son resúmenes de enseñanzas (cursos de matemáticas, lecciones), 9 artículos teóricos y únicamente 2 sobre la enseñanza de las matemáticas[80]: «La enseñanza de la aritmética en las escuelas», de José Lledó, y «Algunas indicaciones sobre la enseñanza de la geometría», de Germán Flórez, ambos anteriores a 1890, de 1882 y 1883, respectivamente.

El artículo de Lledó trata de la necesidad de hacer más empírico el estudio de la aritmética, por medio de materiales construidos por los propios alumnos y juegos matemáticos. Es el contenido de una conferencia pronunciada por su autor en la Institución. El trabajo de Flórez aboga por el empleo de formas concretas para el estudio de la geometría, concretamente propone el uso de material extraído de la naturaleza y de cuerpos geométricos construidos por los propios alumnos. Dieciséis años antes, entre los materiales presentados a la Exposición Universal de París en 1867, había sido premiada la *Colección de sólidos geométricos*, de Francisco Sobrino Iglesias, director de la Escuela Normal de Santiago de Compostela, «por su excelente ejecución, porque puede hacérselos el mismo Maestro y por su baratura si se construyeran para el comercio»[81].

De los ocho trabajos relacionados con las matemáticas aparecidos en otras publicaciones y reproducidos en el *Boletín*, hay dos teóricos y el resto son de

[80] Núñez Espallargas, José María y Servat Susagne, Jordi: «La matemática en la Institución Libre de Enseñanza: concepciones teóricas y pedagógicas». *Llull*, 1988, **11(20)**, pp. 75–96.

[81] «Exposición Universal de 1867. Carta VII». *Anales de Primera Enseñanza*, 1867, **IX**, pp. 421–430. Cita en p. 426.

En aquellos años debían usarse tan escasos materiales para la geometría y eran tan valoradas las colecciones de sólidos, que en la instrucción del Príncipe de Asturias consta el uso de este tipo de material, concretamente una colección de sólidos que incluye los cinco regulares, que podían descomponerse en pirámides. Sánchez Jiménez, Encarna: *La introducción de la geometría en la enseñanza primaria (1838-1868)*. Memoria para obtener el diploma de estudios avanzados, Universidad de Murcia, Murcia, 2006, p. 59. Trabajo inédito.

carácter pedagógico. De éstos, uno es de 1899, «La génesis de la geometría en la raza y en la educación individual», de B. Branford, y los otros 4 están publicados en el siglo XX: «Pedagogía matemática», de José Mur y Ainsa (hay dos partes), «La enseñanza matemática en los institutos normales», de Félix Pernot, «Valor educativo de la enseñanza de la matemática», de Julio Rey Pastor y «El estudio de la matemática», de Bertrand Russell, aparecidos en 1910, 1919, 1930 y 1931, respectivamente.

Brandford pretende establecer el paralelismo entre el desarrollo histórico de la geometría y el de su enseñanza. Los trabajos de Mur y Ainsa defienden una matemática más basada en la experimentación, al estilo de las enseñanzas francesa y alemana. Insiste en la necesidad de utilizar materiales –entre ellos los modelos construidos en madera– para la enseñanza de la geometría. El artículo de Pernot incluye el programa de geometría de un instituto normal francés. Bertrand Russell defiende la introducción de la lógica simbólica en la enseñanza.

Por último, el artículo de Rey Pastor, que publicó *La Escuela Moderna* en mayo de 1931[82], trata sobre lo que ha de ser el estudio de las matemáticas en la segunda enseñanza –relacionar las matemáticas con las ciencias de la Naturaleza y desarrollar el razonamiento, pero sin sacrificar la intuición a un rigor excesivo para el alumno– y sobre el método heurístico, que opone al socrático:

> El método heurístico es algo más que el método socrático [...] Tampoco se reduce la participación de los educandos a sacar ellos mismos las conclusiones de las premisas silogísticamente preparadas por el docente, en sucesión agotadora que oculte el hilo conductor del razona-

[82] Rey Pastor, Julio: «Valor educativo de la enseñanza de la matemática». *La Escuela Moderna*, 1931, **476**, pp. 203–214. Originalmente fue publicado en la revista Nueva España, en enero de 1930, según Núñez Espallargas y Servat Susagne, *La matemática en la ILE...*, op. cit.

Una versión reducida –la primera mitad– de ese mismo artículo se publica en 1933 en la revista *Matemática Elemental*, con otro nombre: Rey Pastor, Julio: «Panorama de la enseñanza matemática». *Gaceta Selecta. Antología de las revistas publicadas por la RSME en sus cien primeros años. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15(1) (suplemento)**, pp. 141–144. Originalmente publicado en la revista Matemática Elemental, 1.ª serie, tomo II, 1933, pp. 17-20.

> miento, hasta llegar a la ansiada meta del c. s. q. d., no con la alegría de conocer algo nuevo, sino con la satisfacción de terminar un viaje aburrido, impuesto como obligación, hasta una ciudad ya conocida, donde no se tienen afectos ni intereses. El alumno, en el método heurístico, no comprueba o *demuestra* las verdades que el profesor enuncia, sino que las *descubre* alegremente; pues no es la posesión de los bienes, sino su *adquisición*, lo que depara al hombre las más puras satisfacciones.

El artículo comienza por establecer la finalidad del estudio de la enseñanza de la matemática en la enseñanza secundaria. El fin, antes formativo que propedéutico, que asigna a este último grado de la enseñanza no universitaria, está cercano a esa enseñanza 'general' (aún no profesional) que propugnan Giner y la Institución:

> Durante mucho tiempo se ha considerado la segunda enseñanza como preparatoria para la universidad; hoy se propende más bien a la formación de hombres cultos, con esa cultura general tan difícil de definir en términos precisos, que se compone de las antiguas humanidades y de esas modernas humanidades que se llaman ciencias exactas y naturales. Ya no se considera en casi ningún país como enseñanza informativa, sino formativa [...]
>
> Reducir la segunda enseñanza al mínimo de conocimientos indispensables para que cada alumno pase inmediatamente a adiestrarse en la profesión elegida, es fraccionar la Humanidad en grupos y subgrupos de obreros, muy dueños de su técnica, pero que no pueden entenderse, porque hablan idiomas diferentes y nada común tienen que decirse[83].

2.3. La Junta de Ampliación de Estudios y la renovación de la matemática

La *Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas* (JAE) se creó por un Real Decreto, en 1907. El preámbulo del RD comienza así:

> El más importante grupo de mejoras que puedan llevarse á la instrucción pública, es aquel que tiende por todos los medios posibles á

[83] Rey Pastor, *Valor educativo...*, op. cit., pp. 203-204.

> formar el personal docente futuro y dar al actual medios y facilidades para seguir de cerca el movimiento científico y pedagógico de las naciones más cultas[84].

Las funciones principales de la JAE eran impulsar los intercambios de investigadores y profesores con otros países, la investigación en España y el desarrollo de instituciones educativas. Para ello concedió pensiones en el extranjero, (y en España, por ejemplo, para asistir a congresos y reuniones científicas), envió delegados a congresos científicos, organizó viajes colectivos de estudio (muchos maestros viajaron en grupo, dirigidos con frecuencia por un inspector), creó centros de ampliación de estudios (como el Centro de Estudios Históricos y el Instituto Nacional de Ciencias Físico-Naturales, que comprendía varios centros, entre ellos el Laboratorio-Seminario Matemático) y también instituciones educativas, como la Residencia de Estudiantes y el Instituto-Escuela. Asimismo organizaba Cursos para Extranjeros.

Su primer presidente fue Santiago Ramón y Cajal y la función de secretario la desempeñó José Castillejo desde 1907 hasta 1934. Entre los 21 vocales figuraban José Echegaray y Leonardo Torres Quevedo, matemáticos e ingenieros.

Según Antonio Viñao[85] la JAE, con su actuación para fomentar las relaciones con el extranjero y la formación y la actualización del profesorado, fue la agencia de renovación pedagógica y científica más importante, aunque no la única, en la llamada Edad de Plata de la cultura española. Una de sus características fue la relación estrecha entre investigación y docencia; era habitual que en sus centros de investigación se recibieran e impartieran cursos o seminarios de manera más o menos regular. Además, el artículo 47 del Re-

[84] Preámbulo del Real Decreto de 11 de enero de 1907, creando la *Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas*. Facsímil incluido en: Sánchez Ron, J.M. (Ed.): *1907-1987. La Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas 80 años después*, tomo I. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1988, pp. 296-297. Cita en p. 255.

[85] Viñao Frago, Antonio: «Pedagogía y experiencias educativas en la JAE: Revisión historiográfica y nuevos enfoques». En: J.M. Sánchez Ron y J. García Velasco (Eds.), *100 JAE. La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas en su centenario*, tomo II, pp. 597–635. Fundación Francisco Giner de los Ríos y Publicaciones de la Residencia de Estudiantes, Madrid, 2010.

glamento aprobado en 1910 establece que «La Comisión ejecutiva estudiará el modo de proteger las instituciones educativas en la enseñanza secundaria, superior y especial»[86]. El principal centro de carácter educativo que dependía enteramente de la JAE fue el Instituto-Escuela de Madrid.

La Junta, en su interés por promover la investigación científica, fomentó el estudio de las materias científicas a la par que las humanísticas. Las matemáticas, junto con la física, la química y las ciencias en general, son áreas de conocimiento que la Junta considera esenciales[87]. En el caso de la Matemática, y en lo referente al progreso de la propia ciencia en España, la JAE ejerció una influencia decisiva. Puede decirse que todas aquellas personas que realizaron investigación matemática, o que divulgaron los avances de la matemática más actual que se hacía en Europa, estaban más o menos relacionadas con la JAE, y a partir de su creación, con el Laboratorio Matemático o con personas vinculadas a este organismo.

En la época anterior Zoel García de Galdeano, catedrático de la Universidad de Zaragoza, había dirigido (incluso costeado personalmente) la primera revista de matemáticas española, *El Progreso Matemático*, editada en Zaragoza. En su segunda etapa, a partir de 1899, colaboró en esta revista José Gabriel Álvarez Ude, que más tarde sería una persona decisiva en el Laboratorio Matemático. A esta revista seguirían algunas otras, en las que también publicaron autores españoles y extranjeros, aunque el problema de la falta de visibilidad y de representatividad de la matemática en el panorama científico y universitario español seguía pendiente[88].

[86] Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes: «REGLAMENTO por el que ha de regirse la Junta para ampliación de estudios é investigaciones científicas». *Gaceta de Madrid*, 1910, **28**, pp. 198–200. `http://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1910/028/A00198-00200.pdf`. Consultado el 10-10-2015. Cita en p. 200.

[87] Romero de Pablos, Ana: «Ampliación de espacios y saberes para la ciencia en España: la física, la química y las matemáticas en la JAE». En: José Manuel Sánchez Ron; A.Q. Lafuente; A Romero y L. Sánchez de Andrés (Eds.), *El laboratorio de España. La Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas 1907-1939*, pp. 264–297. Sociedad Estatal de Conmemoraciones Culturales. Publicaciones de la Residencia de Estudiantes, Madrid, 2007.

[88] González Redondo, Francisco A.: «Las revistas de la Real Sociedad Matemática Española, 1911-2011». *Gaceta Selecta. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15 (1) (suplemento)**, pp. 9–36.

Ya casi paralelamente a la creación de la JAE comenzaron algunas iniciativas en pro de sacar a la matemática española del atraso y del aislamiento en que se encontraba. En 1908 se creaba en España la *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias* que propició, durante su congreso fundacional en Zaragoza, la primera reunión de matemáticos españoles celebrada en España. Al amparo de esta asociación se crearía la *Sociedad Matemática Española* que publicaría, a partir de 1911, su propia revista. En 1915, año de la creación del Laboratorio Matemático, los redactores de esta Revista escribían:

> Estamos muy mal los españoles, en general, y salvo honrosísimas excepciones, de conocimientos matemáticos; mal que tiene sus raíces en la propia Escuela primaria; para cerciorarse de lo cual basta comparar en las oposiciones de maestros ó de maestras, los ejercicios que versan sobre matemáticas con todos los otros ejercicios, en los cuales se notará una gran superioridad respecto de aquéllos; raíces que se extienden luego por todo nuestro organismo social[89].

Algunas personas relacionadas con la revista, bien en el comité de redacción, bien como autores o revisores de trabajos, como Octavio de Toledo, Esteban Terradas, Julio Rey Pastor, José Gabriel Álvarez Ude o Jose María Plans, entre otros, tendrían importantes relaciones con la JAE. A partir del curso 1917-18 la revista dejaría de publicarse y sería sustituida poco después por la *Revista Matemática Hispano-Americana*, «publicada bajo los auspicios de la Sociedad Matemática Española y del Laboratorio-Seminario Matemático»[90].

Hasta la creación del Laboratorio Matemático la acción de la JAE en cuanto a la matemática se ejercía a través de las pensiones concedidas; por ejemplo fueron pensionados en 1908 Terradas, en 1909 Álvarez Ude, entre 1909 y 1914 Rey Pastor; en 1910 García de Galdeano obtuvo una ayuda

[89] «A nuestros lectores». *Gaceta Selecta. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15(1) (suplemento)**, pp. 58–67. Originalmente publicado en la Revista de la Sociedad Matemática Española, Tomo V, n.º 41, octubre de 1915. Cita en p. 61.

[90] «Revista Matemática Hispano-Americana. Portada». *Gaceta Selecta. Antología de las revistas publicadas por la RSME en sus cien primeros años. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15 (suplemento)**, p. 72. Originalmente publicado en la Revista Matemática Hispano-Americana. Portada. Serie 1.ª, Tomo II, (1920).

de la JAE para asistir a la reunión de la Comisión Internacional para la Enseñanza de la Matemática. A partir de 1915 la acción de la JAE en lo relativo a la matemática propiamente dicha estuvo ligada al Laboratorio y Seminario Matemático.

En 1926 la JAE concedió la equiparación de pensionado a Pedro Puig Adam. El International Education Board invitó al presidente de la JAE a que designara a un joven español especializado en matemáticas para ir a Munich durante un año para formarse. La Junta trasladó la petición al Laboratorio de Matemáticas, cuyos directores, Álverez Ude y Plans, designaron de Puig Adam. Sin embargo, apenas iniciado el viaje, una enfermedad lo obligó a volver, por lo que hubo de renunciar[91].

Entre los pensionados para temas de Matemáticas hubo algunos que se interesaron por cuestiones relativas a la enseñanza de esta materia, en la universidad o en la enseñanza secundaria. Por ejemplo, **Álvarez Ude**, cuya primera beca en 1910 se concedió para estudiar Geometría en Francia y Alemania, se interesó asimismo por los métodos de enseñanza de la matemática en la enseñanza media y en la universitaria[92].

Otro de los pensionados para estudiar cuestiones de matemáticas, que también mostró interés por aspectos metodológicos fue **Teófilo Martín Escobar**, profesor de la Escuela Industrial de Gijón quien, además de seguir cursos y de realizar trabajos propiamente de matemáticas, asistió a clases de matemáticas de secundaria y siguió cursos de metodología matemática dedicados a la preparación de profesores para la enseñanza media en Italia, entre 1924 y 1926[93]. Una muestra de su interés por la enseñanza es la información que contiene la sección correspondiente al Laboratorio Matemático de la Memoria de la JAE de los cursos 1920 y 1921: «El señor Martín Escobar realizó interesantes trabajos acerca de la enseñanza de la Matemática elemental y de la noción de área en la Geometría elemental»[94].

[91] «Expediente de Pedro Puig Adam. JAE/118-601». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

[92] «Expediente de José Gabriel Álvarez Ude. JAE/8-363». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

[93] «Expediente de Teófilo Martín Escobar. JAE / 93-215». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE.

[94] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memo-

La Junta concedió becas para estudiar la Metodología de las Matemáticas en secundaria, como la otorgada a **Ruperto Fontanilla García**, catedrático del instituto de Pontevedra, que viajó a Francia y a Alemania en 1921. Interesado por el problema de la enseñanza de la geometría elemental, asistió a clases de secundaria, además de ocuparse del estudio teórico de algunas cuestiones de metodología matemática. «La labor realizada fué de crítica comparativa entre los métodos usados por el profesorado alemán y los practicados en España, tanto en los Institutos Generales y Técnicos, como en el Instituto-Escuela»[95].

Otro profesor de secundaria que había realizado, como el anterior, prácticas como aspirante en el Instituto-Escuela de Madrid, fue **Enrique Vidal Abascal**, quien solicitó becas para estudiar en Suiza y ampliar conocimientos «sobre los planes cíclicos y sus métodos, ventajas e inconvenientes de los libros de texto, así como incorporación a los elementos de las ideas de Matemática superior que sea posible»[96]. En 1934 se le concedió la pensión por tres meses. Aunque también se interesó por cuestiones propiamente de matemáticas[97], entregó a la Junta una memoria titulada «Sobre la enseñanza media de las matemáticas», cuya publicación solicitó a la JAE y que fue recomendada por Sánchez Pérez, aunque hemos consultado los *Anales* de la JAE y no figura en ellos la publicación.

Marín Eced incluye a **Florencio de la Torre Carrillo** entre los becados para estudiar la metodología de las matemáticas argumentando que en los archivos de la JAE consta que la beca fue solicitada y concedida para estudiar esta materia, aunque luego él se dedicara solo a temas de investigación matemática. Hemos visto que en la petición dirigida al presidente de la Junta solicita estudiar Metodología de la Matemática con Federico Enri-

ria correspondiente á los años 1920 y 1921». Madrid, 1922, p. 201.

[95] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1922-3 y 1923-4». Madrid, 1925, p. 44.

[96] «Expediente de Enrique Vidal Abascal. JAE/149-220». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE. Cita en p. 1.

[97] En 1936 solicitó pensión para estudiar cuestiones de Análisis Matemático en Berlín. Ibídem, pp. 11-17.

ques[98], pero una vez en Roma sus intereses y su dedicación no se dirigieron hacia las cuestiones pedagógicas. Esta autora incorpora igualmente a **Luis G. Castellá Lloveras** entre los becados para cuestiones de metodología de las matemáticas. En realidad Castellá trabajó fundamentalmente en temas de matemáticas, aunque también en cuestiones de organización administrativa y pedagógica y cuestiones metodológicas en Escuelas Profesionales y centros de educación secundaria. En 1925 entregó a la Junta, entre otros trabajos, un estudio sobre la organización de las enseñanzas primaria y secundaria en el país de destino, titulado *Ideas y consideraciones generales sobre la enseñanza en Francia*[99].

Otros colectivos de becados para observar y estudiar la enseñanza de las matemáticas en relación con la escuela primaria o con la formación el magisterio fueron los maestros, inspectores y formadores de maestros. De ellos nos ocupamos en otro apartado.

2.3.1. El Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE

El artículo 45 del Reglamento de 22 de enero de 1910, por el que había de regirse la JAE, preveía la creación de ciertos tipos de instituciones, dentro de la Junta:

> Para fomentar los trabajos de investigación, utilizar los conocimientos adquiridos por los pensionados, reunir las fuerzas dispersas y aprovechar las de algunos Profesores extranjeros, creará la Junta, cuando disponga de elementos, de acuerdo con el art. 14 del Real Decreto de referencia[100], Centros de ampliación de estudios donde predominen los trabajos de Seminario y Laboratorio, haciendo los alumnos la investigación personal. La Comisión ejecutiva formará el oportuno proyecto y lo someterá á la Junta plena. Aceptado por ésta, se elevarán al Ministro para su aprobación las propuestas que le sean precisas[101].

[98] Marín Eced, *Innovadores...*, op. cit., p. 343.

«Expediente de Florencio de la Torre Castillo. JAE / 142-115». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE, p. 9.

[99] Castellá Lloveras, Luis G.: «Ideas y consideraciones generales sobre la enseñanza en Francia». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. C/101 R.12.122.660, 1925.

[100] Se refiere al R.D. de 16 de junio de 1907, que éste modifica.

[101] Facsímil incluido en: Sánchez Ron, *1907-1987. La Junta...*, op. cit., pp. 49-50.

Se crean, al amparo de este Reglamento, instituciones como el Museo de Ciencias Naturales o el Laboratorio de Investigaciones Físicas, y también un Laboratorio y Seminario Matemático.

No obstante, existen algunas diferencias entre los centros u organismos que crea la JAE para estas disciplinas, aunque las diferencias sean más bien administrativas que en relación con el trabajo desarrollado en ellos. Así, mientras que el Laboratorio de Investigaciones Físicas y otros nacen oficialmente con un Real Decreto publicado desde el Ministerio de Instrucción Pública, y existe una Real Orden con el nombramiento de sus directores, no sucede igual con el Laboratorio y Seminario Matemático, aunque este centro sí existiera como tal[102].

Su origen está en la reunión que mantuvo la dirección de la Junta a principios del año 1915. En la distribución del presupuesto para ese año, que establece la asignación para centros como el Laboratorio de Investigaciones Físicas o el Museo de Ciencias Naturales, en el apartado destinado a trabajos específicos aparece reflejada una cantidad para Trabajos de Matemáticas. A las secciones existentes en el Instituto Nacional de Ciencias Físico-Naturales se añade en ese momento una nueva, la *Sección de Trabajos Matemáticos* (en 1914 se había decidido que el Instituto Nacional de Ciencias Físico-Naturales, que luego pasará a llamarse Instituto de Ciencias, organice «Trabajos de investigación, ampliación y divulgación»), y se invitó para que la dirigiese a Julio Rey Pastor, catedrático de la Universidad Central, becado por la Junta

[102] González Redondo, F.A.; De Vicente Laseca, L. y Fernández Terán, R.E.: «Génesis y problemática institucional del Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios». En: J.M. Sánchez Ron y J. García Velasco (Eds.), *100 JAE. La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas en su centenario*, tomo I, pp. 670–697. Fundación Francisco Giner de los Ríos y Publicaciones de la Residencia de Estudiantes, 2010.

en 1909[103], 1911[104], 1912, 1913[105] y 1914[106], que contaría con Sixto Cámara Tecedor como colaborador. Aunque la Junta pronto se refiriese al Laboratorio Matemático a la par que al Laboratorio de Física, y en 1918 solicitase al Ministerio de Instrucción pública y Bellas Artes que este Laboratorio y Seminario Matemático se incorporase al Instituto Nacional de Ciencias –como lo estaba el de Física–, y que Rey Pastor fuera nombrado director, no hubo ninguna R.O. ni ningún R.D. en este sentido[107].

Así que Rey Pastor no fue nunca nombrado director de un organismo con la categoría de 'centro', puesto que tal centro nunca existió con esta consideración ni en la legislación ni en los presupuestos; cobraba como director de sección y encargado de cursos y fue la persona encargada del Laboratorio de Matemáticas de la Junta y, por tanto, de capitanear la investigación en Matemáticas en España.

Para conocer la importancia de la JAE y del Laboratorio Seminario Matemático en el progreso de la matemática en España hay que resaltar, en primer lugar, la situación de la universidad, concretamente la de la investigación ma-

[103] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1908 y 1909». Establecimiento tipográfico de los hijos de M. Tell, 1910, p. 26.

[104] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1910 y 1911». Madrid, 1912, p. 85.

[105] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1912 y 1913». Madrid, 1914, pp. 132-133. La pensión de 1912 fue una prórroga de la concedida en 1911.

[106] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1914 y 1915». Madrid, 1916, pp. 98-99. La pensión de 1914 fue una prórroga de la concedida en 1913.

[107] Hemos revisado todas las Memorias de la JAE, catorce, correspondientes a los cursos 1908 a 1934. El Centro de Estudios Históricos se crea por un R.D. de 18 de marzo de 1910 y el Instituto Nacional de Ciencias Físico-Naturales por R.D. de 27 de mayo de 1910, hechos que sí se citan en la Memoria de publicada en 1912. Ambos Reales Decretos fueron publicados en la Gaceta el 19 de marzo y el 29 de mayo, respectivamente. Ni en la Gaceta de 1915 ni en las posteriores figura ningún R.D. de creación del Laboratorio Matemático; tampoco en las Memorias de la JAE hay referencia alguna a su creación. El primer trabajo en el que se revelaba esta situación fue el de González Redondo, Francisco A.; Vicente Laseca, Lourdes y Fernández Terán, Rosario E.: «La organización de la educación matemática en la Junta para la Ampliación de Estudios». *Revista Complutense de Educación*, 2008, **19(1)**, pp. 137–153.

temática en la universidad española, en aquellos momentos. Solamente en la Universidad Central de Madrid podían realizarse estudios/tesis de doctorado, y un matemático relevante como Rey Pastor, que ya había trabajado en Alemania, precisamente becado por la JAE, y seguido cursos de los matemáticos más importantes del momento, entre ellos Schwarz, Frobenius, Courant, Landau y Hilbert, ni siquiera podía implicarse en investigaciones con futuros doctores, ya que ello quedaba reservado a otros catedráticos, mientras que él había de limitarse a impartir docencia en los primeros cursos de los estudios de Matemáticas.

La creación del Laboratorio Matemático, después de otros dedicados a otras áreas de conocimiento científicas, puede explicarse porque en ese momento se «disponía de elementos», tal como señalaba el artículo citado más arriba. La Junta vio en 1914 la oportunidad de aprovechar que un matemático de la talla de Rey Pastor se hallaba disponible –no pudo acabar su estancia en Gotinga debido a la Primera Guerra Mundial y su cátedra no era un aliciente para su talento– y decidió, a principios del año siguiente, ofrecerle que se pusiera al frente de la investigación matemática y de la difusión de las teorías y las creaciones matemáticas que tenían lugar en Europa, para sacar a España del atraso científico, en particular matemático, en el que se encontraba.

En 1920 la Junta proponía como funciones del Laboratorio de Matemáticas las siguientes[108]: mantener actualizada la información sobre los avances matemáticos y procurar difundirlos entre los hispanohablantes; publicar para ello revistas o cuadernos no periódicos con trabajos originales o recensiones, críticas y noticias sobre los avances en matemáticas; facilitar orientación y obras e incluso ayudar económicamente a los matemáticos que deseen investigar; invitar a dar cursos a profesores extranjeros y preparar a los destinatarios españoles; dirigir la Matemática del Instituto-Escuela; evaluar y proponer personas para que se les concedan pensiones en el extranjero.

El papel que desempeñó el Laboratorio Matemático puede valorarse a través de las personas vinculadas a él y de los trabajos que realizaron. En

[108]Formentín Ibánez, Justo y Rodríguez Fraile, Esther: *La Fundación Nacional para Investigaciones Científicas (1931-1939): actas del Consejo de Administración y estudio preliminar*. CSIC, Madrid, 2001, p. 61.

primer lugar, hay que destacar que, durante el tiempo que existió el Laboratorio Matemático, Julio Rey Pastor pasó poco tiempo en nuestro país. Precisamente la JAE lo propuso en 1915 para la cátedra de la Institución Cultural Española de Buenos Aires. E invitado por dicha institución muy pronto viajaría a Argentina por largos periodos, desde 1917. Aunque ni la Junta ni el propio Rey Pastor deseaban que se perdiera la vinculación de éste con el Laboratorio Matemático –no obstante él mismo solicitó ser apartado de su cargo en el Seminario en 1920, estando pensionado en Alemania–, lo cierto es que a partir de entonces esta vinculación, en algunos periodos figurando como director, y en otros figurando como tal otras personas, consistió en colaborar en la revisión de algunos trabajos, en las publicaciones y en general en colaboraciones más o menos puntuales[109]. En todo caso, el Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE siempre estuvo ligado a la figura de Julio Rey Pastor, pues su creación, en buena medida, se debía a la existencia de este matemático.

También se debe a Rey Pastor la creación de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, que sustituiría a la *Revista de la Sociedad Matemática Española*. Fue dirigida en principio por Rey Pastor, hasta finales de 1920, en que propuso a la Sociedad Matemática compartir la dirección con Álvarez Ude. Poco después éste último quedaría como director y José María Plans y Freyre como Secretario de Redacción; ambos contaban con la colaboración de Tomás Rodríguez Bachiller y Fernando Lorente de Nó. La revista contenía una sección denominada «Notas y Ejercicios elementales», a disposición del profesorado de secundaria, para despertar la afición por la matemática en los bachilleres; una de las personas que publicó un artículo dedicado a comentar algunas cuestiones pedagógicas en relación con la enseñanza secundaria fue Pedro Puig Adam[110]. En 1925 la revista comenzó una sección titulada

[109] González Redondo, De Vicente Laseca y Fernández Terán, *Génesis y problemática...*, op. cit., estudian precisamente la situación institucional del Laboratorio y Seminario Matemático, que en general no se cuestiona en la mayoría de los trabajos de la JAE sobre esta institución o sobre el matemático Rey Pastor.

[110] Puig Adam, Pedro: «Consideraciones generales sobre la pedagogía matemática en la Segunda Enseñanza». *Gaceta Selecta. Antología de las revistas publicadas por la RSME en sus cien primeros años. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15(1) (suplemento)**, pp. 129–131. Originalmente publicado en la Revista Matemática

«Notas Didácticas», que no duraría mucho. Rey Pastor siempre propuso que la revista estuviese dedicada a publicar trabajos originales de investigación matemática. Y en 1932 una nueva revista, *Matemática Elemental*, recogía el resto de los trabajos, sobre todo problemas para preparar el ingreso en los estudios superiores de ingeniería o matemáticas y oposiciones. El propio Rey Pastor publicó en esta revista algún trabajo sobre la situación de la enseñanza de las matemáticas[111].

Otros profesores se fueron ocupando de las tareas propias de la dirección del Laboratorio (administración del presupuesto, organización de cursos, etc.). Al año siguiente de su creación se incorporó José Gabriel Álvarez Ude y en el curso 1917-18 José María Plans y Freyre, que sería más tarde profesor de la Escuela Superior del Magisterio, los cuales se encargaron de la dirección efectiva del Laboratorio Seminario Matemático en las numerosas y largas ausencias de Rey Pastor, reconociéndolos oficialmente la Junta como tales al final del curso 1920-21. En el curso 1923-24 la Junta nombra directores y encargados de los trabajos, además de a los anteriores, a José Augusto Sánchez Pérez, catedrático del Instituto-Escuela, Lorente de Nó y Rodríguez Bachiller. En 1930 la dirección del Laboratorio se encomendó a Plans, Álvarez Ude y Esteban Terradas, éste último hasta el curso 1931-32. Y a partir de 1934 la dirección del Laboratorio recae en José Barinaga y Pedro Pineda.

Por el Laboratorio Matemático pasaron los matemáticos más relevantes de aquel momento, algunos muy conocidos, como Sixto Ríos, Luis A. Santaló o Pedro Puig Adam. Precisamente éste último escribió, junto a Rey Pastor, libros de texto para bachillerato. Tanto las personas relacionadas con el Seminario –Einstein visitó el Laboratorio Matemático para asistir a una sesión de la Sociedad Matemática y allí resolvió cuestiones sobre la Teoría de la Relatividad[112]–, como los trabajos y publicaciones bajo su patrocinio, dan cuenta de la trascendencia de esta institución.

Sobre el papel del Laboratorio en la investigación matemática, baste decir

Hispano-Americana. Tomo IV, pp. 129-131.

[111] Rey Pastor, *Panorama...*, op. cit.

[112] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1922-3 y 1923-4». Madrid, 1925, p. 266.

que de los artículos publicados en la *Revista Matemática Hispano-Americana* entre 1919 y 1936, el 40 por ciento de sus autores, que firmaron más del 60 por ciento de los artículos, pertenecían al Laboratorio-Seminario Matemático de la JAE[113]. Otra muestra de la influencia de la JAE en la investigación matemática en España es que, finalmente, las cátedras de matemáticas universitarias, sobre todo en Madrid, ya empezaban a ocuparlas matemáticos formados en el Laboratorio, como Barinaga, quien sufriría más tarde la represión de la dictadura de Franco, junto con otros matemáticos vinculados al Laboratorio, como Santaló, Vera y Lorente de Nó. La mayoría de las personas ligadas a este centro pudieron continuar trabajando y la Sociedad Matemática y las revistas continuaron, aunque con algunos cambios[114].

2.3.2. Instituto-Escuela

José Augusto Sánchez Pérez, catedrático de matemáticas en el Instituto-Escuela de Madrid, expresa en forma de interrogante una de las razones que, a su juicio, dieron lugar a la creación de dicho centro:

> ¿De qué le sirve a una nación conocer lo que se hace en otras más adelantadas, si no las imita y procura mejorar los procedimientos de enseñanza, adaptando los métodos a las condiciones étnicas del país y contribuyendo al progreso científico?[115]

En 1918 fue creado el Instituto-Escuela de Madrid, como centro experimental o de ensayo y reforma, aunque en 1930 el personal pasó a ser fijo. En años posteriores se crearon instituciones similares en Barcelona, Valencia, Sevilla y Málaga. En él se impartían todos los niveles de enseñanza no universitaria; un curso infantil, tres grados o cursos de enseñanza preparatoria

[113] Pino Arabolaza, Pilar del: «Incidencia del Seminario Laboratorio Matemático en la investigación española en matemáticas (1919-1936)». En: José Manuel Sánchez Ron (Ed.), *1907-1987. La Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas 80 años después*, tomo II, pp. 329–348. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1988.

[114] González Redondo, *Las revistas...*, op. cit.

[115] Sánchez Pérez, José Augusto: «Notas de metodología matemática». En: *Congreso de Oporto. Tomo III. Ciencias Matemáticas*, pp. 5–22. Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Madrid, 1921. Cita en p. 9.

o primaria (para niños de entre 8 y 10 años, o aquéllos cuya precocidad o retraso lo aconsejen), y la enseñanza secundaria, dividida en un primer periodo de cuatro años y otro de dos cursos de especialización; en estos últimos las matemáticas no eran obligatorias.

La gestión del Instituto y la selección del profesorado correspondían a la JAE, la cual establecía su organización y sus objetivos. De la educación primaria se encargaban profesoras con título de Maestra Normal Superior, que procedían de la Escuela Superior del Magisterio o eran tituladas universitarias. La secundaria estaba a cargo de catedráticos de instituto. Los profesores estaban orientados por los asesores pedagógicos, las «asesorías técnicas»; la responsable de la sección primaria o preparatoria era María de Maeztu y los «jefes de sección» en el caso de la enseñanza secundaria eran normalmente profesores universitarios, nombrados por la Junta[116].

Las consideraciones anteriores hacen declarar a Sánchez Pérez que el Instituto está «íntimamente ligado a la Escuela, porque marchan de acuerdo los profesores de ambos grados; está el Instituto en estrecha relación con la Universidad, porque los profesores de ésta sirven de guía, dan consejo y prestan apoyo». E insiste: «Escuela, Instituto y Universidad pueden, pues, distribuirse el trabajo de tal modo que no se note el paso de uno a otro, porque el enlace debe ser perfecto»[117].

El artículo 7 del Reglamento del Instituto-Escuela se refiere a la doble finalidad de la enseñanza, educativa y científico-cultural. Entre los medios de enseñanza, el artículo siguiente señala la acción, el aprendizaje por observación o experimentación directa, las lecturas reelaboradas, el diálogo entre el profesor y los alumnos y, en último lugar por importancia, la exposición del profesor:

> En la Sección elemental se acentuará muy especialmente la correlación entre la actividad de pensar y la actividad creadora y ejecutora, de modo que siempre que sea posible se combinen en todas las enseñanzas el pensamiento y la acción, supliendo así con el trabajo en clase

[116] Martínez Alfaro, Encarnación: *Un laboratorio pedagógico de la Junta para la Ampliación de Estudios. El Instituto-Escuela sección Retiro de Madrid*. Biblioteca Nueva, Madrid, 2009.

[117] Sánchez Pérez, *Notas de metodología... (1921)*, op. cit., p. 10.

la menor fijeza de los niños para su preparación a solas[118].

En cuanto a la enseñanza de las matemáticas, el artículo 17 precisa:

> La enseñanza matemática, que comenzará con ejercicios de cálculo mental y escrito, debe poner las leyes abstractas de la cantidad al servicio de las necesidades cotidianas y de los problemas técnicos; pero paralelamente a esa dirección aplicada, ha de educar la mente del niño para la lógica pura del número y del espacio.
>
> Con los alumnos especializados en Ciencias se llegará a las nociones fundamentales del cálculo infinitesimal y a las bases de los sistemas geométricos de representación[119].

Una de las innovaciones metodológicas en el Instituto era la ausencia de los libros de texto en las distintas asignaturas, sustituidos sobre todo por cuadernos. Respecto a las matemáticas, Sánchez Pérez lo justifica diciendo que «para explicarse la inutilidad del libro de texto en un curso de Nociones de Matemáticas basta admitir el axioma de Laisant, que dice "Todas las ciencias son experimentales"»[120]. Aunque en los últimos cursos del bachillerato, pensando en el paso posterior a la universidad, sí se utilizaron libros, de texto y de consulta. Este profesor de matemáticas pensaba que, en niveles más avanzados, el libro es útil y necesario; y da algunas pautas para confeccionar un texto para bachillerato: suprimir las definiciones por ser la mayoría incompletas o falsas, enlazar la matemática con las ciencias físicas y naturales y tomar de ellas los ejemplos para las matemáticas, enseñar la geometría unida al dibujo, introducir la 'geometría del movimiento', etc.

En definitiva, reclama para los niveles elementales –incluidos los primeros cursos de la enseñanza secundaria– una matemática intuitiva en la que se prescinda de aquello que no tenga aplicación directa o cuya razón de ser no esté al alcance de los alumnos. El rigor lógico –con la consiguiente pérdida del carácter intuitivo– lo considera propio de los dos últimos años del bachillerato.

[118] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1918 y 1919». Madrid, 1920, p. 240.

[119] Ibídem, p.242.

[120] Sánchez Pérez, *Notas de metodología... (1921)*, op. cit., p. 19.

El Instituto-Escuela de Madrid era a la vez un centro de formación del profesorado de secundaria, los 'profesores aspirantes', esto es, «jóvenes de uno u otro sexo que habiendo terminado o estando para terminar sus carreras, aspira [sic] a ingresar en el Profesorado de Institutos»[121]. La Junta seleccionaba a los aspirantes, cuya formación era gratuita, además podían recibir una beca si carecían de recursos. Su preparación abarcaba:

> 1º Trabajos de laboratorio para intensificar los conocimientos y despertar la iniciativa en la especialidad elegida por cada aspirante;
>
> 2º Prácticas de enseñanza y colaboración en la obra educativa del Instituto Escuela;
>
> 3º Estudios pedagógicos y filosóficos;
>
> 4º Estudio de lenguas vivas[122].

Estos aspirantes hacían labores primero de observación y después de colaboración con los profesores. En 1918 se le encarga a Rey Pastor la formación pedagógica de quienes se preparaban para el Magisterio Secundario en el Instituto-Escuela, en la rama de matemáticas, pero en 1920 pide ser relevado como director de esta Sección Matemática, por lo que en 1921 se nombra en su lugar a Álvarez Ude[123]. La inclusión, en las Memorias de la JAE, en el apartado dedicado al Laboratorio Matemático, de actividades de miembros del Laboratorio relacionadas con el Instituto-Escuela es una muestra del vínculo existente entre la sección de Matemáticas de éste último y el Laboratorio Matemático: por ejemplo, la Memoria del curso 1925-26 destaca la continuación del curso impartido por Álvarez Ude sobre *Las matemáticas elementales desde un punto de vista superior*, con la asistencia de varios ayudantes del Instituto-Escuela, como Carmen Martínez Sancho[124]. Esta aspirante en el Instituto trabajó en el Laboratorio Matemático y fue la primera mujer doctora en matemáticas en España, con una tesis dirigida por José María Plans

[121] «Para los licenciados en Ciencias o en Letras». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Expediente JAE 161/245 (Instituto-Escuela de 2.ª Enseñanza). Documento 258, p. 92/554, 1923.

[122] Ibídem.

[123] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1920 y 1921». Madrid, 1922, p. 256.

[124] Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1922-3 y 1923-4». Madrid, 1925, p. 323.

quien, además de su importante labor en el Laboratorio, fue profesor, como hemos dicho, de la Escuela Superior del Magisterio.

La JAE destaca, entre los ejercicios prácticos para la preparación del profesorado secundario, los realizados en la Sección de Matemáticas, bajo la dirección de Álvarez Ude, a los que asistieron todos los profesores y aspirantes de la Sección. De hecho, la Junta considera que «esta labor de formación del Magisterio secundario, que conviene intensificar cada vez más, constituye una de las funciones más importantes del Instituto-Escuela»[125].

2.4. La formación de los maestros durante el primer tercio de siglo

2.4.1. El Plan de Estudios de 1914

El Real Decreto de 30 de agosto de 1914, relativo a la reorganización de las Escuelas Normales[126], se promulga siendo José Bergamín el titular del Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, por lo que se conoce a este Plan como «Plan Bergamín». Supone un avance importante en la formación del Magisterio primario; entre sus principales características, en comparación con los planes anteriores, podemos señalar:

- La desaparición de la distinción entre los títulos de maestro elemental y maestro superior. Se establece un título único de Maestro de Primera Enseñanza (Art. 2.º).

- La supresión de los estudios de Magisterio en los institutos de segunda enseñañza (Art. 3.º) y la creación en todas las capitales de provincia de Escuelas Normales de Maestros y de Maestras (Art. 4.º).

- La creación de Escuelas prácticas anejas a las Normales (Art. 8.º).

[125] Ibídem, p. 410.

[126] Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes: «Real Decreto de 30 de agosto de 1914, por el que se reorganizan las Escuelas Normales». *Gaceta de Madrid*, 1914, **245**, pp. pp. 562–567. `https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1914/245/A00562-00567.pdf`. Consultado el 10-10-2015. Consultado el 10-10-2015.

- La creación de becas para los alumnos sobresalientes (Art. 56.º) y de Residencias (Art. 68).

- El Plan de estudios enciclopédico, con las materias estrictamente profesionales en segundo término (Art. 15.º).

La edad mínima para ingresar era de 15 años (una Real Orden de 15 de marzo de 1917 la establece a los 14) y se exigía examen de ingreso sobre las materias de la enseñanza primaria (en el caso de las maestras también un ejercicio de Labores). Entre los seis profesores numerarios de las Escuelas Normales de maestros, hay uno encargado de las asignaturas de Matemáticas.

Se establece una duración de los estudios de cuatro años. Hemos recogido la distribución de las asignaturas y el número de horas semanales en las figuras 2.2 (p. 83) y 2.3 (p. 84).

Las prácticas de enseñanza en las escuelas anejas –o en escuelas nacionales– se hacían los dos últimos años.

Este Plan supuso una evidente mejora en la formación de los maestros y en la consideración de estos estudios, aunque se ha estimado que era un plan enciclopedista, que proporcionaba una formación fundamentalmente de carácter académico, en detrimento de la formación metodológica y pedagógica en general. Pero hay que tener en cuenta la escasa preparación inicial de quienes accedían a las Normales. Francisco Romero, profesor de matemáticas, opina que la cultura con la que se accede a las Normales en el Plan de 1914 ni siquiera puede llamarse así, la llama pseudocultura: mal saber leer y escribir, recitar mecánicamente el catecismo, conocer deficientemente las cuatro reglas de la Aritmética y saber de memoria unas cuantas reglas de Gramática. Cree que es el mayor inconveniente de la labor de los profesores de las Normales y a cubrir esas deficiencias se dedican los primeros años. Propone cursos complementarios y la enseñanza primaria superior, al estilo de otros países[127].

Esta situación de entrada va a condicionar la calidad de la formación de los maestros durante los años en los que estuvo vigente el plan de estudios.

[127] Romero Carrasco, Francisco: «Cursos preparatorios». *Revista de Escuelas Normales*, 1930, **69**, pp. 7–9.

MATERIAS	**Horas/sem.**
PRIMER CURSO	
Religión e Historia Sagrada	4,5
Teoría y práctica de la lectura	4,5
Caligrafía 1	4,5
Nociones generales de Geografía y Geografía regional	4,5
Nociones generales de Historia e Historia de la Edad Antigua	4,5
Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría	4,5
Educación física	4,5
Música 1	3
Dibujo 1	3
Costura [alumnas]	6
SEGUNDO CURSO	
Religión y Moral	4,5
Gramática castellana 1	4,5
Caligrafía 2	4,5
Geografía de España	4,5
Historia de la Edad Media	4,5
Aritmética y Geometría	4,5
Pedagogía 1	4,5
Educación física	4,5
Música 2	3
Dibujo 2	3
Bordado en blanco y Corte de ropa blanca [alumnas]	6

Figura 2.2: Plan de Estudios de Magisterio de 1914. Cursos primero y segundo.

MATERIAS	**Horas/sem.**
TERCER CURSO	
Gramática castellana 2	4,5
Geografía Universal	4,5
Historia de la Edad Moderna	4,5
Algebra	4,5
Física	4,5
Historia Natural	4,5
Francés 1	3
Pedagogía 2	4,5
Prácticas de enseñanza	
Corte de vestidos y labores artísticas [alumnas]	6
CUARTO CURSO	
Elementos de literatura española	3
Ampliación de Geografía de España	4,5
Historia contemporánea	4,5
Rudimentos de Derecho y Legislación escolar	4,5
Química	4,5
Fisiología e Higiene	4,5
Francés 2	3
Historia de la Pedagogía	4,5
Prácticas de enseñanza	
Agricultura [alumnos]	4,5
Economía doméstica [alumnas]	4,5
VOLUNTARIAS PARA MAESTRAS	
Mecanografía	
Taquigrafía	
Contabilidad mercantil	

Figura 2.3: Plan de Estudios de Magisterio de 1914. Cursos tercero y cuarto.

María de Maeztu recordaba, una década más tarde, que la cultura general que se daba en las Escuelas Normales era insuficiente y no estaba a la altura de la profesión para la que preparaban:

> Al médico, al abogado, terminados los seis años de bachillerato, se le exige una preparación profesional técnica que dura otros seis. Al maestro, en cambio, le bastaban hasta hace poco tiempo, en total cuatro años de estudios, en los que aprendía unas ligerísimas nociones de Geografía, Historia, Matemáticas, etcétera, como complemento de lo que recibió en la Escuela primaria, para hallarse en posesión de un título que le capacitaba nada menos que para transformar la sociedad[128].

Cándido López Uceda, inspector que había participado en un viaje en grupo, becado por la JAE, comenta en la Memoria que presenta a su vuelta la falta de formación de los maestros españoles, que achaca a la falta de escuelas graduadas, pero también a las Escuelas Normales:

> Visitando las escuelas de Suiza y Francia, hemos visto llevadas a la práctica orientaciones que en las nuestras van entrando muy poco a poco, debido, sobre todo, a falta de preparación de los maestros que, como es natural, proviene en gran parte de la enseñanza que recibieron en las Normales y a la arcaica organización unitaria de las escuelas primarias[129].

Esta opinión es compartida por José María Eyaralar, profesor de matemáticas en la Normal de Baleares. Critica en particular la formación matemática que recibían la mayoría de los maestros en aquellos años en los que estaba vigente el plan de 1914, en el que persistían los contenidos del Plan anterior, «aumentados con el carácter puramente lógico que se quiere dar a la enseñanza con el exceso de teoremas inútiles y la falta de teorías utilísimas», defectos en parte achacables a la formación que recibían los propios formadores, ya «que aun en la formación matemática del profesorado de Normales

[128] Maeztu Whitney, María de: «Escuelas Normales». En: *Libro-Guía del Maestro*, pp. 119–129. Espasa-Calpe, Madrid, 1936. Cita en p. 123.

[129] López Uceda, Cándido: «Primeras lecciones de Aritmética». En: *Anales de la JAE*, tomo XIX, memoria 7.ª, pp. 285–294. Madrid, 1924, cita en p. 1.

existe una gran desorientación respecto al contenido, plan y método de la enseñanza»[130].

La dictadura de Primo de Rivera apenas reformó las Normales, de lo que se alegra la Junta Directiva de la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales, a la vista de las reformas en la enseñanza secundaria y universitaria. Sin embargo, sí hubo una Real Orden polémica. El artículo 28 del Decreto Bergamín establecía que quienes tuviesen el título de bachiller y aprobaran en la Normal las asignaturas de Pedagogía, Religión y Moral y Labores y Economía doméstica (en el caso de las mujeres), podían obtener el título de Maestro si hacían prácticas en la escuela aneja a la Normal o en Escuelas Nacionales.

Pero una Real orden de 25 de abril de 1925 permite que quienes hayan obtenido el título de bachiller en los Institutos de Segunda Enseñanza obtengan también el de Maestro de Primera Enseñanza, con solo aprobar la asignatura de Pedagogía en las Escuelas Normales. Ello provocó el malestar del profesorado de Escuelas Normales, que se tradujo en numerosas manifestaciones en las revistas profesionales de la época, principalmente la *Revista de Escuelas Normales*, órgano de expresión de la Asociación del profesorado normalista, y en la *Revista de Pedagogía*. Se califica de desatino la absorción de las Normales por los institutos de segunda enseñanza: «No podemos callar porque el plan fusionista es consecuencia de un desconocimiento acentuado de lo que deben ser estos Centros, necesitados de nueva orientación y no de supresión»[131].

En muchos casos estos profesores hacían juicios sobre cómo la situación existente en las Normales no favorecía el dotar de identidad a estos centros. Pero Felipe Sáiz Salvat, también profesor de Matemáticas en la Normal de Barcelona, responsabilizaba a los propios profesores normalistas de la orientación que daban a las asignaturas disciplinares, a la vez que reclamaba una reforma de estos centros, que les confiriera un carácter verdaderamente profesional:

[130] Eyaralar Almazán, José María: «Carta al Excmo. Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Residencia de Estudiantes. Archivo JAE. Expediente JAE / 49-170, pp. 3-5, 1919. Cita en p. 4.

[131] Sáiz Salvat, Felipe: «La reforma de las Normales. Sugestiones». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **31**, p. 31.

> A nuestro juicio son los principales culpables de no haber sacado el máximo rendimiento, en sentido profesional, al R.D. de 30 de agosto de 1914. Francamente nosotros debemos sacrificar la ciencia pura a la *didáctica escolar*. De todos modos, venga la revolución desde arriba y si es la hora de ella, rogamos al Excmo. Sr. Ministro que se haga de una vez la reforma de las Normales, con toda la serenidad y justicia, para que dejen de ser *Cenicientas* y ejerzan una eficaz influencia sobre la escuela primaria, mediante la producción de buenos maestros.
>
> Para ello es preciso que las Normales sean puramente profesionales o principalmente profesionales[132].

Efectivamente, recuerda que el artículo 19 del Real Decreto del ministro Bergamín establecía que todas las asignaturas tuvieran un carácter académico, pero también educativo: «Siempre que sea posible, tendrán las enseñanzas carácter intuitivo [...] todos los profesores deberán enseñar á sus alumnos la Metodología de sus respectivas asignaturas aplicada á la Escuela primaria»[133]. Ya en 1924 se queja de que no se enseña la metodología de las asignaturas: «El Estado no es culpable de que la Normal de hoy no sea todo lo *profesional* que debe de ser»[134]. Y recoge la crítica que había realizado antes Eyaralar de que no puede desarrollarse todo lo que prevé ese Plan por falta de tiempo, pero Salvat sugiere alargar los estudios y dedicar más tiempo semanal a cada asignatura.

Considera una puerta falsa las conmutaciones de asignaturas por otras del mismo nombre y extensión, cursadas en otros centros, como había ocurrido en el periodo de Romanones.

> Como en otros Centros no se enseña la metodología prevista en el D. de 30 de agosto, es evidente que las disposiciones vigentes llevan tácito el deseo del legislador de no haber lugar a conmutaciones entre Normales y los demás Centros muy respetables[135].

Anticipa el riesgo de ver nuevamente disminuido el papel de las Escuelas Normales:

[132] Ibídem.

[133] *Real Decreto... escuelas normales*, op. cit., p. 564.

[134] Sáiz Salvat, Felipe: «El Plan de las Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **16**, p. 205.

[135] Ibídem.

> La Normal exige una reforma radical si ha de llenar cumplidamente sus fines profesionales. Existiendo esa necesidad, la totalidad de los Profesores de Normal y a pesar de lo indicado en el Real Decreto de 30 de agosto de 1914, hacemos todo lo posible para que la enseñanza de nuestros centros apenas se distingan [sic] de enseñanza secundaria, con lo cual justificamos la absorción suicida[136].

Rebate la objeción de que no hay tiempo y la achaca más bien a la poca consideración que tiene la didáctica escolar: «La ley es sabia y la desvirtúan los ciudadanos». La solución que propone para remediar la falta de tiempo para incluir en las asignaturas de matemáticas los aspectos metodológicos es un examen de ingreso riguroso que acredite los conocimientos a la entrada a las Normales, y así que éstas se puedan dedicar a las metodologías. «Con ello la didáctica escolar dispondría de casi todo el tiempo; pero todo antes que invertir los términos, pues ello es un suicidio a muerte lenta»[137]. En realidad parece tener en mente con esta propuesta el peligro de la desaparición –o al menos el retroceso– de estos centros, en favor de los institutos u otras escuelas superiores, si la entidad de las asignaturas del plan de estudios no hace que solo las Normales estén en condiciones de impartirlas.

En todo caso, en el mismo artículo, ya apunta que estas soluciones las propone «mientras llega la *formación universitaria del Magisterio*»[138].

Otras críticas realizadas por profesores tan lúcidos como Margarita Comas o José María Eyaralar, se refieren al cuestionario de oposiciones para obtener una plaza de maestro. Respecto a los cuestionarios de matemáticas, critican su falta de actualización: «¿Sería mucho pedir el desear que el Cuestionario que redacta la Dirección General tuviera carácter moderno?»[139]. Margarita Comas comenta que en otros países se publican de vez en cuando notas sobre

[136] Sáiz Salvat, *El sentido de la Normal*, op. cit., p. 95.

[137] Ibídem, p. 95.

[138] Ibídem, p. 96.

[139] Comas Camps, Margarita: «El Cuestionario de las oposiciones a escuelas. Matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1925, **45**, pp. 406–409. Cita en p. 407. La *Revista de Pedagogía* encargó el comentario de los cuestionarios de las distintas materias a personas relevantes, como Américo Castro, Enrique Rioja, Teófilo San Juan o Margarita Comas (pp. 403-413). Y en el número siguiente, Dantín Cereceda, Modesto Bargalló y Lorenzo Luzuriaga (pp. 453-458).

metodología o circulares que contienen las más recientes novedades y sirven de guía a los maestros, pero se queja de que en España están retrasados cincuenta años; en lugar de temas de suma importancia en la matemática del momento –simetría, función, variante, gráfica, coordenada...–, que ni se mencionan, se da una importancia exagerada a las reglas de aligación, etc., en desuso en la práctica y sin importancia para la formación intelectual

Eyaralar califica el cuestionario de Matemáticas de 'lastimoso' «porque debiera recoger lo mejor de lo nuevo en nuestras Normales, y marca por el contrario un retroceso [...] parece más bien la copia del índice de uno de esos libritos fósiles de matemáticas que aún perduran en ciertos centros de enseñanza»[140].

Por otra parte, son conscientes de que, aunque la función de la Normal no es preparar oposiciones, éstas son una meta, al menos para los alumnos; por ello, sería interesante que el programa lo tuviera en cuenta, con lo que finalmente los cuestionarios de oposición influyen en los contenidos que el profesor trata en sus clases.

La década anterior a la Segunda República fue un momento de intensa renovación pedagógica; el Plan de 1914, con sus fallos, permitió elevar el nivel de la Normales, pero sobre todo influyeron dos instituciones fundamentales: la Junta de Ampliación de Estudios y la Escuela Superior del Magisterio. Ello provocó el surgimiento de un considerable grupo de profesores normalistas que fueron, no los únicos, pero sí los principales protagonistas de las reformas metodológicas en todas las materias, entre ellas, las matemáticas. Las publicaciones –libros y artículos en revistas profesionales– dan cuenta de ello. Fue un momento de innovación pero también de reflexión, no exento de críticas. A lo largo de estos años se puso de manifiesto, cada vez con más intensidad, la necesidad de una reforma profunda y de un mayor nivel de estudios para los maestros.

[140] Eyaralar Almazán, José María: «El Cuestionario de matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1923, **7**, pp. 221–222. Cita en p. 221.

2.4.1.1. La aspiración a una formación superior del Magisterio primario

En 1931, en un artículo seleccionado en el V concurso de la *Revista de Pedagogía*, Antonia Lorenzo, maestra nacional, en relación con la preparación universitaria de los maestros opina que si es para elevar el nivel intelectual del maestro, con la organización de la universidad –en ese momento– los maestros saldrían con mucha capacidad científica, pero se encontrarían con una realidad escolar que califica de mísera, en las aldeas españolas. Sugiere que si lo que se quiere es aumentar la cultura de los maestros, esto podría hacerse en las Normales modificando los planes de enseñanza. Aunque entiende que cautive la idea de elevar el nivel del maestro y el prestigio público de la profesión si se forma en la universidad, duda que el maestro respondiese al tipo de persona universal –comprensiva, no solo de su función teórica sino del niño– que se busca. Cita a Ortega y Gasset y su estudio *La misión de la Universidad*, concretamente que la universidad no forma «hombres de tipo medio o de profesión», sino «elucubraciones científicas». Ve, pues, más viable asimilar las Normales a centros universitarios[141].

La educación iba a ser uno de los pilares de la política de la República, y la mejor preparación del Magisterio primario una condición necesaria. Y cita a Joaquín Costa cuando afirma que «formar al maestro es crear escuela, tener escuela es forja de ciudadanos; y disfrutar de ciudadanía es respirar los principios de libertad y justicia a que todo pueblo debe de aspirar si quiere llamarse factor de cultura»[142]. Éstas son las conclusiones de su trabajo:

> 1.ª El maestro por su función requiere un centro de formación especial.
>
> 2.ª Estos centros deben y pueden serlo las actuales normales.
>
> 3.ª La normal, para que responda a su fin, debe formar hombres de tipo universal y dar a sus estudios carácter universitario para salvar el valor positivo de la formación del maestro, de los prejuicios sociales.
>
> 4.ª La normal no solo debe abrazar la misión de iniciar la formación del maestro, sino que debe continuar siendo el centro propulsor de las

[141] Lorenzo, Antonia: «La preparación del Magisterio». *Revista de Pedagogía*, 1931, **114**, pp. 261–266. Cita en p. 263.

[142] Ibídem, p. 265.

inquietudes de aquél.

5.ª El maestro se debe a sí mismo el imperio de mejoramiento desenvuelto por sus fuerzas, las societarias y del Estado, por medio de los centros formativos.

6.ª El problema de la formación del maestro es nacional y de primer orden; nosotros le consideramos básico y único para nuestro resurgir[143].

Cree que los principales responsables de exigir esta reforma deben ser los propios maestros. Pero la reforma de las Normales no es suficiente, es solo un factor:

> La formación del maestro no se resuelve con el impulso solo de la normal, sino con las actividades que éste se debe a sí mismo, los concursos societarios y el control constante del Estado por medio de organismos especializados. Que de lo contrario es llegar a la rutina y amaneramiento de una profesión que por demasiado responsable es la más abandonada en España[144].

En 1932, la Dirección General de Primera Enseñanza, en la Circular de 5 de octubre, estableció los «Cursillos de información metodológica» para la actualización de los maestros. El artículo 118 del Reglamento de Escuelas Normales de 1933 recogió la aspiración que esta maestra expresaba en la cuarta de las conclusiones de su trabajo: cursillos para maestros en ejercicio, organizados por las Normales, y «Misiones pedagógicas» para vivir conectadas a la realidad social circundante.

La proclamación de la II República en España anuncia profundas reformas educativas. Los profesores normalistas son partícipes de las discusiones y las propuestas. La Asociación del Profesorado de Escuelas Normales debate, a instancias de la Junta directiva y de la dirección de la *Revista de Escuelas Normales*, propuestas en relación con lo que debía contemplar la reforma de la formación del profesorado. Una de las ponencias que se presentan a la consideración de los lectores de la Revista es la de Antonio Gil Muñiz, director en aquel momento de la Asociación, que presenta unas «Bases para la Reforma de la Escuelas Normales» a la asamblea que había de celebrarse

[143]Ibídem, p. 266.
[144]Ibídem, p. 266.

en junio de ese mismo año 1931. La quinta de dichas bases hace referencia a la participación de las Normales en la investigación de metodologías y propuestas innovadoras en general, algo no exclusivo pero sí característico de los centros superiores y universitarios. Propone que dependan directamente de la Normal –además de las graduadas anejas, de párvulos graduada, unitarias y de organización rural– dos *escuelas de ensayo y reforma*, órgano indispensable para la experiencia y práctica de los nuevos métodos. Las escuelas de ensayo y reforma son para experimentar nuevas ideas y nuevos métodos pedagógicos. Escuelas que sirvan de vanguardia, de exploración para el resto de escuelas[145]. También esta petición hallaría respuesta durante el periodo republicano:

> También hay que preocuparse de la escuela de mañana. Para ello, hay dos medios esenciales: uno, la preparación del magisterio; otro, la creación de escuelas de ensayo y de reforma. [...]
>
> Con las instrucciones didácticas, los cursos de información y las escuelas experimentales tendremos la base para la reforma interna de la escuelas españolas conforme al espíritu de la República y de nuestro tiempo[146].

En el Preámbulo de este documento queda claro que las aspiraciones que tiene la profesión son, en el fondo, las que las condiciones *ecológicas* 'permiten' tener. Con la llegada de los republicanos al poder se generan expectativas que hacen surgir peticiones cuya consecución en otras circunstancias –aunque se demandasen en teoría– hubiese parecido más utópica:

> El decreto de Agosto de 1914 [...] hubiera merecido aplausos cuarenta años antes, que ya era anticuado y pobrísimo de concepción cuando se publicó y que en 1931, sólo es una prueba de la persistencia en las sociedades modernas de algunos malos recuerdos históricos.
>
> La Normal necesita, no una reforma parcial o fragmentaria, *que nosotros mismos solicitábamos cuando de los ministros de Instrucción Pública no podíamos esperar otra cosa*[147].

[145] Gil Muñiz, Antonio: «Bases para la reforma de las Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1931, **81-82**, pp. 113–120.

[146] «La escuela de hoy y la escuela de mañana». *Revista de Pedagogía*, 1932, **131**, pp. 520–521. Cita en p. 521.

[147] Gil Muñiz, *Bases para la reforma...*, pp. 113-114. La cursiva es nuestra.

2.4.2. El Plan de Estudios de 1931

Rodolfo Llopis, el nuevo Director General de Enseñanza Primaria, profesor de Escuela Normal, formado en la Escuela Superior del Magisterio, preside el 17 de junio de 1931 la reunión de la Asociación Nacional de Profesores Numerarios de Escuelas Normales, en la que se debaten las Bases de la Reforma y se aprueban con pocas modificaciones.

El Decreto Orgánico de 29 de septiembre de 1931 reorganiza los estudios del Magisterio primario. La reforma institucional y académica se verá concretada con la publicación del Reglamento de Escuelas Normales de 17 de abril de 1933, firmado por Fernando de los Ríos, ministro de Instrucción Pública y Bellas Artes. Las características principales de este denominado Plan de 1931 o Plan Profesional son:

- Se confía a las Escuelas Normales la formación del Magisterio primario, así como su perfeccionamiento, en colaboración con la Inspección profesional de Primera enseñanza.
- Las Escuelas Normales se organizan en términos de coeducación, con profesorado masculino y femenino. En cada provincia hay solo una Escuela Normal del Magisterio primario (y dos en Madrid y Barcelona y una en Santiago de Compostela y en Melilla).
- Se limita el número de plazas (según las necesidades generales de la enseñanza primara) y se ingresa por examen-oposición.
- Se exige el título de bachiller como requisito para la entrada.
- Las Normales ya no se ocupan de la cultura general, sino de la formación técnica o profesional.
- El Plan de estudios se divide en tres cursos de conocimientos de carácter pedagógico y filosófico, metodologías especiales y materias prácticas y artísticas; el cuarto año está destinado a realizar prácticas remuneradas en una Escuela Nacional. Tras superar ese curso ingresan en el escalafón general de maestros, a propuesta del Claustro de la Normal al Ministerio.

- Se establecen trabajos de seminario y trabajos de especialización en el tercer curso de los estudios.

- La preparación del Magisterio primario comprenderá tres períodos: uno de cultura general, otro de formación profesional y otro de práctica docente. Los aspirantes al Magisterio harán la preparación correspondiente al primer período en los Institutos Nacionales de Segunda enseñanza; la del segundo, en las Escuelas Normales, y la del tercero, en las Escuelas primarias nacionales.

La configuración del nuevo Plan de estudios está recogida en la figura 2.4 (p. 95).

La reforma en la formación del profesorado fue valorada en la *Revista de Pedagogía* en 1932 como una de las más trascendentales realizadas por la República, por su carácter profesionalizador, y también de enseñanza superior, más próxima a la universidad aunque no universitaria. El propio Rodolfo Llopis, padre de la reforma, considera que las Escuelas Normales se transforman en «centros de formación profesional y en instituciones de tipo universitario»[148], lo que supone un modelo de formación de maestros adelantado a su época y a la situación en su entorno europeo, y responde a las expectativas de varios sectores renovadores:

> Convertidas las Normales en Centros Superiores de Cultura y de Formación profesional, y constituyendo las metodologías la principal razón de su existencia, el Profesor deberá atender cuidadosa y fundadamente este carácter técnico y profesional de la Escuela, sin que ello signifique abandono u olvido del aspecto cultural general y humano[149].

Aunque la formación del magisterio no era, propiamente hablando, universitaria. La *Revista de Pedagogía* se hace eco de las propuestas de reforma de la preparación del Magisterio:

[148] Llopis Ferrándiz, Rodolfo: «Propósitos y realidades. Ocho meses en la Dirección General». *Revista de Pedagogía*, 1932, **121**, pp. 2–6. Cita en p. 5.

[149] Llopis Ferrándiz, Rodolfo: «Circular del Director General». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **93**, pp. 60–61. Cita en p. 60.

MATERIAS	**Horas/sem.**
PRIMER CURSO	
Elementos de Filosofía	3
Psicología	3
Metodología de las Matemáticas	3
Metodología de la Lengua y Literatura españolas	6
Metodología de las Ciencias Naturales y de la Agricultura	3
Música	2
Dibujo	2
Labores y Trabajos manuales [alumnas]	3
Trabajos manuales [alumnos]	3
Ampliación facultativa de idiomas	2
SEGUNDO CURSO	
Fisiología e Higiene	3
Pedagogía	3
Metodología de la Geografía	3
Metodología de la Historia	3
Metodología de la Física y Química	6
Música	2
Dibujo	2
Labores y Trabajos manuales [alumnas]	3
Trabajos manuales [alumnos]	3
Ampliación facultativa de idiomas	2
TERCER CURSO	
Paidología	3
Historia de la Pedagogía	3
Organización escolar	3
Cuestiones económicas y sociales	3
Trabajos de seminario	
Trabajos de especialización	
Enseñanzas del hogar [alumnas]	2
CUARTO CURSO	
Prácticas docentes	

Figura 2.4: Plan de Estudios de Magisterio de 1931.

> Algunos pretendimos hacer de la preparación del magisterio una carrera estrictamente universitaria, conforme a los principios y aspiraciones de la educación de nuestro tiempo; pero las circunstancias en que se hallaban nuestras universidades nos impidieron llevar a cabo tal medida. A falta de esto, se trató de dar a la carrera del magisterio lo más posible el carácter de la enseñanza superior[150].

La reforma de 1931 buscó una solución intermedia, ante la imposibilidad de poder llevar la preparación de todos los maestros a la universidad en España. Adoptó una solución, no como la de algunos Estados de Alemania, sino como la de Prusia, de exigir el bachillerato y convertir a las Normales en Escuelas profesionales, técnicas, de carácter superior, hasta el punto de que el profesorado tendría formación universitaria.

Para los redactores de la *Revista de Pedagogía*, «el próximo paso será convertir a las Normales en institutos pedagógicos anejos a las universidades»[151].

La República situó a personas relacionadas con el magisterio y con las Escuelas Normales en los más altos cargos del Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, lo que sin duda impulsó que se materializaran los cambios que venían tanto tiempo reclamándose:

> Gracias a la intervención de nuestro compañero Llopis, desde el elevado cargo que ocupa, y conocedor de las aspiraciones del profesorado normalista y de las necesidades de las Escuelas Normales, ha elevado a estos Centros a la categoría de Escuelas especiales, dando así satisfacción a los deseos, tantos años manifestados por la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales[152].

Si uno de los aspectos más aplaudidos de la reforma es la elevación del nivel de los estudios –con el consiguiente aumento de la preparación de los

[150] «La preparación del Magisterio, amenazada». *Revista de Pedagogía*, 1934, **151**, pp. 328–329. Cita en p. 328.

[151] «Notas del mes. La preparación del magisterio». *Revista de Pedagogía*, 1932, **131**, pp. 521–522. Cita en p. 471.

[152] Junta Directiva: «Al margen de lo legislado. Formación del Magisterio primario». *Revista de Escuelas Normales*, 1931, **84**, pp. 37–38. Cita en p. 38.

maestros pero también de su consideración social–, el otro es el carácter profesionalizador de dichos estudios, al aumentar en el Plan de 1931 la formación pedagógica y sustituir las asignaturas del Plan anterior por las metodologías respectivas, una de ellas la *Metodología de las Matemáticas*[153]. Un tercer aspecto muy valorado es la consideración de las prácticas de enseñanza y que se destinase un curso entero a la realización de prácticas remuneradas.

Hemos comentado la participación del profesorado normalista en la reforma; los profesores de matemáticas no son una excepción: Francisco Romero, José María Eyaralar, Luis Paunero y otros, desde la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales intervienen, no solo como meros observadores. Paunero declara: «En todo momento he sido defensor y he colaborado en lo posible a su desarrollo y a su gestación con el plan profesional»[154]. Así califica el plan profesional:

> *La evolución de la Escuela Normal en España, ha sido, por así decirlo, un salto y no un paso.* La vieja organización la tenía relegada a ser [...] un centro de enseñanza secundaria con algunos estudios de Pedagogía[155].

Precisamente este profesor de matemáticas valora que la reforma sitúa la formación de maestros en España, no al nivel de los países de Europa respecto a los que se consideraba hasta entonces que nuestro país estaba retrasado, sino incluso por delante de algunos. Por ello, cuando solicita a la JAE una pensión para viajar a Bélgica y Suiza, expone:

> En la orientación antigua hubiera sido prudente y acertado el conocer las organizaciones de las normales francesas. Por el conocimiento que tengo de sus textos y de sus programas y las impresiones recibidas por otros conductos, revistas y conversaciones con otros profesores

[153] A la que hemos dedicado el capítulo 5 de este trabajo.

[154] Paunero Ruiz, Luis: «El Congreso Internacional de Enseñanza de Bruselas. Comentarios». *Revista de Escuelas Normales*, 1936, **120**, pp. 132–133.

[155] Paunero Ruiz, Luis: «Memoria que presenta el profesor L. Paunero Ruiz aspirante a una pensión de ampliación de estudios en el extranjero, exponiendo las razones de su petición y plan que se propone seguir para el mejor aprovechamiento del tiempo». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Trabajos. R 123 089. JAE/P-19, Sevilla, 1932. Cita en pp. 4-5.

> que las han visitado, induzco que la nueva orientación de las Normales en España las coloca muy por encima, en cuanto a perfección y especialización, respecto a los centros similares en Francia.
>
> Suiza por el contrario tiene organizaciones normalistas muy análogas a las de nuestra Patria; son también escuelas profesionales semejantes a las nuestras con la ventaja sobre las españolas, que antes significaba, de decir, que, mientras en España han surgido bajo este aspecto por primera vez en este curso, en Suiza llevan ya el bagaje de la experiencia de más años de funcionamiento[156].

Algunos otros rasgos novedosos se referían a la coeducación, los libros de texto, las asociaciones de estudiantes y otras iniciativas, fruto de la mayor implicación del alumnado y del profesorado en la vida de la Escuela. En particular, los libros de texto se consideraban un instrumento auxiliar para el maestro y se pretendía que no tuvieran el lugar predominante que tienen en las escuelas.

Se constituyen asociaciones de alumnos en las Normales, tal como prevé el Reglamento (artículos 96 a 101). Eyaralar describe algunas acciones de la asociación de estudiantes en la Normal de Baleares, como costear una beca para algún alumno sobresaliente con escasos recursos y organizar conferencias en las que participan profesores y alumnos.

Otro proyecto que este profesor apoya y difunde es la creación de cantinas escolares en el mismo edificio de la Normal, al lado de las escuelas prácticas[157], iniciativa que, además de facilitar la práctica de los alumnos en Economía doméstica, desempeña una misión social, ya que

> no solo se aliviará la situación de muchas familias obreras, sino que, además, pasando los niños el día entero en la escuela, se resolverá el problema de los hogares en que los dos cónyuges trabajan a jornal para ganarse la vida y el de los que viven alejados, en los huertos que rodean la capital[158].

[156] Ibídem, pp. 4-5.

[157] En la que se crea en la Escuela Normal de Baleares, el Estado concede una ayuda de 2000 pesetas (que se emplearon en menaje) y el Ayuntamiento de Palma sufragó la instalación y el gasto de entretenimiento, aunque parvamente.

[158] Eyaralar Almazán, José María: «Opiniones». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **102**, pp. 80–81. Cita en p. 81.

2.4.2.1. Obstáculos a los que había de enfrentarse el Plan Profesional

A pesar de sus indudables ventajas, el Plan Profesional suponía grandes cambios, lo que implicaba también algunas adaptaciones y ajustes que suscitaron problemas y motivaron que incluso personas defensoras de la reforma cuestionaran aspectos concretos de ella.

Uno de los puntos más polémicos fue la duración de los estudios. Exigir el bachillerato para la entrada a las Normales suponía añadir un periodo de seis años para convertirse en maestro. Ciertamente era éste uno de los factores que elevaban la categoría de las Escuelas Normales a la de Escuelas Técnicas o Superiores y equiparaba –en cierto modo– la formación para el magisterio a la de un nivel similar al universitario.

En este sentido, Ángel Llorca, director del Grupo Escolar Cervantes, un maestro comprometido con los movimientos pedagógicos más renovadores, señala: «Se ha hecho una Revolución política que exige una revolución pedagógica. [...] La República no puede consentir que vayan a las nuevas escuelas maestros sin preparación suficiente»[159]. Sin embargo, la Junta Directiva de la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales, pone el acento en el inconveniente que supone la larga duración de los estudios, con un bachillerato que resultaba caro para las familias humildes, de las que se nutren las Normales. Por ello propone que los alumnos adquieran una cultura general en tres años en las mismas Normales[160].

También Modesto Bargalló, profesor de física, química y ciencias naturales en la Normal de Guadalajara y director de la *Revista de Escuelas Normales*, critica en 1932 la exigencia del bachillerato[161]. Denuncia que en las oposiciones de ingreso celebradas no acudieron a las Normales ni maestros ni bachilleres, los primeros por carecer de recursos económicos y los segundos porque se encaminaban hacia carreras más prestigiosas socialmente y más lucrativas, por lo que solo los fracasados del bachiller se acabarían interesando por la enseñanza Normal. El procedimiento de ingreso lo considera injusto

[159] Llorca García, *A nuevo Estado...*, op. cit., p. 222.
[160] Junta Directiva, *Al margen de...*, op. cit.
[161] Bargalló Ardevol, Modesto: «La segunda llamada». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **91**, p. 16.

mientras no se ofreciesen becas. Propone transformar el procedimiento de ingreso (no así la coeducación y la colocación directa) y llevar a cabo en cinco años la formación cultural y profesional en las Normales.

Pero la Asamblea de la Asociación Nacional del Profesorado Numerario de Escuelas Normales, en la reunión celebrada los días 21 y 22 de diciembre de 1934, aprueba, entre las Conclusiones: «2.º La asamblea considera que no se puede mermar la cultura secundaria precisa para el ingreso en las Normales y, por tanto, que se debe exigir el bachillerato de siete años y no el de cinco»[162]. Pero que determinados grupos escolares y graduadas de capitales de provincias puedan expedir certificados mediante los que los niños que los obtengan puedan ingresar en el tercer año del bachillerato, por cuestiones pedagógicas y políticas (articulo 3.º).

Sáiz Salvat es otro de los profesores de Escuela Normal que, desde el principio, propone alargar dos años los estudios para descargar los cursos de asignaturas y poder darlas diariamente y no en días alternos, y complementar las explicaciones con prácticas, para así poder incluir la parte correspondiente a las metodologías especiales en las asignaturas correspondientes, tal como indicaba Decreto de 1914.

De todos modos, además del inconveniente del coste que podía tener para los alumnos unos estudios más largos, se hace eco de los temores de los propios profesores normalistas, ante el cambio radical que supone el que todo el contenido de las asignaturas sea de metodologías especiales: «El temor aparecido en la clase normalista de tener que estudiar diez años [...] y la posible desorientación de parte del profesorado normalista ante la probable obligación de explicar sólo *didáctica escolar* de su asignatura»[163]. Insiste en que hay suficiente contenido científico para explicar solo la didáctica escolar de cada asignatura, y expone un posible programa para la metodología de las matemáticas.

Ésta preocupación, sobre la que habitualmente no se insiste cuando se analiza este Plan, era algo lícito, al menos para aquellos profesores que con-

[162] «Asamblea de la Asociación Nacional del Profesorado Numerario de Escuelas Normales». *Revista de Pedagogía*, 1935, **157**, pp. 36–38, cita en p. 37.

[163] Sáiz Salvat, Felipe: «La enseñanza de las Matemáticas. Al margen de la Reforma de Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1931, **83**, pp. 3–5. Cita en p. 3.

sideraran en serio el elaborar una asignatura de carácter eminentemente didáctico, pues si algunos llevaban preparándose e introduciendo en sus clases –aun con el plan de estudios anterior– cuestiones relativas a la didáctica de su disciplina –estudiaremos sus propuestas en los siguientes capítulos–, para otros, quizá la mayoría, debía suponer alguna inquietud. Francisco Romero solicita en 1932 una pensión a la Junta por este motivo: «Ha cambiado la función del profesorado de estos Centros, sustituyendo la enseñanza de las Asignaturas por la Metodología de la misma, *cosa para la que evidentemente no estamos preparados los Profesores de Escuelas Normales españolas*»[164].

Y a esto se añadía otra circunstancia, la unificación de las Normales masculinas y femeninas, que hizo que muchos profesores hubiesen de dejar de impartir la asignatura que venían impartiendo durante años y encargarse de otra diferente, aunque fuese de la misma rama (Ciencias o Letras). Precisamente esto le ocurre a Eyaralar y a Romero, quienes solicitan sendas pensiones a la JAE en 1936, argumentando este cambio de asignatura. Romero explica en su petición que considera mucho más difícil la formación didáctica que la propiamente disciplinar, por ser la última –en Ciencias Naturales– más susceptible de adquirir mediante el estudio autónomo:

> El nuevo Plan de enseñanza de Escuelas Normales exige que cada profesor contribuya a la formación profesional de sus alumnos con el estudio teórico y práctico de la asignatura a él encomendada. Ahora bien, es frecuente [...] en el acoplamiento del personal a las necesidades del nuevo Plan, el tener que abandonar una asignatura largos años explicada por otra menos trillada y dominada. En este caso, al Profesor consciente de sus deberes se le plantea el doble problema de renovar su propio contenido científico y a la vez el de la formación pedagógica de sus alumnos en la nueva materia a él confiada. El primer problema, con buena voluntad, e interés, puede resolverse; pero no el segundo, que le obligará a efectuar una serie de tanteos y ensayos que le harán perder un tiempo precioso con grave perjuicio de los futuros maestros[165].

[164] Romero Carrasco, Francisco: «Carta dirigida al Sr. Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios, 24 de febrero de 1932». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Expediente JAE / 127-453, pp. 41-43, 1932. Cita en p. 42. La cursiva es nuestra.

[165] Romero Carrasco, Francisco: «Carta dirigida al Sr. Presidente de la Junta para

Tal como lo vemos, estos cambios de asignatura podían hacer peligrar la formación metodológica, que justamente era uno de los 'puntos fuertes' del Plan Profesional.

El Reglamento de Exámenes de 17 de abril de 1933 (artículo 32) establece que no hace falta aprobar todas las asignaturas, ni siquiera obtener una puntuación mínima, para aprobar el curso en la Normal si la calificación media del conjunto de todas las asignaturas es de 5 puntos.

La profesora[166] de Tarragona Luisa Alonso Martínez, miembro de la Junta Directiva de la Asociación de Profesores Numerarios de Escuelas Normales, opina que estas nuevas normas

> si bien para el que las concibió resultan fáciles de aplicar, y justas, en el momento de la aplicación real han resultado injustas, extraordinariamente injustas [...] En este caso, el prestigio de los profesores que no han aprobado a los alumnos, a pesar de lo cual han pasado, se resiente, porque para lo por venir pueden muy bien asistir de cuerpo, pero no trabajar con la debida atención, prescindiendo de aquellos profesores que sean más rigurosos o que la asignatura de que se trate le sea poco agradable, y esto no debe ser[167].

Eyaralar se hace eco de la opinión de esta profesora, y coincide con ella en que «la manera de calificar reglamentaria es peligrosa para la moral del alumno, para el prestigio del profesor y para la preparación armónica de los futuros maestros»; describe el caso de «varios alumnos de una asignatura que han decidido no estudiarla, pensando, y con razón, que un punto sobre el aprobado en otras cinco asignaturas las compensan suficientemente», por lo que estaban aprobando alumnos que en alguna de las asignaturas habían obtenido un «cero absoluto»[168]. Pero además esto no ocurre en las Escue-

Ampliación de Estudios». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Expediente JAE / 127-453, pp. 44-46, 1936. Cita en pp. 44-45.

[166]Luisa Alonso era profesora numeraria de Labores.

[167]Alonso Martínez, Luisa: «Modificaciones necesarias al Reglamento en cuanto al modo de calificar a los alumnos». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **101**, pp. 62–63. Cita en p. 62.

[168]Eyaralar Almazán, *Opiniones*, op. cit., p. 80.

las de Ingenieros, donde si un alumno suspende lo examina un tribunal en septiembre.

Igualmente Paunero se queja de los exámenes y de que se pueda aprobar «sin saludar una asignatura»[169].

En realidad se podía elegir entre aplicar este artículo del Reglamento de 1933 o la Circular de 21 de mayo de 1932, en virtud de la cual se hacía repetir el curso a un alumno en cuanto no alcanzase la nota mínima de 5 puntos en una asignatura. Frente a cualquiera de estas soluciones proponen examinar a los alumnos en septiembre de las asignaturas no aprobadas.

Respecto a los Cuestionarios de las asignaturas de Metodología, en cuya elaboración había participado un grupo importante de profesores normalistas[170], se observa dos años después que son dispares y por ello se sugiere la necesidad de revisarlos y hacerlo por un procedimiento similar al de su primera elaboración, es decir, convocando a una reunión a los profesores de las distintas Escuelas Normales de cada asignatura[171].

España puso en marcha una reforma que, en conjunto, nos situaba muy adelantados respeto a países de nuestro entorno europeo. Paunero, que colaboró como congresista en el Congreso Internacional de Enseñanza de Bruselas, comparte en la *Revista de Escuelas Normales* las conclusiones de la IX Sección, referente a la formación del personal de enseñanza: «Las conclusiones establecidas [...] nos hacen pensar con satisfacción en cómo nuestra organización de Normales se ha adelantado a la resolución de problemas que ya nosotros habíamos establecido»[172]. Se refiere a separar la formación general de la profesional; formación general equivalente a la de las Humanidades completas; mejorar la situación material del profesorado para atraer a las élites; oposición para el ingreso a las Escuelas Normales con límite de plazas, etc.

[169] Paunero Ruiz, *El congreso internacional...*, op. cit., p. 133.

[170] Hemos comentado esa reunión en pp. 315 y sig.

[171] Eyaralar Almazán, *Opiniones*, op. cit., pp. 80-81. Esto en realidad no es propiamente una crítica, sino una petición, motivada precisamente por los aspectos positivos de la primera reunión para elaborar los cuestionarios.

[172] Paunero Ruiz, *El congreso internacional...*, op. cit., p. 132.

No obstante, tras unos años de realización, «el problema que en su día se planteó acerca de la reforma del plan profesional, que es indudablemente necesaria, ha quedado de nuevo dormida»[173]. Por ello Paunero, a la vuelta del congreso citado, y con la perspectiva que le dio, propone un listado de asuntos que requieren modificaciones necesarias y que habían sido señaladas por otros compañeros, profesores normalistas como él:

- Metodologías mal colocadas, en primer año las especiales (matemáticas, lenguaje, ciencias naturales) antes que la Pedagogía[174].
- Se deberían reducir cada año las materias de estudio y aumentar su profundidad.
- Calificaciones (problema que viene del Reglamento mismo).
- Traslados de matrícula. Pueden hacerse incluso dos meses después de comenzar el curso.
- Necesidad de organizar un nuevo cursillo como el de 1931, que hicieron un centenar de profesores.

Los inconvenientes que acabamos de comentar son puestos de manifiesto por personas partidarias de la reforma que hacen lo posible por llevarla a cabo de manera que pueda cumplir los objetivos que se planteaba. Junto a las críticas aportan soluciones alternativas que pueden, en la mayoría de los casos, ser asumidas sin que afecte al espíritu ni al propósito del Plan Profesional (el aspecto más controvertido es del de los requisitos de acceso y lo que les mueve es precisamente evitar que esos requisitos excluyeran a las clases sociales más humildes).

Otras críticas provienen de sectores conservadores y su intención es muy diferente. En 1934 los grupos parlamentarios de derecha y extrema derecha presentaron una proposición en el Parlamento pidiendo la derogación y la

[173]Ibídem.

[174]Son varios los profesores que critican la colocación de las metodologías de las matemáticas, del lenguaje y de las ciencias naturales, antes que la pedagogía, que da las normas generales, entre otras faltas de escalonamiento. Agudo, Marcelo: «Enseñemos eficazmente». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **95**, pp. 34–35.

reforma de la preparación del magisterio de 1931 y la vuelta al sistema de 1914. Una de las razones, hay quienes señalan[175] que es la principal, es acabar con la coeducación y dar carácter confesional a las Normales femeninas.

El Plan de 1931 estuvo vigente hasta la sublevación militar que acabó con la II República e instauró la dictadura del general Francisco Franco.

2.5. La JAE y la formación del magisterio

Estudiar la formación del magisterio en esa época supone un encuentro con la *JAE*, que es una referencia ineludible en el tema. Pero si enfocamos ese estudio a las cuestiones relativas a la metodología de las matemáticas, el campo se estrecha considerablemente. Y éste es el primer hecho que queremos constatar.

Marín Eced[176] hizo en 1991 una recopilación de las personas que disfrutaron de una beca de la Junta para temas educativos. En ella únicamente figuraban cinco que fueran becados para estudiar cuestiones relacionadas con la enseñanza de las matemáticas. Dos de ellos eran Castellá y De la Torre, ya citados (p. 70); los otros tres eran profesores normalistas. Sus datos aparecen en el cuadro adjunto (figura 2.5, p. 106). Para otras metodologías específicas, el número de becas que refiere esta autora fue bastante mayor; por ejemplo, para una materia tan cercana como la metodología de las Ciencias menciona quince becas.

Los tres becados eran profesores de Escuela Normal y cada uno de ellos publicó, entre 1933 y 1935, una obra sobre metodología de las matemáticas, en la que recogía su experiencia como profesor de la asignatura del mismo nombre que había introducido en los estudios de Magisterio el nuevo Plan de la República. De estos tres profesores, el que más contribuyó a la difusión de nuevas ideas para la enseñanza de las matemáticas fue José María Eyaralar; el propio Luis Paunero recoge bastantes publicaciones suyas en la bibliografía sobre enseñanza de las matemáticas que elaboró y que figura como apéndice en su libro de metodología.

[175] *La preparación del Magisterio, amenazada*, op. cit.

[176] Marín Eced, Teresa: *Innovadores de la Educación en España.* Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca, 1991.

Profesores Normalistas pensionados por la J A E en relación con la Metodología de las Matemáticas			
Pensionado	Año / País	Tema de trabajo	Actividad docente
Eyaralar Almazán, José María	1923 / Francia	Educación. Metodología de las Matemáticas	Escuelas Normales de Cádiz, Barcelona y Palma de Mallorca.
Paunero Ruiz, Luis	1933 / Suiza y Bélgica	Educación. Metodología de las Matemáticas	Escuela Normal. Facultad de Ciencias. Sevilla
Romero Carrasco, Francisco	1922-23 y 1927-28 / Francia, Bélgica y Suiza	Educación. Metodología de las Matemáticas	Escuelas Normales de Segovia y Ciudad Real. Universidad popular de Segovia

Figura 2.5: Profesores Normalistas pensionados por la JAE en relación con la Metodología de las Matemáticas

Las solicitudes de becas a la JAE presentadas por **José María Eyaralar** dejan constancia de que su interés por las matemáticas y su enseñanza era antiguo. En 1914, cuando ya era licenciado en Químicas, pero antes de ingresar en la Escuela Superior del Magisterio, solicitó a la JAE una pensión para «ampliar en el extranjero los estudios que tiene hechos en la ciencia matemática»[177], concretamente estudiar Análisis y Mecánica con el profesor Paul Apell o Análisis Matemático con Émile Borel. Y en 1919 y 1921, estando en las Normales de Cádiz y Barcelona, respectivamente, como profesor de Matemáticas, realizó sendas solicitudes para estudiar la enseñanza de las matemáticas en Francia en los niveles primario y normal[178]. En ésta ya solicita ir a Saint-Cloud, emplazamiento de la Normal Primaria Superior.

[177] Eyaralar Almazán, José María: «Carta al Excmo. Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Residencia de Estudiantes. Archivo JAE. Expediente JAE / 49-170, pp. 1-2, 1914. Cita en p. 1.

[178] Eyaralar Almazán, *Carta el Excmo... (1919)*, op. cit. Eyaralar Almazán, José María: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Residencia de Estudiantes. Archivo JAE. Expediente de José María Eyaralar, JAE / 49-170, pp. 6-7, 1921.

Finalmente, en 1922 solicita otra vez una estancia en París «para estudiar en Francia la enseñanza de las matemáticas desde la escuela primaria hasta la profesional de Saint Cloud, siempre con referencia a la Escuela Normal»[179]. Ésta última solicitud le fue concedida y el 10 de marzo de 1923 comienza a hacer uso de la pensión; pasó cinco meses en París observando la enseñanza de las matemáticas en las escuelas maternales, primarias y normales. A su vuelta presentó a la JAE una Memoria titulada *La enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas francesas*, que la Junta publicó en 1924[180]. En 1929, siendo ya profesor de Matemáticas de la Normal de Baleares (plaza que había permutado con Sáiz Salvat en 1923), solicitó de nuevo beca para estudiar la enseñanza de las matemáticas en Bélgica y Suiza, pero no le fue concedida. A partir de la reunificación de las Normales masculina y femenina, Eyaralar pasó a enseñar física y química y en 1936 solicitó a la JAE una nueva pensión para estudiar la enseñanza de la física y química; tampoco tuvo éxito.

Luis Paunero, también licenciado en Químicas, y profesor de Metodología de las Matemáticas en la Escuela Normal de Sevilla y en la Facultad de Ciencias, viajó en 1933 a Bélgica[181]. Solicitó la beca en 1932, argumentando que las nuevas orientaciones de las Normales precisaban que los profesores tuvieran formación previa y que, aunque él había recopilado una extensa bibliografía, era necesario ampliar esta información viendo experimentalmente medios y resultados en centros organizados de manera semejante[182]. En 1934, presentó a la Junta una Memoria sobre metodología de la matemática en las escuelas primarias de Bélgica y refirió varios artículos publicados en revistas como *El Magisterio Sevillano* y en la *Revista de Escuelas Normales*. Además impartió en aquel país tres conferencias: «L'enseignement qu'on ne connait pas», «La República Española y los problemas de la educación» y

[179] Eyaralar Almazán, José María: «Carta al Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Archivo JAE. Expediente JAE / 49-170, pp. 8-9, 1922. Cita en p. 8.

[180] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit.

[181] En el expediente de Paunero no consta que efectivamente estuviera en Suiza. Al parecer permaneció durante toda la estancia en Bélgica. Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Expediente JAE / 111-137.

[182] Paunero Ruiz, *Memoria que presenta...*, op. cit.

«L'enseignement normal en Espagne»[183]. En 1934 volvió a solicitar una pensión para estudiar en Bélgica, Suiza y Alemania la enseñanza del cálculo y las formas a los niños anormales[184], pero no le fue concedida.

Francisco Romero Carrasco obtuvo pensión de la Junta en varias ocasiones. Primero, en el curso 1922-23, siendo profesor de Matemáticas de la Escuela Normal de Segovia, para viajar a Francia, Bélgica y Suiza a estudiar la organización de las Escuelas Normales y la metodología aplicada en ellas a la enseñanza de las Matemáticas, aunque visitó escuelas de párvulos, primarias, medias y Normales, incluso centros de anormales. Antes de ese viaje había sido profesor de las colonias escolares del Museo Pedagógico Nacional los veranos de 1915, 1916 y 1917, y había dirigido las colonias de verano de la Institución Libre de Enseñanza el verano de 1918[185]. En el curso 1927-28, cuando era profesor en la Normal de Ciudad Real, volvió para estudiar la organización de la enseñanza en las Escuelas Normales y la metodología de las ciencias. En 1932 realizó otra petición a la Junta para ir a estudiar la metodología de las matemáticas en Francia, Bélgica, Suiza e Italia –pensión que no le fue concedida–. En 1936, cuando tras la reorganización de las Normales se le asignó la materia de *Metodología de las Ciencias Naturales*, consigue la última beca[186] –que tuvo que interrumpir a los pocos meses–, para estudiar las ciencias naturales y la metodología de esta materia en las Escuelas Normales de los mismos países anteriores. En realidad esta vez fue la única en la que se le concedió beca propiamente dicha, puesto que las dos anteriores lo que le otorgó la Junta fue la 'equiparación a un pensionado', lo que suponía que no recibía ayuda económica alguna, solo institucional.

Hemos contrastado la información de Marín Eced con la que figura en

[183] Paunero Ruiz, Luis: «Relación y justificantes de trabajos, publicaciones y conferencias». Archivo de la JAE. Expediente JAE / 111-137, pp. 51-53, 1934.

[184] Paunero Ruiz, Luis: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, 30 de enero de 1934». Archivo de la JAE. Expediente JAE / 111-137, pp. 49-50, 1934.

[185] Romero Carrasco, Francisco: «Carta dirigida al Sr. Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios, 24 de febrero de 1932». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Expediente JAE / 127-453, pp. 41-43, 1932.

[186] Romero Carrasco, *Carta dirigida... (1936)*, op. cit.

el archivo digitalizado de la JAE[187] y podemos completarla con la mención de otras personas que, si bien no figuran como becadas para estudiar la Metodología de la Matemática específicamente, sí tuvieron ocasión de conocer aspectos relacionados con ella, asistiendo a cursos, visitando centros, etc.

No hay que olvidar que las personas que fueron becadas para estudiar la organización de las escuelas primarias, asistieron a clases de matemáticas en dichos centros y tuvieron ocasión de ver cómo se organizaba la enseñanza de esta materia, considerada fundamental en cualquier plan de enseñanza primaria. Algunos de ellos publicaron obras específicas sobre la enseñanza de las matemáticas, como es el caso de **Félix Martí Alpera**[188], director del grupo escolar Baixeras, escuela aneja a la Normal de maestros de Barcelona, que visitó Francia, Suiza, Holanda, Dinamarca y Noruega.

Por otra parte, maestros e inspectores que viajaron en grupo también pudieron observar cómo era la enseñanza de las matemáticas en otros países. Es el caso de **Cándido López Uceda**, inspector, que presentó a la Junta una Memoria titulada *Primeras Lecciones de Aritmética*[189], tras viajar en 1921 con un grupo de inspectores y maestros a Francia y Suiza[190]; o de **Manuel González Linacero**, inspector, que viajó también en grupo a Francia en 1921 y que varios años más tarde escribió un libro de geometría para la escuela primaria[191].

Los profesores de Escuela Normal que fueron a estudiar la enseñanza de las Ciencias, eran a la vez profesores de matemáticas en sus centros y también se interesaron por la enseñanza de esta materia. Así nos consta de **Margarita Comas Camps** y de **Aurelio Rodríguez Charentón**, que publicaron obras sobre la enseñanza de las matemáticas en las escuelas primarias. De hecho, Charentón dejó su puesto de profesor en la Escuela Normal para ejercer

[187]Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE.

http://archivojae.edaddeplata.org/jae_app/, fecha de la consulta 10 de octubre de 2015.

[188] «Expediente de Félix Martí Alpera, JAE/160-229 y JAE/97-177». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE. Consultado el 15 de octubre de 2015.

[189]López Uceda, *Primeras lecciones de Aritmética*, op. cit.

[190]En el archivo de la JAE citado figura que viajó a Francia. Sin embargo, su Memoria comienza así: «Visitando las escuelas de Suiza y Francia, hemos visto llevadas a la práctica...». Ibídem, p. 287.

[191]González Linacero, Manuel: *Inventando Geometría*. Imp. y Lib. Religiosa de Jesús López, León, 1927.

de maestro. Era maestro en Madrid y, al egresar de la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio, ocupó una plaza de profesor de Física, Química, Historia Natural y Agricultura en la Normal de La Laguna a finales de 1927. La permutó por una plaza de Matemáticas en 1928 y en 1930 se le concedió el traslado a Pontevedra, también como profesor de Matemáticas. Pero pidió excedencia para ser maestro en el colegio La Paloma de Madrid ese mismo año. En 1937 vuelve a ocupar una plaza de profesor de Metodología de la Física y de la Química en la Normal de Jaén, que compaginó, en 1938, con la de Metodología de las Matemáticas, entre otras[192]. Comas solicitó pensión para realizar su tesis doctoral en química la primera vez; luego, siendo profesora de Física, Química e Historia Natural de la Normal de Santander, estuvo en Inglaterra en 1920 para estudiar ciencias y su metodología; y en París en 1926, cuando ya era profesora de Ciencias Físico-Naturales en la Normal de Tarragona, para estudiar biología[193]. En las bibliografías de los libros de Eyaralar figuran obras de Comas y de Charentón.

También hay que considerar el caso de profesores de matemáticas que no solicitaron la pensión para estudiar la metodología de esta ciencia, sino para cuestiones más generales relacionadas con la educación, pero que vieron cómo se enseñaban las matemáticas, asignatura que impartían en España. Por ejemplo, **Visitación Puertas Latorre**, profesora de Matemáticas de la Escuela Normal de Guadalajara, vicepresidenta de la Junta de la Asociación Nacional de Profesores de Escuelas Normales. Tras solicitar varias becas –una de ellas para estudiar la enseñanza de las matemáticas en la Escuelas Normales y en las primarias y secundarias–, que no le concedieron, en 1927 viajó a Francia y a Bélgica para estudiar cuestiones relacionadas con la formación profesional de los futuros maestros. Había presentado a la Junta el trabajo «Sobre lo profesional en las Normales» y, tras su viaje, presentó el trabajo titulado «La formación profesional del Magisterio en las Escuelas Normales de Francia y Bélgica»[194], obra en la que recoge ejemplos de actividades mate-

[192] López Martínez, José Damián: *Aurelio Rodríguez Charentón, un maestro en el olvido*. Editum. Ediciones de la Universidad de Murcia, Murcia, 2014.

[193] «Expediente de Margarita Comas Camps. JAE/37-589». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

[194] «Expediente de Visitación Puertas Latorre. JAE/118-593». Residencia de Estudian-

máticas observadas en escuelas anejas en Francia y de cuadernos de didáctica –incluye aspectos de matemáticas– de alumnos normalistas en Bélgica.

Otras personas que fueron importantes para el movimiento renovador de la enseñanza de las matemáticas en la Edad de Plata no fueron becadas por la Junta, a pesar de haberlo solicitado en varias ocasiones[195]. Es el caso de **Felipe Sáiz Salvat**. Este profesor solicitó beca a la JAE en varias ocasiones, todas ellas en un corto espacio de tiempo, mientras estaba en la Normal de Baleares: en 1916 solicitó una pensión individual para viajar a Zurich y Ginebra; en 1920 a Lausanne y Bruselas; en 1921 pidió, primero, ser incluido en un grupo de pensionados y, unos meses más tarde, una pensión individual; en 1922 solicitó pensión en dos ocasiones, pero la Junta consideró que estaba fuera de plazo en la primera de ellas; la última solicitud fue de 1923, para viajar el grupo, siempre a países de habla francesa. Finalmente no le fue concedida ninguna de estas becas –probablemente en aquella época la JAE no consideró suficientes sus méritos; en su expediente figura un trabajo muy modesto de 1922[196]–, solicitadas para estudiar la Metodología didáctica de las Matemáticas en la escuela primaria y en la Normal. Una vez que se trasladó a la Normal de Barcelona, en septiembre de 1923, no volvió a solicitar beca.

Tampoco le fue concedida beca a **Federico Landrove Moiño**[197], profe-

tes, Archivo JAE. Consultado 10-10-2015.

[195]No enumeramos aquí la relación completa de personas –en particular profesores normalistas– que solicitaron y no obtuvieron beca para estudiar la metodología de la matemática. Nos centramos en aquéllas que, aun habiendo solicitado y sin obtener beca, son relevantes para nuestro estudio, por su actividad posterior o sus publicaciones. Por ejemplo, Josefa Pérez Solsona, que había estudiado en la Escuela Superior del Magisterio, siendo profesora de Matemáticas en la Escuela Normal de Zaragoza, solicitó en 1923 ser incluida en un grupo para ir a a estudiar la Metodología de las Matemáticas en las Escuelas primarias y Normales a un país de habla francesa (había solicitado ir a Francia y Bélgica en 1913 y 1914, en grupo, para estudiar la enseñanza de las ciencias naturales). «Expediente de Josefa Pérez Solsona. JAE / 114-360». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE.

Es posible que haya algún profesor o profesora de matemáticas de Escuela Normal con unas circunstancias parecidas, pero no lo hemos considerado relevante para el estudio que pretendemos realizar.

[196]Sáiz Salvat, Felipe: «Notas sobre metodología didáctica de la Aritmética». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Expediente JAE 130-56, pp. 14-20, 1922.

[197]Federico Landrove fue nombrado Director General de Primera Enseñanza, por Decreto de 9 de mayo de 1933 (Gaceta de Madrid, n.º 132, de 12 de mayo de 1933, p. 1092).

sor de la Normal de Valladolid, que pide pensión para estudiar, en Francia y Suiza, la *Metodología de la Geometría*, en 1924. En 1913 ya había solicitado beca para estudiar la metodología de las ciencias físicas[198].

2.5.1. La Memoria presentada a la JAE por José María Eyaralar

A la vuelta de su estancia en Francia, Eyaralar presentó el preceptivo informe a la Junta, «La enseñanza de las matemáticas desde la escuela primaria hasta la profesional». Este informe fue publicado en 1924 en los Anales de la JAE con el título *La enseñanza de las matemáticas en las escuelas francesas*[199]. Francesca Comas en su tesis doctoral[200] realizó un amplio estudio acerca de la estancia de Eyaralar en Francia a partir de la Memoria.

En este trabajo queremos comparar esa Memoria con obras anteriores y posteriores, para tratar de determinar cuál fue la aportación del viaje a la trayectoria profesional de Eyaralar, más concretamente, en qué medida el *modelo epistemológico* y el *modelo pedagógico* de las matemáticas se vieron reforzados o modificados a causa de su conocimiento más profundo y real de la enseñanza de la matemática en el país vecino.

2.5.1.1. Formación antes de viajar a Francia

Antes de su viaje a Francia, Eyaralar ya tenía una buena formación sobre metodología de las matemáticas. Era licenciado en Química y había estudiado después en la Escuela Superior del Magisterio, obteniendo el número uno de su promoción. Aprobó las oposiciones a cátedras de matemáticas de Instituto y de Escuelas Normales y fue profesor en varias de dichas Escuelas, entre ellas la de Barcelona. Había realizado una reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas, que se puede detectar en las actividades realizadas como

[198] «Expediente de Federico Landrove Moiño. JAE/83-55». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

[199] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit.

[200] Comas Rubí, Francesca: *Les relacions de la JAE (Junta para la Ampliación de Estudios) amb Balears. Els viatges pedagògics i la renovació educativa.* Tesis doctoral, Universitat de les Illes Balears, 2000.

profesor de Escuela Normal (programas para las asignaturas de Aritmética y Geometría[201] y de Álgebra[202], exposición de materiales didácticos...) y en las obras que escribió antes de su estancia en Francia.

Para conocer las ideas de Eyaralar sobre la matemática y su enseñanza antes de viajar a Francia, nos basamos en sus trabajos anteriores y también en la información que figura en su expediente en el archivo de la JAE, concretamente en los méritos que alega en las peticiones de pensión. Entre éstos últimos se encuentran los siguientes trabajos: «Metodología de las Matemáticas», memoria de final de estudios presentada en la Escuela Superior del Magisterio[203]; «Sobre la cantidad y el número», memoria presentada en las oposiciones a la cátedra de la Escuela Normal de Cádiz; «Teoría de la proporcionalidad», memoria presentada en las oposiciones a la cátedra de Matemáticas del Instituto de Las Palmas; y «Cuestiones de Aritmética mercantil», memoria presentada en las oposiciones a la cátedra de la Escuela Normal de Barcelona[204].

Escribió varios libros, que estudiaremos en otros capítulos, aunque ahora, para detectar cuestiones que Eyaralar, antes de su viaje a Francia, consideraba importantes para la enseñanza de las matemáticas, nos centramos en dos de sus obras, el *Nuevo Tratado de Aritmética*[205], publicada en 1922, y el *Nuevo Tratado de Geometría*[206] que, aunque publicada en 1924, el mismo año de su *Memoria*, la hemos considerado anterior a su experiencia en las

[201] Eyaralar Almazán, José María: «Escuela Normal de Maestros. Programa de Aritmética y Geometría. Curso de 1922 a 1923». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Trabajos. R 121 842.

[202] Eyaralar Almazán, José María: «Escuela Normal de Maestros. Programa de Álgebra. Curso de 1922 a 1923». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Trabajos. R 121 841.

[203] En el libro sobre este centro editado por Antonio Molero y María del Mar del Pozo figuran varias Memorias sin posibilidad de filiación, una de ellas titulada «Sobre Metodología de las matemáticas», que bien pudiera ser la de Eyaralar.

[204] «Expediente de José María Eyaralar, JAE/49-170». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

[205] Eyaralar Almazán, José María: *Nuevo Tratado de Aritmética*. Reus, Madrid, 1922.

[206] Eyaralar Almazán, José María y Cebrián, Francisco: *Nuevo Tratado de Geometría*. Reus, Madrid, 1924.

escuelas francesas por varias razones: se trata de una obra mucho más parecida en su estructura y formato al *Nuevo Tratado de Aritmética* que a sus obras posteriores; además, consta de dos partes, ambas demasiado extensas para haber sido escritas en un corto periodo de tiempo, más aún si se tiene en cuenta que la segunda parte corresponde a otro autor; por último, afirmaciones como «Las consideraciones generales de carácter pedagógico hechas en nuestro Nuevo Tratado de Aritmética, son aplicables a la Geometría»[207], dan a entender que posiblemente la redacción de este libro debía de estar bastante adelantada cuando quizá la interrumpió para disfrutar de la beca y por ello no hallamos en el *Nuevo Tratado de Geometría* ninguna referencia a la escuela francesa, mientras que sí la hay en libros posteriores. En realidad, en la petición que hizo Eyaralar a la Junta para solicitar la beca en marzo de 1922, decía tener en preparación las obras *Nuevo Tratado de Aritmética* y otro libro titulado *Álgebra y Trigonometría*, ambos aceptados para publicarlos por la editorial Reus –a la que pertenece también el libro de geometría que finalmente se publicó– y éste último en colaboración con Francisco Cebrián, catedrático de matemáticas del Instituto de Zaragoza, y coautor del *Nuevo Tratado de Geometría* (Eyaralar figura como autor de la Planimetría y Cebrián de la Estereometría). En este libro Eyaralar cita un supuesto tratado de Álgebra suyo –no dice nada de Trigonometría– sobre el que no hemos encontrado referencia alguna en ninguna red de bibliotecas ni tampoco lo hemos hallado citado en ninguna fuente[208]. Son motivos para su-

[207] Ibídem, p. 7.

[208] Ello no supone necesariamente que no se publicara dicho libro. No hay que olvidar que al comenzar el régimen franquista no solo se prohibieron y destruyeron libros, más aún, se intentó borrar la memoria de las personas no afectas al régimen y de sus obras. De hecho hemos localizado y adquirido un libro escrito por Eyaralar para el primer curso de Bachillerato del año 1936, *Nociones de Aritmética y Geometría. Primer curso* (Eyaralar Almazán, José María: *Nociones de Aritmética y Geometría. Primer curso.* Sardá, Guadalajara, 1936), que no encontramos en biblioteca alguna ni tampoco lo hemos visto citado, salvo en Villalaín Benito, José Luis: *Manuales escolares en España. Tomo III. Libros de texto autorizados y censurados (1874-1939).* UNED, Madrid, 2002. En cualquier caso, en la lista de los libros publicados en febrero de 1936, que presentó como mérito a la Junta para la solicitud de una nueva pensión, no figuran otros que los cinco anteriores a ese año que utilizamos en esta Tesis doctoral, por lo que, antes de 1936 no debió escribir nada más que cinco libros, contando la Memoria publicada por la JAE.

poner que el tratado sobre geometría estaba en preparación, como lo estaba también en ese momento el de aritmética.

En estos libros se advierte la importancia que confería Eyaralar a la enseñanza de las matemáticas en Francia, se manifiesta en las obras francesas que conocía y valoraba. En la bibliografía del *Nuevo Tratado de Aritmética* figuran 22 libros, de los cuales 14 no son de autores españoles, concretamente 10 en francés y uno de Laisant traducido; y de los 25 libros que figuran en la bibliografía del *Nuevo Tratado de Geometría*, 14 son de autores extranjeros, 9 de ellos en francés. De hecho en 1919, como muestra de su preparación a la Junta, alega:

> Habiéndome preparado a tal fin, no sólo con la adquisición de los conocimientos, y las prácticas de enseñanza que suponen los méritos y servicios alegado, sino además con el estudio de los textos de matemáticas que me he podido procurar (Chollet, Leysenne, Borel, Mahler, Glaeser, Schubert, etc.)[209].

La bibliografía destaca también otros aspectos que Eyaralar consideraba importantes para la enseñanza de las matemáticas; por ejemplo, la historia de la matemática, la matemática recreativa o las obras de matemática aplicada a otras disciplinas, como la aritmética mercantil.

A pesar de su defensa de un estudio razonado de las matemáticas, la preocupación por hacer la enseñanza activa e intuitiva, agradable a los niños, era ya patente en sus primeros trabajos. Así lo expresa en el *Nuevo Tratado de Aritmética*, refiriéndose a la necesidad de utilizar objetos concretos para el cálculo. Pero no sólo en lo referente al cálculo; para la geometría ya propone en el *Nuevo Tratado de Geometría* arrollar una cuerda a una esfera y a la cara lateral de un cilindro circunscrito para comprobar la igualdad de sus áreas. Esta preocupación por hacer la enseñanza activa e intuitiva está en consonancia con la importancia que concedía a la utilización de materiales y a la relación de las matemáticas con la vida diaria.

Acerca de la importancia de la utilización de materiales en la enseñanza, en el *Nuevo Tratado de Aritmética* se refiere a la necesidad de usar objetos

[209] Eyaralar Almazán, *Carta el Excmo... (1919)*, op. cit., p. 4.

de la vida diaria para el cálculo. Y en cuanto a la geometría, en el *Nuevo Tratado de Geometría* figuran tanto materiales e instrumentos geométricos para construir los propios alumnos, como cuestiones que hacen referencia a materiales conocidos, para reflexionar sobre importantes propiedades geométricas. Precisamente en 1922 organizó en la Normal de Barcelona una exposición de materiales realizados por sus alumnos. Uno de los méritos que presentó a la Junta fue un informe del Secretario de la Escuela Normal acreditando la relación de materiales y sus autores, en el que ya figuraba: «Cilindro y esfera de igual área para su comprobación experimental», realizado por el alumno Fábregas Pedrals[210].

El aprovechamiento de los recursos del entorno para enseñar matemáticas concuerda con las finalidades que atribuye a la educación matemática Eyaralar quien, entre las indicaciones pedagógicas de su *Nuevo Tratado de Aritmética* destaca que «La enseñanza ha de preparar para la vida»[211]. De hecho, en los ejercicios propuestos en este libro hay muchos referidos a situaciones o contextos reales. Es más, en sus obras repensaba y modificaba los enunciados de los problemas, para adaptarlos al momento; así lo podemos constatar comparando un problema del *Nuevo Tratado de Aritmética* con el correspondiente de otra obra posterior, *Aritmética intuitiva*:

> *Nuevo Tratado de Aritmética*: «Hablan el castellano, aproximadamente, 20 millones de españoles; 13 de mejicanos; 4 de antillanos; 23 en las repúblicas sudamericanas, y unos 6 millones en África y Oceanía. ¿Cuál es el número de habitantes del globo que hablan castellano?»[212].
>
> *Aritmética intuitiva*: «Hablan el castellano, aproximadamente, 22 millones de españoles; 14 de mejicanos; 4 de antillanos; 25 en las repúblicas sudamericanas, y unos 6 millones en África y Oceanía. ¿Cuál es el número de habitantes del globo que hablan castellano?»[213].

[210] Eyaralar Almazán, José María: «Nota de los trabajos presentados por los alumnos de Matemáticas para la futura exposición. Escuela Normal de Barcelona». Expediente JAE / 49-170, pp. 10-11, 1922.
[211] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 23.
[212] Ibídem, p. 167.
[213] Eyaralar Almazán, José María: *Aritmética Intuitiva*. Reus, Madrid, 1932, p. 37.

De igual modo, en el *Nuevo Tratado de Geometría* hallamos numerosos ejemplos y problemas que tratan de responder a contextos reales.

La Historia de la Matemática es otro de los recursos de los que se sirvió Eyaralar en sus obras, para contextualizar los conocimientos matemáticos. Sus primeros libros, tanto el *Nuevo Tratado de Aritmética* como el *Nuevo Tratado de Geometría*, ya contienen referencias históricas sobre la numeración, el Sistema Métrico Decimal, etc., o sobre matemáticos conocidos. También resulta interesante ver los tipos de problemas presentes en su primer libro. En él no hay solamente ejercicios de aplicación –para comprobar si se ha comprendido– y problemas prácticos sobre situaciones concretas o reales. A pesar del interés por relacionar la matemática con la vida diaria y hacer su enseñanza más intuitiva, es consciente de la necesidad de proponer también a sus alumnos problemas sobre cuestiones teóricas, como éstos: «¿En cuánto aumenta el resto si se disminuye al divisor en una unidad? Generalizar»[214] «¿Cómo viene modificado un número de tres cifras abc si se invierte el orden de ellas?»[215]. Un ejemplo de este tipo de problema en el *Nuevo Tratado de Geometría* es, tras explicar cómo se hace en la realidad el trazado de alineaciones en el terreno, la pregunta «¿Cuál es el fundamento de estas operaciones?»[216].

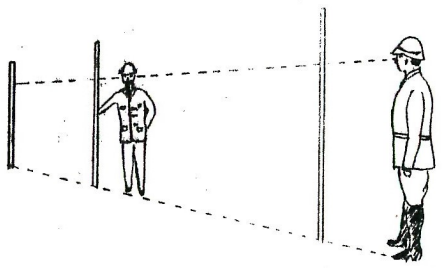


Figura 2.6: Eyaralar. Alineaciones

Estos problemas teóricos muchas veces los resolvía de forma gráfica, de acuerdo con el carácter intuitivo que confería a la enseñanza. Por ejemplo,

[214]Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 181.
[215]Ibídem, p. 182.
[216]Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 19.

«Para multiplicar un producto de varios factores por un número, basta multiplicar cualquiera de los factores»[217]. Es un ejemplo de cómo trabajar una propiedad aritmética, con un soporte geométrico. Ejemplos como éste abundan en el *Nuevo Tratado de Aritmética*. Y entre los materiales que habían expuesto sus alumnos normalistas en Barcelona había algunos que servían precisamente para eso: «Representación stereográfica del producto $2 \cdot 3 \cdot 5$ [...] Representación gráfica de $(a - b)^2$»[218]. De hecho, en el *Nuevo Tratado de Geometría* llega incluso a defender la conveniencia de un programa conjunto para ambas materias. Sobre ésta y otras ideas reflexionó más tarde al observar la enseñanza de las matemáticas en Francia.

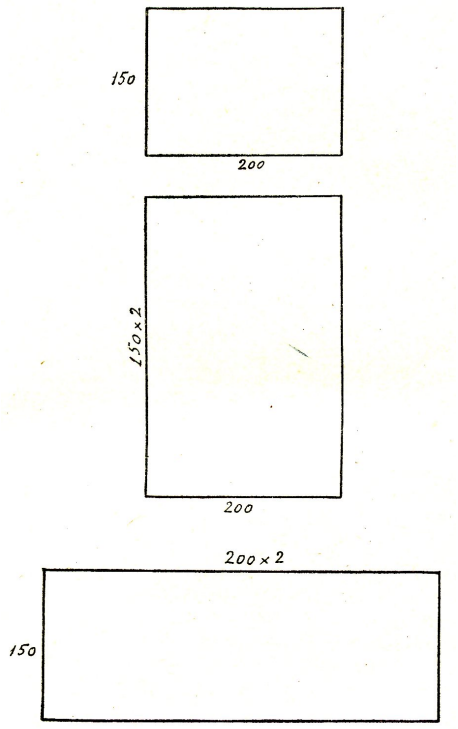


Figura 2.7: Eyaralar. Propiedad aritmética con soporte geométrico

[217] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 75. Figura 2.7, p. 118.
[218] Eyaralar Almazán, *Nota de los trabajos...*, op. cit.

2.5.1.2. La Memoria presentada a la JAE

La Memoria que Eyaralar presentó a la JAE fue publicada en 1924 en los Anales de la JAE con el título de *La enseñanza de las matemáticas en las escuelas francesas*. Modesto Bargalló escribió una reseña de esta obra en la *Revista de Escuelas Normales*, alabando la Memoria, de la que destaca que no solo consiste en una exposición de lo visto, sino que se acompaña de juicios. De lo primero destaca la precisión con que describe todos los grados de la enseñanza francesa «y por los datos de inmediata aplicación a nuestras Escuelas, desde las de párvulos a la Superior del magisterio»; del segundo, «la perspicacia con la que han sido emitidas las observaciones críticas y las normas que deduce para la organización escolar española»[219]. Bargalló califica el trabajo de Eyaralar de obra de metodología de las matemáticas y, a propósito de ella, concluye alabando la labor de la JAE: «Trabajos tan hermosos como el de Eyaralar honran al profesorado de Escuelas Normales y justifica la elevada misión de la Junta de Ampliación de Estudios y su fructífera labor»[220].

El objeto del viaje era ver cómo se desarrollaban en la práctica las clases de matemáticas en las escuelas maternales, primarias y Normales. Observó las características de la enseñanza en todos estos niveles, los programas, las disposiciones y los exámenes oficiales, como el Certificado de Estudios Primarios o el Brevet Supérieur, al finalizar el periodo de estudios en las Normales, los libros y, por supuesto, la metodología realmente empleada.

Pasó por tanto por la escuela maternal, por todos los grados de la escuela primaria –sección preparatoria, grado elemental, grado superior y curso de «pre-aprentissage», para niños que no podían obtener el Certificado de estudios primarios–, estuvo en la escuela Primaria superior J-B Say, y tuvo ocasión de ver también la Escuela Normal e incluso la Escuela Normal Superior de Saint Cloud, centro encargado de la formación del profesorado de las Escuelas Normales y de las primarias superiores.

[219] Bargalló Ardevol, Modesto: «La enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas francesas, por José M.ª Eyaralar». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **27**, pp. 260–261. Cita en p. 260.

[220] Ibídem, p. 261.

Eyaralar dice de su Memoria que es «puramente informativa, por lo cual está nutrida de ejemplos, y en cambio la crítica se halla reducida a un mínimo, y es casi nula la comparación con nuestras escuelas, que hubiera resultado innecesaria y acaso dolorosa»[221], pero, desde luego, su lectura nos aporta datos interesantes sobre varios aspectos de la enseñanza de la matemática en Francia y, especialmente, de las ideas de Eyaralar acerca de estas cuestiones.

Destaca en la Memoria justamente aquellas cuestiones sobre las que tenía una reflexión previa. No es casual, por tanto, que las cuestiones que vamos a comentar coincidan con las inquietudes que hemos detectado en sus obras previas.

Uno de los aspectos que refleja con bastante detalle la Memoria, y que tiene estrecha relación con hacer la enseñanza más activa e intuitiva, es la relación de material existente en las escuelas francesas, aunque hay bastante diferencia entre las escuelas maternales y la escuela primaria. En relación con las escuelas maternales, destaca que las maestras «muestran un ingenio extraordinario para hacer intuitiva, activa y agradable la enseñanza del cálculo»[222], y recoge una amplia colección de materiales, sobre todo para el estudio de la aritmética, a los que atribuye la finalidad de «hacer la enseñanza del cálculo variada, activa, relacionada con la vida; obligar a los niños a observar, a comparar, a reflexionar, a ver el número por todas partes, permitiéndoles trabajar por sí mismos y corregirse cuando lo hagan mal»[223]; además aclara que la mayor parte de dicho material está construido en la misma escuela.

Sin embargo, cuando se trata de valorar la sección preparatoria (6-7 años), considera que no se fomentan lo suficiente la intuición y la actividad de los niños. Y en general, considera la escuela primaria francesa «un tanto seca y formalista, en lo que al cálculo se refiere»[224]. Concretamente, critica la falta de recursos intuitivos como la regla de cálculo descrita en el *Nuevo Tratado de Aritmética*[225]. Y, sobre todo, lamenta la falta de juegos colectivos, como los que él había visto en las aritméticas de Palau Vera y Nelson[226].

[221] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 3.
[222] Ibídem, p. 5.
[223] Ibídem, p. 7.
[224] Ibídem, p. 28.
[225] Esta regla la hemos descrito en el apartado 7.2.4.1, pp. 468 y sig.
[226] Palau Vera, J.: *Aritmética. Primer grado.* Seix Barral, Barcelona, 5.ª edición, 1931.

Aunque el reglamento de 1887, que regulaba la enseñanza primaria francesa en esos momentos, dice que «la enseñanza ha de ser intuitiva y práctica. Intuitiva, es decir, que ha de contar ante todo con el buen sentido natural, con la fuerza de la evidencia; práctica en el sentido de preparar para la vida»[227], en la escuela primaria, observa una enseñanza demasiado abstracta, en la que faltan materiales que apelen a la actividad del alumno, que impliquen el uso de varios sentidos y, en definitiva, que hagan intuitiva la enseñanza de la matemática.

En el caso de la geometría, concretamente, hay varias referencias en la Memoria al «carácter estático un poco anticuado»[228] que tenía esta materia en la escuela francesa. Sin embargo, en las primarias superiores sí se justifican y relacionan propiedades utilizando los movimientos[229]. Aquí merece la pena realizar alguna observación. Eyaralar había leído a Borel –figura en la bibliografía del *Nuevo Tratado de Geometría* y antes, en 1919, ya informa a la JAE de haber leído obras suyas–; pero la obra de Borel asume las ideas de Charles Méray de basar la geometría –y las justificaciones geométricas– sobre la noción de desplazamiento y hacer una geometría más intuitiva, más alejada de la abstracta geometría euclidiana. Y en el *Nuevo Tratado de Geometría*, algunos razonamientos geométricos están basados en las isometrías[230]. En su preparación previa se halla la razón de que Eyaralar pudiera percatarse de la diferente orientación de la geometría, más clásica en la escuela primaria y con una orientación más moderna en la primaria superior que visitó. En cualquier caso, en Francia conoció el libro de Méray *Nouveaux éléments de Géometrie*, que incluyó en la bibliografía que contiene la Memoria.

Entre los materiales elaborados para la exposición de la Normal de Barcelona el año antes de viajar a París figuran «Láminas para la Geometría del movimiento»[231].

1.ª edición de 1913.

Nelson, Ernesto: *Aritmética Inventiva*. Appleton y Cía, Nueva York, 1918. Primera edición de 1906.

[227]Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 17.

[228]Ibídem, p. 49.

[229]Modesto Bargalló en la reseña citada no diferencia las escuelas primarias superiores del resto, en lo que a la geometría del movimiento se refiere, aunque Eyaralar precisamente expone una situación muy diferente para estas escuelas.

[230]Ver el apartado 4.1.3, pp. 253 y sig.

[231]Eyaralar Almazán, *Nota de los trabajos...*, op. cit.

Señala además, a propósito de la enseñanza de la geometría en Francia, su falta de relación con la aritmética, la escasez de representaciones gráficas, en particular la resolución gráfica de problemas. Hay que tener en cuenta que entre los méritos que presenta a la Junta para solicitar la pensión está el haber traducido la *Ebene Geometrie*, de Mahler[232].

Otro de los aspectos valorados por Eyaralar durante su estancia en Francia es la importancia que se concede a los problemas en la enseñanza de la matemática. Así, destaca que para la obtención del certificado de estudios primarios, el examen consistía en resolver problemas; además: «Los problemas propuestos [...] tienen, además, una cierta especialización según la localidad, versando sobre cuestiones agrarias en los distritos rurales, y sobre asuntos urbanos e industriales en las ciudades»[233], lo que es un índice del interés de que los problemas se refieran a contextos reales para los alumnos. Destaca la publicación de colecciones de los problemas propuestos en los exámenes. En particular, alaba la importancia que se concede en Francia a la invención de problemas por los propios niños; años más tarde, en su libro *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría*[234], Eyaralar dedicará todo un capítulo a este tema.

No pasa por alto a una persona con su preparación, la inclusión en las lecciones francesas de problemas tanto teóricos como prácticos, «esto es, que versen sobre el descubrimiento de propiedades o sobre su aplicación»[235], y a pesar del gran valor que concede a los problemas que tratan sobre cuestiones reales, relacionadas con la vida y con la experiencia del propio niño, su amplia formación matemática le lleva a valorar los problemas teóricos.

También vio confirmada su utilización de la Historia de la Matemática, como recurso didáctico, relacionado con la motivación: «Se inicia la historia de las matemáticas (con mucho acierto, a nuestro juicio, por entrar el alumno en la edad en que aparecen los intereses humanos)»[236]. Aunque critica que,

[232] Eyaralar Almazán, *Carta el Excmo... (1919)*, op. cit., cita en p. 4. Esta traducción no fue publicada. La editorial Labor editó una traducción del libro de Mahler en 1927.
[233] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 29.
[234] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas....*
[235] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 22.
[236] Ibídem, p. 41.

por ejemplo, se incluya la historia del sistema métrico o las biografías de matemáticos ilustres y, sin embargo, falte la historia de la numeración, que Eyaralar considera «tan interesante por lo menos como ella»[237], y que él había recogido en el *Nuevo Tratado de Aritmética*. En realidad el empleo de la Historia que observa en Francia es más bien 'anecdótico', prescindible de cara a la construcción de los conocimientos matemáticos implicados, mientras que él, ya antes de su viaje, había empleado algunas cuestiones históricas para ayudar a esa construcción[238].

2.5.1.3. Influencia del viaje

La estancia en Francia permitió a Eyaralar contrastar sus ideas y experiencias sobre la enseñanza de las matemáticas con las de otros profesionales de diferentes instituciones de enseñanza francesas. Allí confirmó alguna de sus ideas y halló elementos de contraste para perfilar otras. Su obra escrita nos informa de esta evolución. Vamos a verlo a través de un par de cuestiones.

Uno de esos aspectos se refiere a la utilización de materiales concretos en la enseñanza, cuya importancia ya había sido señalada por Eyaralar en el *Nuevo Tratado de Aritmética* y el *Nuevo Tratado de Geometría*. Lo observado en Francia afianza sus ideas y le sirve de referencia en sus restantes trabajos, en los que suele describir materiales citados en su Memoria. En una conferencia que pronunció en Baleares al año siguiente de la publicación, *Conferencia sobre Aritmética Intuitiva*[239], insiste en las características que ha de tener la enseñanza de la matemática (carácter activo e intuitivo, relacionada con la vida, uso de la historia como recurso, etc.) y menciona varios de los materiales que vio en las escuelas maternales francesas.

Sobre todo en la *Metodología de la Matemática*, expone una relación de materiales que recoge la mayor parte de los que figuran en la Memoria –por ejemplo, recomienda que los niños confeccionen en la Escuela un «Álbum de Números» y otro «Álbum de Formas», con colecciones de objetos o grabados

[237] Ibídem, p. 41.

[238] Como se comentará en el apartado 3.1.1.1, pp. 157 y sig.

[239] Eyaralar Almazán, José María: *Conferencia sobre Aritmética Objetiva, dada en el Museo del Pedagógico Provincial de Baleares, el 10 de mayo de 1925*. Imp. de Guasp, Palma de Mallorca, 1925.

de objetos cotidianos, tal como había visto hacer en Francia–, y también hace hincapié en la conveniencia de construirlos en la propia escuela, incluso llega a proponer materiales que son adaptaciones de algunos vistos en Francia[240] (figura 2.8, p. 124).

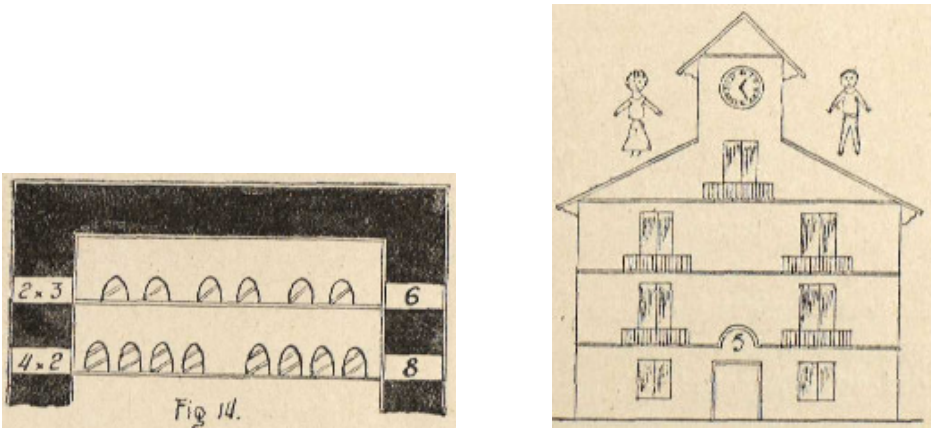


Figura 2.8: Eyaralar. «Escaparate del panadero» para la multiplicación y «Casa con balcones», para la división

El tipo de juegos observado en Francia le hace valorar, por contraste, los juegos colectivos, como los que él había visto en algunos libros españoles para la enseñanza primaria. En las obras anteriores a la estancia en las escuelas francesas no hallamos ejemplos de este tipo de juegos que, sin embargo, están muy presentes en las obras que publicó después, como la *Metodología de la Matemática*, y la *Aritmética Intuitiva*[241].

El otro ejemplo hace referencia a la geometría, cuyo carácter estático en la enseñanza primaria francesa había criticado. Se trata de la demostración que se hace del teorema de Pitágoras; la que observó en las escuela francesas no es la más intuitiva y propone otra tipo puzle (figura 8.4, p. 559). Esta demostración la recomendará en sus obras posteriores y dice que está tomada del libro de Mahler que había traducido[242]. Sin embargo, no aparecía en el *Nuevo Tratado de Geometría*, en el que había una demostración clásica

[240] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 11. También en: Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 198 y 199.
[241] Como se comentará en pp. 489 y sig.
[242] Eyaralar Almazán, Eyaralar Almazán, op. cit.

y formal. Parece que la estancia francesa le ayudó a valorar otro tipo de justificaciones y fue un acicate para buscar comprobaciones más intuitivas y constructivas. Por ejemplo, una de las cosas que ya hemos señalado que Eyaralar echó en falta en las escuelas francesas, y que confieren un carácter mucho más intuitivo a la aritmética, es relacionar las soluciones aritmética y geométrica de los problemas, y recurrir a la visualización geométrica para comprobar propiedades o relaciones matemáticas.

Este ejemplo muestra también la dicotomía entre procedimientos para trabajar la geometría, la contraposición entre la geometría estática que observó en Francia y que era la habitual también en España, y la geometría basada en el movimiento. La apuesta por ésta última seguirá siendo una constante en la obra de Eyaralar. En la *Metodología de la Matemática* insiste en que «tales superposiciones deben hacerse realmente con figuras construidas ex profeso, y aun puede utilizarse el cinematógrafo geométrico para ver cómo se verifica la superposición»[243]. Y en otra de sus obras, *Didáctica de los Problemas de Aritmética y Geometría*, justifica también dichos procedimientos alegando que «en los alumnos de la Escuela primaria predomina el recuerdo motriz de las operaciones geométricas»[244].

2.5.2. La influencia de la JAE en la renovación científico-cultural y pedagógica del profesorado de matemáticas

Como ya señalaba Francesca Comas, la influencia de la JAE es algo difusa, por varias razones; aquí nos interesamos por la influencia en el caso de la didáctica de la matemática. Es difícil establecer una relación causa-efecto inequívoca entre las estancias de los pensionados fuera de España y sus aportaciones posteriores. Hay trabajos que claramente se derivan de la permanencia en las instituciones que visitaron, pero para conocer la aportación real es preciso tener en cuenta estos factores: por un lado, la preparación previa –como hemos hecho en el caso de Eyaralar–, lo que está íntimamente relacionado con otras instituciones, las Escuelas Normales y, en el caso de

[243] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 93.
[244] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 110.

profesores normalistas e inspectores, la *Escuela Superior del Magisterio*; por otro lado, la influencia de las ideas de la Escuela Nueva que afectaba, aunque en distinto grado, a toda la comunidad educativa. Por otra parte, no todas las personas pensionadas nos han legado trabajos escritos que den cuenta de lo observado ni de lo aprendido o asumido.

Muchas personas realizaron estancias breves y en grupo, normalmente inspectores y también maestros. Unas veces eran personas muy vinculadas al movimiento renovador, como Félix Martí Alpera, Ángel Llorca o David Bayón, que son considerados 'mediadores'[245] entre los investigadores en educación y los profesores, y que ejercieron una cierta influencia en el magisterio, es de suponer que también en lo que se refiere a la enseñanza de la matemática; ya citamos anteriormente los casos de Martí Alpera o López Uceda. Para otros maestros probablemente la observación de realidades educativas distintas y otras formas de hacer solo sirviera para transformar su propio quehacer diario o, puede que ocurriera igualmente en algunos casos, no influyera sino de modo superficial en su práctica docente y las matemáticas incluso se vieran excluidas de esa influencia.

Entre los profesores normalistas que hicieron aportaciones a la enseñanza de las matemáticas, se observa que fueron becadas personas brillantes de la Escuela Superior del Magisterio (Comas, Charentón, Eyaralar eran los primeros de sus promociones) y otras que, aunque no habían llegado a estudiar en dicho centro, acreditaban un alto nivel de conocimientos y de implicación en actividades de formación más allá de sus clases en la Normal (Paunero, Romero).

En estos casos se puede hacer un seguimiento de sus aportaciones a la enseñanza de la matemática, materializadas a veces en publicaciones, pero también en las actividades que promovieron o en las que participaron, unas veces actividades de divulgación (conferencias, cursos...) y otras institucionales o de gestión relacionadas con el mundo educativo.

[245] Viñao Frago, Antonio: «Pedagogía y experiencias educativas en la JAE: Revisión historiográfica y nuevos enfoques». En: J.M. Sánchez Ron y J. García Velasco (Eds.), *100 JAE. La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas en su centenario*, tomo II, pp. 597–635. Fundación Francisco Giner de los Ríos y Publicaciones de la Residencia de Estudiantes, Madrid, 2010.

Margarita Comas y **Aurelio Rodríguez Charentón** solicitaron la beca para estudiar la metodología de las ciencias; pero su acción posterior abarca también las matemáticas. Comas publicó algunos artículos y tres libros de esta materia, uno dedicado a la escuela primaria y dos de metodología. Charentón escribió tres libros de matemáticas, de los que, al menos el primero, *Metodología de los Problemas*[246], es anterior a su estancia en Francia, Bélgica y Suiza en el curso 1932-1933 para estudiar la metodología de las ciencias naturales. En 1936 se le concede otra pensión para estudiar la organización de las escuelas[247].

Hemos comentado cómo a **Eyaralar** su beca le permitió contrastar sus ideas con las de los profesores franceses en cuyos centros estuvo. A pesar de su formación inicial en Química, se interesó durante toda su trayectoria profesional por la enseñanza de las matemáticas. Y se puede destacar, en principio, que su formación y reflexión previa le permitió captar y valorar aspectos de la enseñanza de las matemáticas en Francia que, de otro modo, podrían pasar inadvertidos. Confirmó muchas de las ideas que ya había expresado en sus obras anteriores. En este sentido hay que señalar que parte de esa formación inicial la había obtenido a partir del estudio de obras francesas que constituyen el grueso de la bibliografía de su *Nuevo Tratado de Aritmética*. Por otro lado, la observación de las clases de matemáticas le permitió conocer y valorar aspectos que no se suelen incluir en los libros y que le resultaron novedosos. El detallado informe que presentó a la vuelta sobre su experiencia permite detectar la influencia del viaje en sus posteriores trabajos. La estancia en Francia le permitió conocer los puntos fuertes de la enseñanza de las matemáticas en ese país, en particular su buena organización y la importancia que se confería a los aspectos formales y lógicos. Pero también los puntos débiles, ligados justamente a sus puntos fuertes: la postergación, en la práctica, de la intuición. Por eso, solicitó a la Junta, en dos ocasiones, estudiar la enseñanza de las matemáticas en Bélgica y Suiza, por ser países con una orientación de sus enseñanzas menos intelectualista.

[246] Charentón, *Metodología...*, op. cit.

[247] «Expediente de Aurelio Rodríguez Charentón. JAE/125-302». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

Lo que se advierte es que Eyaralar siguió profundizando sobre su experiencia francesa, contrastándola con su trabajo profesional; y el resultado fue una constante reelaboración de sus propuestas, en las que se aprecia el origen, pero también el profundo trabajo posterior realizado. Entre los méritos que presentó a la JAE para intentar conseguir otra pensión en el año 1936, figuran:

> Vocal del Museo Pedagógico de Baleares desde 5-7-24 hasta 31-XII-29.
>
> Vocal del Consejo Provincial de Primera Enseñanza de Baleares desde 8-7-31.
>
> Nombrado para asistir al cursillo de Información metodológica celebrado en Madrid en 1932 y ponente del cuestionario de Metodología de la matemática.
>
> Colaborador en la Semana Pedagógica de Navarra en 1932, celebrada en Pamplona.
>
> Inspector de Maestros en Prácticas en 1931.
>
> Profesor del Cursillo de Perfeccionamiento para Maestros celebrado en Palma en 1933.
>
> Encargado de conferencias en el cursillo de 1931.
>
> Vocal del Tribunal del cursillo de 1933.
>
> Alumno becario de la Universidad Internacional de Santander en el verano de 1934.
>
> Director de la Colonia Escolar organizada por la Escuela Normal de Baleares en Porto-Colom [ilegible] durante el verano de 1935[248].

Desde que llegó a Baleares, en septiembre de 1923, se implicó activamente en la educación y la cultura de las Islas[249]. Fue fundador, junto con otros

[248] Carrera Literaria y Títulos de José María Eyaralar. Certificado de la Secretaria de la Escuela Normal del Magisterio Primario de Baleares. Palma de Mallorca, 4 de febrero de 1936. En: «Expediente de José María Eyaralar, JAE/49-170». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE, pp. 23-24. Cita en p. 23.

[249] Ruiz Jaime, María de les Neus: «José María Eyaralar Almazán: l'entusiasta amor

profesores de la Normal de Baleares, del Ateneo, en el que ocupó un cargo directivo y defendió, en contra de otras opiniones, que fuera una entidad democrática, no elitista[250]. Colaboró con la Cruz Roja, con el Centro Cultural Obrero de Hostalets, participó y desempeñó un cargo directivo en la asociación Fomento del Civismo y colaboró frecuentemente con el que era su órgano de difusión, *La Vanguardia Balear*. Pero ésta no fue la única publicación periódica en la que publicaría asiduamente; escribió en *El Magisterio Balear*, la revista de la asociación de maestros de las Islas, y en otras como *La Última Hora* y *El Día*.

Al mismo tiempo, y al igual que Francisco Romero, Luis Paunero o Margarita Comas, publicó, tras su estancia en Europa, numerosos artículos sobre la enseñanza de la matemática y sobre diferentes aspectos relacionados con la formación en las Escuelas Normales en revistas profesionales de carácter nacional, principalmente la *Revista de Escuelas Normales*, aunque también en la *Revista de Pedagogía*[251].

Tal como él mismo había declarado en 1919, la Junta debía considerar

> la importancia que para mi propia formación como profesor puede tener el estudio de todas estas cuestiones en los establecimientos del extranjero más adelantados que los nuestros y la beneficiosa trascendencia que para la enseñanza primaria en general tendría seguramente las divulgaciones en España del resultado de estos estudios[252].

Francisco Romero había sido uno de los fundadores en 1919 de la *Universidad Popular* de Segovia, junto con un grupo de intelectuales entre los que se encontraban profesores de la Escuela Normal y de Instituto, como el poeta Antonio Machado; éste, compañero suyo de pensión, le dedicaría el

per l'educació». En: Francesca Comas Rubí; Sara González Gómez; Xavier Motilla Salas y Bernat Sureda García (Eds.), *Imatges de l'escola, imatge de l'educació: XXI Jornades d'Història de l'Educació*, pp. 335–344. Universitat de les Illes Balears, Palma de Mallorca, 2014.

[250]Ferrà-Ponç, Damià: *Escrits sobre Llorenç Villalonga*. Universitat de les Illes Balears, Barcelona, 1997. Pròleg i edició a cura de Pere Roselló Bover, pp. 116-117.

[251]No damos en este capítulo detalles sobre estos trabajos, ya que nos referiremos a la mayoría de ellos en los capítulos siguientes.

[252]Eyaralar Almazán, *Carta el Excmo... (1919)*, op. cit., p. 4. La cursiva es nuestra.

poema «Bodas de Francisco Carrasco»[253]. La Universidad Popular tuvo su sede en la Escuela Normal de Maestros de Segovia. Entre los cursillos que se ofertaron, Romero impartió el titulado «Operaciones matemáticas fundamentales y elementales de la Geometría». En la petición que hizo a la Junta en 1932 para ir a estudiar la metodología de la matemática alega que, además de cursos y conferencias, había traducido, junto a su esposa Carmen García Arroyo, el libro *Las tendencias actuales de la enseñanza primaria*, y enviado a la Junta trabajos inéditos, titulados «Formación del Magisterio Nacional» y «Ligas de Enseñanza y Escuela laica»[254]. También cita un trabajo inédito entonces, *Cálculo mental y cálculo escrito rápido*, que debía ser el precursor del libro *Metodología de las Matemáticas y Procedimientos de Cálculo escrito rápido*, publicado en 1933[255]. En 1936, cuando solicita su última pensión, presenta este trabajo a la Junta como resultado de lo aprendido durante su vida profesional y en sus viajes anteriores[256].

En esa misma carta, dirigida al presidente de la JAE, Romero también se refiere a la acción de difusión de lo aprendido:

> Los conocimientos metodológicos adquiridos en el extranjero han sido objeto, no solo de lecciones prácticas de clase, sino de conferencias y lecciones a los maestros y aspirantes al Magisterio, en semanas pedagógicas, cursillos para maestros y cursillos de selección[257].

Luis Paunero escribió un trabajo durante su estancia en Bruselas, titulado «La enseñanza de la Geometría en la Escuela primaria dirigida hacia la orientación profesional»[258]. Parte del contenido, sobre todo lo referente a un material que diseñó para dibujar proyecciones de cuerpos geométricos, lo

[253] Aubert, Paul (Ed.): *Antonio Machado hoy (1939-1989). Coloquio internacional organizado por la Fundación Antonio Machado y la Casa de Velázquez*. Casa de Velázquez, Madrid, 1994.

[254] Romero Carrasco, *Carta dirigida... (1932)*, op. cit.

[255] Romero Carrasco, Francisco: *Metodología de las Matemáticas. Procedimientos de cálculo mental y de cálculo escrito rápido*. Tip. y Lib. de A. Arqueros, Badajoz, 1933.

[256] Romero Carrasco, *Carta dirigida... (1936)*, op. cit.

[257] Ibídem, p. 45

[258] Paunero Ruiz, Luis: «La enseñanza de la Geometría en la Escuela primaria dirigida hacia la orientación profesional». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE. P-17. R 123-020, Bruxelles, 1933.

publicaría después en la *Revista de Escuelas Normales* con el título «Una lección sobre proyecciones en el espacio»[259]. Dos años después de su viaje escribe la obra *Ensayo. Las matemáticas en la educación*[260]; en ella incluye una extensa bibliografía sobre educación matemática, que completaría la que había realizado antes de solicitar la beca. En realidad debió tener la intención de publicar dos obras por separado: *Fundamentos de la Metodología de las Matemáticas* y *Bibliografía de la Metodología de las Matemáticas*, según consta en la relación de obras que presentó a la Junta cuando solicitó de nuevo pensión en 1934. En dicha petición anexa una relación de libros, 11 de autores extranjeros, de los cuales 6 están escritos en francés.

Respecto a la influencia que la JAE, a través de las pensiones para estancias en el extranjero, pudo haber tenido en las reformas en la enseñanza, también de la matemática, este comentario de Paunero en la Memoria presentada como mérito antes de su viaje no deja lugar a dudas:

> Yo, estoy seguro, que enriquecidas mis orientaciones y mis estudios por visitas a las Normales de Suiza, podré desarrollar una doble labor en mi Escuela, ya que, por una parte, traeré normas precisas y específicas con respecto a mi asignatura de beneficio inmediato para mis trabajos en mis clases y para mí mismo, al par que recogeré otras normas de carácter general, observaciones hechas, y, que, *llevadas a mis compañeros de Claustro, ya en conferencias o en publicaciones, ya en la charla cotidiana de los que convivimos* en el mismo trabajo podrán ser como un injerto de savia nueva que consiga resultados más prácticos o más rápidos[261].

Efectivamente, las nuevas ideas no solo se transmiten a los futuros maestros a través de su propia práctica educativa en las Normales, y a otros maestros y profesores normalistas a través de publicaciones, conferencias, cursos y en general acciones de divulgación. Existe lo que Julio Ruiz Berrio llamó 'acción personal'[262], una influencia difícilmente cuantificable pero que

[259] Paunero Ruiz, Luis: «Una lección sobre proyecciones en el espacio». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **96**, pp. 67–70.

[260] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit.

[261] Paunero Ruiz, *Memoria que presenta...*, op. cit., pp. 4-5. La cursiva es nuestra.

[262] Ruiz Berrio, Julio: «La Junta de Ampliación de Estudios, una agencia de modernización pedagógica en España». *Revista de Educación*, 2000, pp. 229–248.

no se puede negar: la que cada uno de los profesores, maestros o inspectores pensionados ejercería en su entorno. Concretamente, en el caso de los profesores normalistas más comprometidos con la renovación educativa en matemáticas y con la corriente pedagógica de la Escuela Nueva, a los que estudiamos principalmente, el entorno se extendía mucho más allá de sus Escuelas Normales.

Una de las críticas que se hace a la JAE es la falta de unos criterios transparentes y objetivos para conceder las pensiones. El procedimiento era que el candidato enviaba su petición justificada y la documentación que acreditaba los méritos alegados al presidente de la Junta y Castillejo, su secretario, solicitaba informes a personas de su confianza y se entrevistaba con el solicitante. Las peticiones se examinaban, pues, una por una, sin criterios estándares para baremar –y sin que pesara la ideología del aspirante–, y ello provocó acusaciones de falta de imparcialidad. El análisis de los casos aquí expuestos y los de otros becados para diferentes disciplinas, muestra lo que la mayoría de los investigadores sostienen, que la JAE actuaba con imparcialidad, procurando seleccionar solo en función de los méritos del candidato y del interés de la petición.

Lo cierto es que, entre quienes obtuvieron una pensión para estudiar la metodología de las matemáticas, fueron las personas con mayor preparación previa –matemática y pedagógica– las que hicieron a su vuelta las mayores aportaciones a la enseñanza; también fueron las que más contribuyeron a difundir entre el profesorado de todos los niveles y los aspirantes a profesores su experiencia, una experiencia que los más capacitados habían aprovechado a la hora de observar –y saber interpretar– otras realidades y a la hora de reflexionar sobre lo visto.

En cualquier caso, el número de pensiones para estudiar la metodología de la matemáticas, comparado con el de las ayudas para otras metodologías específicas es bajo. Creemos que esta situación puede relacionarse con el carácter novedoso que tenía en nuestro sistema educativo la enseñanza de la geografía o de las ciencias, que motivó tanto el interés de profesionales por estudiar su organización en el extranjero como el interés de la propia Junta por estimular con sus becas ese estudio. Las matemáticas, sin embargo, se

consideraban una materia asentada y despertaba menos interés; puede que una de las razones se relacionara con el hecho de que los nuevos métodos en matemáticas son menos 'vistosos', como se pondrá de manifiesto cuando analicemos el método de proyectos en esta memoria (apartado 7.1.4, pp. 434 y sig.). Pese a todo, una demostración manipulativa del teorema de Pitágoras no se puede comparar con el milagro de ver crecer una planta, con lo sugestivo de contemplar fotografías o revistas que muestren lugares que se nos antojan lejanos o con la emoción de construir un aparato y que éste funcione; además de que exige un mayor esfuerzo mental que no todo el mundo puede o está dispuesto a hacer.

La labor de la Junta de Ampliación de Estudios no solo se ha reconocido años más tarde con la llegada de un régimen democrático a España; en los ambientes innovadores ya lo fue en su momento. Por ejemplo, la Junta Directiva de la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales, como reacción a la decisión del Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes de intervenir en la elección de los vocales, algo reservado antes a la propia Junta, se expresa así: «El buen éxito de la Junta, a la que se debe casi todo el resurgimiento científico de España, era una prueba evidente de la utilidad de su constitución»[263].

2.6. La Escuela Superior del Magisterio

La *Escuela Superior del Magisterio* se creó por un Real Decreto de 3 de junio de 1909. Según Molero Pintado, «representa un eslabón más en el programa reformador de la educación española apadrinado preferentemente por los gobiernos liberales, y fuertemente influenciado en sus bases doctrinales y técnicas por la Institución Libre de Enseñanza»[264]. En ella habían de formarse los profesores de Escuelas Normales y los inspectores de primera

[263] «La Reorganización de la Junta de Ampliación de Estudios». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **36**, p. 234.

[264] Molero Pintado, Antonio: «La Escuela de Estudios Superiores del Magisterio y su entorno histórico y educativo». En: Antonio Molero Pintado y María del Mar del Pozo Andrés (Eds.), *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio(1909-1932): Un precedente histórico en la Formación Universitaria del Profesorado Español*, pp. 17–44. Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares, Madrid, 1989. Cita en p. 29.

enseñanza –también se formaban en materias pedagógicas los aspirantes del Instituto-Escuela– inspirándose en el modelo francés y belga; aspiraba también a ser un centro superior de investigación pedagógica. En 1911 otro Real Decreto suprime la enseñanza libre y determina que los profesores tendrán la categoría de catedráticos de Universidad. A partir de entonces se llamará *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio*, nombre que conservará hasta 1930, en que volverá a la denominación primitiva.

Julio Ruiz Berrio puntualiza que, en contra de algunas informaciones equivocadas, la Escuela Superior de Estudios del Magisterio «no era precisamente la institución de nivel superior para la formación de profesores e inspectores que Giner de los Ríos y Cossío llevaban varios años reclamando. Otra cuestión es que la aceptaron, a la espera de su ideal»[265].

El Real Decreto de 30 de agosto de 1914, en su artículo 41, dispone que el ingreso en las Normales se haga por oposición y que las dos terceras partes de la plantilla de profesores numerarios se componga de Maestros y Maestras normales que hayan obtenido este título en la *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio*. La colocación directa de los alumnos se eliminó en 1922.

La Escuela Superior del Magisterio se suprime definitivamente en la época republicana, en 1932, cuando se crea en Madrid la Sección de Pedagogía de la Facultad de Filosofía y Letras, con el propósito, en principio, de que pasaran a ella las funciones de la Escuela Superior del Magisterio.

El régimen de la Escuela era de internado y las plazas limitadas; para ingresar eran requisitos tener el título de maestro superior o de licenciado en una Facultad, además de aprobar un examen de ingreso. Las enseñanzas constaban de una parte común, que comprendía, entre otras, las asignaturas psicopedagógicas, y luego una especialización en las secciones de Letras, Ciencias o Labores. Además los alumnos hacían un año de prácticas en centros como el colegio Príncipe de Asturias, el Colegio Cervantes o el Instituto-Escuela, aunque tanto la organización de las prácticas, como los modelos de prácticas fueron variando bastante a lo largo del periodo.

María del Mar del Pozo[266] agrupa la actividades por las que se canalizaba

[265] Ruiz Berrio, *La Junta de Ampliación de Estudios...*, op. cit., p. 245.

[266] Pozo Andrés, María del Mar del: «La innovación metodológica y la formación del profesorado en la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio». En: Antonio Mole-

la renovación de la formación del profesorado en tres grupos: actividades innovadoras llevadas a cabo en la Escuela, diversos modelos de prácticas de enseñanza, y actividades extraescolares organizadas por la Escuela o en las que participaban, si no la institución, sus alumnos y profesores.

En el primer grupo están: la introducción en el currículo de contenidos científicos y pedagógicos innovadores, los trabajos de investigación individuales sobre temas innovadores, la preparación y exposición por los alumnos de puntos del programa o de temas de investigación previamente abordados, la sustitución de los libros de texto por los diarios de clase, la evaluación continua como alternativa a los exámenes, el uso de laboratorios, las visitas a centros científicos (este modelo de visita, con preparación previa y presentación de un informe final, fue reproducido por los alumnos en las Normales en las que trabajaron), etc. Existían además Seminarios pedagógicos o científicos –entre ellos el Seminario de Ciencias Físico-Matemáticas–, las memorias de fin de carrera y los trabajos de investigación[267].

Las actividades extraescolares en las que, de uno u otro modo, estaba implicado el Centro consistían en excursiones fin de carrera, ciclos de conferencias, colonias escolares, asociaciones estudiantiles y otras. Participaban a veces alumnos y profesores conjuntamente en estas actividades, algunas de la cuales se llevaban a cabo en el Museo Pedagógico, el Ateneo de Madrid, Escuelas Normales...

Estas actividades tenían tal relevancia que en ocasiones se hacían eco de ellas la *Gaceta de Instrucción Pública y Bellas Artes*[268] y las revistas

ro Pintado y María del Mar del Pozo Andrés (Eds.), *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio(1909-1932): Un precedente histórico en la Formación Universitaria del Profesorado Español*, pp. 65–140. Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares, Madrid, 1989.

[267]En la obra citada se incluyen numerosos ejemplos, de casi todas las disciplinas –la inmensa mayoría de carácter psicopedagógico–, pero no se mencionan siquiera trabajos o memorias de matemáticas –sí que hay de algunas otras metodologías específicas–; solo una, sin autor, en una estadística de trabajos presentados en los veintidós años que existió la Escuela, en un anexo (aunque es cierto que no se conservan todas las que se realizaron).

[268]En la *Gaceta de Madrid* de fecha 11 de abril de 1917, aparece publicado el «Curso Breve de Pedagogía experimental» que se celebraba en Toledo, con el Programa, en el que contamos dos profesores y tres alumnos de la Escuela, entre los últimos Josefina Pascual, que luego sería profesora de Matemáticas en la Escuela Normal de Cádiz.

profesionales. En 1913, el ciclo de conferencias organizado por los alumnos de la Escuela contó con el apoyo de la ILE y del propio Ministro de Instrucción Pública, incluso fueron ampliamente divulgadas en los periódicos de mayor tirada. Un ejemplo en los años siguientes es el acto de homenaje al poeta Zorrilla que organizó la Escuela en su propio local el 1 de abril de 1917; con motivo de ello publicó *La Escuela Moderna*:

> *Uno de los más altos centros de la organización cultural española, la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio*, celebró el día 1.º de abril, en honor de nuestro poeta nacional José Zorrilla, con ocasión de cumplirse en este año el primer centenario de su nacimiento, un acto que por la excepcional importancia que revistió, por todas las elevadas personalidades que a él asistieron y por *todo lo que significó en cuanto a maneras de formación educacional, en cuanto a un ambiente verdaderamente típico por el modo de hacerse la vida dentro de la entidad social constituida por profesores y alumnos*, y en cuanto a resultantes estéticas, científicas, sentimentales, etc., nos produjo una tan sincera e intensa satisfacción frente al pesimismo tradicional siempre que de nuestras cosas de España se trata[269].

Nos permitimos otra cita que, aunque más propia de unos ecos de sociedad, sirve para hacerse idea de la importancia de la Escuela Superior en aquellos momentos en la vida cultural del país –al menos de Madrid–:

> La Escuela Superior presentaba deslumbrador aspecto, toda llena de luz y de flores, sobre cuyo marco destacaban admirablemente la belleza y elegancia del elemento femenino. Poco después de la hora anunciada en los artísticos carnets [...], era imposible dar un paso por los salones y galerías de la Escuela Superior[270].

La consideración que se le otorgaba al centro desde todos los estamentos queda patente si se tiene en cuenta que presidió el acto Royo Villanova,

[269] «Homenaje a Zorrilla. Celebrado en la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio el 1.º de abril de 1917». *La Escuela Moderna*, 1917, **308**, pp. 201–203. Cita en p. 201. La cursiva es nuestra. En este homenaje participaron, entre otros, Josefina Pascual, Pedro Chico y Rodolfo Llopis, entonces alumnos del Centro.

[270] Ibídem, p. 201.

director general de Primera enseñanza, y asistieron el rector honorario de la Universidad Central, D. Gumersindo de Azcárate, directivos de Escuelas Normales y otras personalidades del mundo educativo[271].

2.6.1. Las matemáticas en la Escuela Superior del Magisterio

No hemos hallado mucha información sobre qué matemáticas se estudiaban en la Escuela, cuál era el nivel de las asignaturas, ni si estaban más o menos orientadas a los aspectos puramente matemáticos o se prestaba alguna atención a los metodológicos. Los trabajos realizados por historiadores de la educación recogen en general actividades –extraescolares o no– de alumnos y de profesores, trabajos y memorias, prácticas, etc., entre las que hay, por ejemplo, algunas de ciencias sociales, de ciencias experimentales o de literatura, además de numerosas de pedagogía, organización escolar, psicología, etc. Las matemáticas no se nombrarían si no fuera para referirse a las asignaturas del plan de estudios o a los profesores.

Hubo un total de siete planes de estudio, correspondientes a estos años: 1909, 1911, 1913, 1914, 1919, 1921, 1931. Las asignaturas de matemáticas, en cada uno de los planes fueron[272]:

- 1909: *Aritmética y Álgebra* (curso 1.º) y *Geometría y Trigonometría* (2.º curso).
- 1911: *Metodología de las Ciencias Matemáticas* (cursos 1.º y 2.º).
- 1913: *Metodología de las Ciencias Matemáticas* (cursos 1.º y 2.º).

[271] El director del «Institut Français en Espagne» Ernest Mérimée; el marqués de Retortillo, delegado regio de la Escuela; la directora de la Normal Central de Maestras, Carmen Rojo; la inspectora de las escuelas nacionales de Madrid, D.ª Matilde García del Real; la regente y la secretaria de la escuela práctica aneja a la Normal Central y numerosos maestros y maestras de las escuelas públicas de Madrid.

[272] Antonio Molero y M.ª del Mar del Pozo citan las Reales Órdenes que establecen las asignaturas. Según eso, la asignatura *Complementos de Matemáticas* se denominó *Complementos de Matemáticas y Física* en 1916 y *Complementos de Matemáticas y Cosmografía y Física del Globo*, en 1920.

- 1914: *Aritmética y Álgebra* (curso 1.º) y *Geometría y Trigonometría* (2.º curso).

- 1919: *Complementos de Matemáticas* (curso 1.º, común a las tres Secciones).

- 1921: *Complementos de Matemáticas* (curso 2.º) y *Ampliación de Matemáticas* (curso 3.º).

- 1931: *Matemáticas* (curso 1.º, cuatrimestres 1.º y 2.º).

El Plan de 1919 es el único en el que los alumnos que son de las secciones de Letras y de Labores estudian algunas matemáticas, aunque ese año las Matemáticas se reducen de dos cursos a uno. Lo mismo sucede en el último Plan, del año 1931, aunque esta reducción no la sufren las Ciencias Experimentales ni las Ciencias Sociales, que tienen un peso mucho mayor que las matemáticas en todos los planes. Una de las causas es que se dividen en Biología, Geología, Física y Química, en un caso, e Historia, Arte y Geografía, en el otro. En cualquier caso, también las Matemáticas se dividen en los planes de 1909 y 1914 y solo tienen una asignatura de cada rama, en lugar de dos. En el último Plan, las Ciencias Sociales se estudian en 6 cuatrimestres y las Ciencias Experimentales en 8; las asignaturas de Física y Geografía tienen asignados 4 cuatrimestres cada una, mientras que las Matemáticas solamente 2.

Vemos que solo los alumnos que pertenecen a las promociones comprendidas entre la tercera (1911-1914) y la quinta (1913-1916) tuvieron una asignatura de metodología, aunque no sabemos si su contenido era de metodología de la propia ciencia y no tenemos ningún indicio de que se tratase de una metodología didáctica. Esto se confirma si tenemos en cuenta el perfil del profesorado y las obras que escribieron los profesores.

Sobre los profesores de Matemáticas tampoco disponemos de toda la información; nos basamos en el trabajo de Antonio Molero y María del Mar del Pozo ya citado, en el que se enumeran las personas que ocuparon las cátedras de estas asignaturas: Antonio Llardent Esmet, profesor de *Aritmética y*

Álgebra (julio de 1909 a marzo de 1913[273]); Gabriel Galán Ruiz, profesor de *Geometría y Trigonometría* (agosto de 1910 a noviembre de 1916[274]); Manuel García Miranda, profesor de *Complementos de Matemáticas* y *Cosmografía y Física del Globo* (enero de 1920 a diciembre de 1928[275]); José María Plans y Freyre, del que no se conoce cuándo se incorporó –estos autores conjeturan que en el curso 1929-30– y permaneció mientras existió la Escuela, hasta 1932.

Durante el periodo que va de 1916 a final de 1919 el profesor de Física, Vicente Vera y López, se ocupó de impartir la asignatura de matemáticas, que cambia de nombre y se denomina *Complementos de Matemáticas*. La propia Junta de Profesores de la Escuela es quien decide crear la cátedra de *Cosmografía y Física del Globo* y solicitar la incorporación de una persona más idónea, con los argumentos, entre otros, de que los catedráticos de Física y Geografía consideraban que estas asignaturas debían fundamentarse en aquélla.

El resto de fuentes consultadas apenas aporta información sobre la formación y la trayectoria profesional de estos profesores (muy amplia solo en el caso de Plans, por su vinculación al Laboratorio Matemático, mientras que sobre otros apenas si hemos hallado información). Pero curiosamente no se menciona prácticamente su trabajo como profesores de la Escuela Superior del Magisterio[276]; por lo visto en el entorno de las Facultades de Ciencias y en las asociaciones de matemáticos, las cátedras de la Escuela –un centro que no llegaba a tener la categoría universitaria– no eran méritos dignos de reseñar. También es posible que el intento de borrar la memoria histórica, sobre todo en relación con las personas pero también con las instituciones

[273]Por amortización de una de las dos cátedras de matemáticas. Se le nombra de nuevo en septiembre de 1914, pero no hay constancia de que volviese a ocupar la plaza, ya que fue nombrado en esas fechas Catedrático de Matemáticas del instituto de San Isidro y en 1917 solicitó la cátedra de Historia Natural de la Escuela.

[274]Se amortiza su cátedra. En 1922 su excedencia pasa a ser voluntaria, ya que fue nombrado Catedrático de Geometría Analítica de la Universidad de Oviedo.

[275]Es destinado a Buenos Aires como vicecónsul.

[276]En el listado de socios de la Sociedad de Matemáticas que publica la *Revista de la Sociedad de Matemáticas* en 1912, figura que Gabriel Galán y Vicente Vera son Catedráticos de la Escuela Superior del Magisterio. *Revista de la Sociedad Matemática Española*, año 1.º, n.º 5, febrero de 1912, pp. 223-233.

que se consideraban herederas de la Institución Libre de Enseñanza o afines, y de que tanto los catedráticos de Enseñanza Media como los profesores de las Facultades hayan vivido y trabajado de espaldas a la enseñanza Primaria y las Normales, haya favorecido que en los datos biográficos de los profesores de la Escuela no se mencione muchas veces este hecho como uno más de sus méritos.

Llardent Esmet era Doctor en Ciencias Físicomatemáticas. Había ganado por oposición una cátedra de Instituto, a la que renunció. Entre sus libros están: *Nociones y ejercicios de aritmética y geometría, Curso de Aritmética, Curso de Geometría, Curso de Álgebra.*

Galán y Ruiz era Doctor en Ciencias Exactas y Fisioquímicas, catedrático por oposición de *Astronomía Esférica y Geodesia y de Cosmograía y Física del Globo* en la Universidad de Zaragoza y de *Geometría analítica* en la Universidad de Oviedo. Durante su estancia como profesor en la Escuela Superior del Magisterio, asistió y participó en el primer Congreso de la *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, que se celebró en Zaragoza en 1908, del que surgiría la *Sociedad Matemática Española.* Es el único de estos cuatro profesores que había recibido una pensión de la JAE[277], siendo catedrático de la Universidad de Zaragoza en 1908[278]. Escribió artículos de divulgación científica y varios libros: *Nociones y ejercicios de matemáticas, aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, Lecciones de cosmografía y geofísica*, son algunos de ellos.

García Miranda había sido profesor de la Universidad Central, en la que había impartido varias asignaturas de Análisis, Geometría, Álgebra, etc., y catedrático de los institutos de Cáceres y Guadalajara. Era Licenciado en Derecho y Maestro. Es autor, como el resto, de varias publicaciones.

[277]En el archivo de la JAE hay un expediente que, al parecer, corresponde a Vicente Vera (no figura el segundo apellido). Según la documentación, se le pensionó para asistir al 30.º *Congrès National des Sociétés Françaises de Géographie* (Roubaix, julio-agosto de 1911); había sido designado por la Real Sociedad Geográfica para representarla en dicho congreso y en la reunión de la Sociedad Británica en Plymouth, en agosto de 1911.

[278] «Expediente de Gabriel Galán Ruiz. JAE/58-17». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE. Consulta el 10-10-2015.

Plans y Freyre era Doctor en Ciencias Físico-matemáticas, aunque había estudiado también ingeniería y arquitectura. En 1905 obtuvo por oposición la cátedra de Física y Química del Instituto de Enseñanza Media de Castellón de la Plana; había sido catedrático de *Mecánica racional* de la Universidad de Zaragoza y, desde 1917, era catedrático de *Cosmografía y Física del Globo* y de *Mecánica celeste* de la Universidad de Madrid. Desde el curso 1917-18 estuvo muy vinculado al Laboratorio y Seminario matemático de la Junta para Ampliación de Estudios. Entre sus obras figuran libros de cálculo diferencial, *Nociones de Cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones*, y de mecánica relativista (tema en el que era experto; incluso Einstein le reconoce la capacidad para explicar estas teorías y hacerlas comprensibles).

Observamos que los profesores encargados de las asignaturas de matemáticas tienen formación matemática muy elevada y méritos demostrados, y que algunos habían obtenido y ocupado cátedras de institutos de segunda enseñanza. Sin embargo, no se les conoce ningún trabajo ni actuación que ponga de manifiesto su interés por la metodología de la matemática. Apenas una Memoria de fin de Carrera[279], dirigida por José María Plans, titulada «Libro escolar de matemáticas modernas». Además está la Memoria, de autor desconocido, titulada «Sobre metodología de las Matemáticas», que ya hemos citado en la página 113, pero que es anterior a 1927, con lo que no pudo haberla dirigido Plans.

José María Eyaralar, una persona que demostró su capacidad de reflexión y de crítica constructiva, alguien que en todo caso valoraba mucho el papel de la Escuela Superior, en la que realizó sus estudios entre 1915 y 1918 (fue el número uno de la séptima promoción), se lamenta de que las matemáticas estudiadas en la Escuela Superior estaban más cercanas a la matemática universitaria que a la que necesitaba un futuro profesor, algo desde luego acorde con la trayectoria profesional y con el curriculum del profesorado de matemáticas del Centro:

> Debieran ser nuestras Normales centros donde se estudiasen, en forma de laboratorio, los mejores y más modernos procedimientos de enseñanza en cada disciplina.

[279]Su autor es el alumno José Otero Espasandin. Pozo Andrés, *La innovación metodológica...*, op. cit., p. 136.

> De ello nos aparta, desgraciadamente, nuestra propia formación, en la que se ha descuidado por completo este aspecto, hasta el punto de que los programas de la Escuela Superior del Magisterio aspiraban a imitar simplemente los de cualquier Universidad, y los cuestionarios de oposiciones a Normales eran esencialmente los mismos que para los institutos[280].

Felipe Sáiz Salvat, alumno de la Escuela Superior entre 1912 y 1915, siendo profesor de matemáticas de la Escuela Normal de Baleares, reconoce igualmente la falta de formación en didáctica de las matemáticas del profesorado de las Normales, sin dejar de valorar aquel centro:

> *No es que el Centro Superior, donde se forma el citado Profesorado, deje de atender al arte de enseñar dentro de su plan de estudios*; sin embargo, dentro de la realidad, no debemos dejar de considerar lo útil que resulta (por no decir necesario) una ampliación sistemática de los conocimientos sobre dicha materia, muy retrasada en nuestra patria[281].

También es cierto que la promoción de Sáiz Salvat cursaba la asignatura de Metodología de las Ciencias Matemáticas, mientras que Eyaralar había estudiado Aritmética y Álgebra y Geometría y Trigonometría. Aunque es probable que esa no fuera la causa de la diferente percepción de estos dos profesores sobre la formación recibida (basta comparar los trabajos que presentaron ambos a la Junta de Ampliación de Estudios[282] poco tiempo después de obtener una plaza de profesor en una Escuela Normal).

En cualquier caso, Sáiz Salvat se dirigía con ese escrito a la JAE –una institución cercana a la Escuela Superior del Magisterio– para solicitar una 'gracia' o pensión de ella; era lógico que se basara en la insuficiencia de la

[280] Eyaralar Almazán, José María: «El aparato «Arquímedes». Para la obtención de las áreas y los volúmenes de los cuerpos redondos». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **36**, pp. 210–212. Cita en p. 210.

[281] Sáiz Salvat, Felipe: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios en el extranjero. 12 de abril de 1920». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Expediente JAE 130-56, pp. 3-6, 1920. Consulta el 10-10-2015. La cursiva es nuestra.

[282] Sáiz Salvat, Felipe: «Notas sobre metodología didáctica de la Aritmética». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Expediente JAE 130-56, pp. 14-20, 1922. Consulta el 10-10-2015.

formación inicial y en la necesidad de una «formación complementaria post-escolar»:

> Lo cual no opta [sic] para que llenen ampliamente su contenido la Escuela Superior del Magisterio, el Instituto-Escuela de 2.ª enseñanza y la Cátedra de Pedagogía superior de la Universidad Central. Sin embargo de haber conseguido que la casi totalidad del profesorado Normal esté orientado (por parte del primer organismo citado) según principios de educación sólidos y vasta cultura, no deja de ser útil y necesario que ésta beba en fuentes autorizadas y ejemplares las normas de la didáctica[283].
>
> No cabe duda de que el profesor normal (sea dicho sin menoscabo de la labor que lleva a cabo la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio) está necesitado de esa formación complementaria post-escolar[284].

2.6.2. El legado de la Escuela Superior

El Plan de 1931 había conferido a los estudios de Magisterio un carácter de enseñanza superior, pero no exactamente universitaria:

> Por otra parte, y en armonía con ese movimiento actual, se abre paso, en general, la tendencia a que el Magisterio, a la vez que eleva su nivel profesional y económico, ascienda también en capacidad, llegando hasta alcanzar una preparación de carácter universitario. Con ese espíritu, el Decreto de reforma de las Escuelas Normales exigiendo, para el ingreso en ellas, el título de Bachiller, las sitúa en el plano de las Escuelas Superiores[285].

[283] Sáiz Salvat, Felipe: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios en el extranjero. 26 de marzo de 1921». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Expediente JAE 130-56, pp. 9-10, 1921. Cita en p. 9. En la carta se refiere a este centro por ese nombre –era el que tenía cuando Sáiz Salvat comenzó los estudios en ella–, aunque en ese momento la denominación era Escuela de Estudios Superiores del Magisterio.

[284] Sáiz Salvat, Felipe: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios y pensiones al extranjero. 14 de octubre de 1922». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Expediente JAE 130-56, pp. 11-13, 1922. Cita en p. 12.

[285] «Preámbulo al Decreto de 27 de enero de 1932». *Gaceta de Madrid*, 1932, **29**, pp. 732–733. Cita en p. 732.

No obstante, la Universidad no dejaba de ser una aspiración y, aunque no podían llevar en ese momento la formación de todos los maestros a ella, el deseo de vinculación con la institución del más alto nivel reconocido se buscaba de una manera u otra: «Precisa, en fin, para la categoría y la eficiencia científica de la profesión la adquisición de estudios superiores: para que sea así se crea la Facultad de Pedagogía abriendo al Maestro las puertas de la Universidad»[286].

La undécima de las «Bases para la Reforma de la Escuelas Normales», redactadas por Gil Muñiz y debatidas en la Asamblea de la Asociación el Profesorado Numerario de Escuelas Normales, en junio de 1931, se refiere a la necesidad de que el profesorado de la Normal, la Inspección y los Directores de graduadas, entre otros, tengan formación universitaria, y reclama la creación de la Facultad de Pedagogía a la que plantea que se entre con el título de Maestro.

Unos meses después llega la reforma y enseguida el Decreto por el que se suprime la Escuela Superior del Magisterio, a la vez que se crea una Sección de Pedagogía en la Universidad de Madrid:

> Complemento de ese Decreto [de reforma de las Escuelas Normales] es ahora la creación de una Sección de Pedagogía en la Universidad de Madrid, a fin de que en ella se preparen, para lo sucesivo, los Profesores de Normales e Institutos, los Inspectores y, en general, los Maestros que aspiren a ampliar su cultura y a ejercer los cargos de mayor importancia y responsabilidad[287].

Hay quien considera el Plan profesional –uno de cuyos redactores fue Rodolfo Llopis, antiguo alumno de la Escuela– como un fruto póstumo de la institución cuya desaparición motivó[288].

El propio Preámbulo al Decreto indica claramente que esta medida es un complemento a la reforma emprendida en la formación del Magisterio.

[286] «Preámbulo al Decreto de 29 de septiembre de 1931». *Gaceta de Madrid*, 1931, **273**, pp. 2091–2094. Cita en pp. 2091-2092.

[287] *Preámbulo al Decreto de 27 de enero...*, op. cit., p. 732.

[288] Mainer, Juan y Mateos, Julio: «Los inciertos frutos de una ilusionada siembra. La JAE y la Didáctica de las Ciencias Sociales». *Revista de Educación*, 2007, **Número extraordinario**, pp. 191–214. `http://www.revistaeducacion.mec.es/re2007_09.htm`. Consultado el 10-10-2015.

La Redacción de la *Revista de Pedagogía*, en el editorial «Ante la campaña contra las Escuelas Normales», incluido en la sección *Notas del mes*, defiende la reforma, que califica de solución intermedia entre la situación anterior y la formación universitaria de los maestros, algo que reconoce que en ese momento no podía asumir España; en su lugar opta por exigir el bachillerato «y convertir a las Escuelas Normales en Escuelas profesionales, técnicas, de carácter superior, *hasta el punto de que su futuro profesorado tendrá formación universitaria*»[289]. Desde este punto de vista, la formación de los profesores normalistas en la Facultad de Pedagogía, en lugar de en la Escuela Superior del Magisterio, lo que venía es a elevar el estatus del magisterio primario.

La Escuela Superior del Magisterio, donde se formaban los formadores de maestros y a la que podían acceder los maestros para continuar estudios, era tratada en algunos aspectos como centro universitario, pero tampoco lo era propiamente. Los profesores tenían el rango de catedráticos de universidad, se trata de un centro que tiene categoría universitaria, «aunque en realidad está muy lejos de ella, debido principalmente a la heterogénea composición y calidad de su profesorado. Alumnado maestros primarios y algún que otro licenciado de Universidad»[290]. En realidad las cátedras de la Escuela las ocupaban profesores de Escuela Normal, de Instituto y de la Universidad.

A pesar de algunas críticas, algo lógico si se analiza el funcionamiento de cualquier institución a lo largo de su existencia, el aprecio por la Escuela Superior había sido compartido por la profesión, y la *Revista de Pedagogía* se hace eco en los años previos a la reforma:

> No obstante sus defectos, la Escuela Superior del Magisterio ha facilitado la renovación del espíritu de las Escuelas Normales, tanto por contar entre sus profesores algunos de positivo mérito, como por haber dado ocasión a que encontraran colocación en las Normales gran número de maestras inteligentes y entusiastas[291].

Se reconoce que las Normales habían mejorado, entre otras cosas, por la llegada de profesores jóvenes y mejor preparados. Tampoco faltaron tes-

[289] «Ante la campaña contra las Escuelas Normales». *Revista de Pedagogía*, 1835, **159**, pp. 136–138. Cita en p. 137. La cursiva es nuestra.

[290] «La preparación de los maestros en España». *Revista de Pedagogía*, 1926, **56**, pp. 368–371. Cita en p. 369.

[291] Ibídem, cita en p. 368.

timonios de reconocimiento hacia la institución suprimida por la República durante los años siguientes a su cierre:

> El Museo Pedagógico, primero, y la Escuela Superior, después, airearon el ambiente pedagógico y sembraron de inquietudes un Magisterio ávido de nuevos recursos, que suplía sus defectos de formación con una sed de cultura inagotable y un gran espíritu de estudio[292].

María de Maeztu, profesora de la Sección de Pedagogía de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Central, decía en 1936:

> Durante muchos años nutrió de elementos jóvenes y muy valiosos el profesorado de nuestras Normales. Toda la renovación que se ha hecho en la enseñanza en los últimos veinticinco años se debía a la inteligencia y el brío de aquellos alumnos, que llevaron a todas las provincias de España las enseñanzas de sus ilustres maestros[293].

Hay quienes sitúan el principio del fin en la eliminación de la colocación directa de los alumnos al acabar en la Escuela Superior del Magisterio, en 1922[294]; el R.D. de 3 de marzo de 1922 derogó los artículos del R.D. de 1914 que otorgaban el derecho a ocupar una plaza en una Normal o en la Inspección de Primera Enseñanza a los titulados en la Escuela Superior del Magisterio. Los profesores normalistas, a través de la Junta directiva de la Asociación, expresaron su inquietud por esta medida, que modificaba el Real Decreto de 1914, ya que preveían que podía tener graves consecuencias para la supervivencia de la Escuela Superior del Magisterio[295].

[292] Sánchez Sarto, Luis (Ed.): *Diccionario de Pedagogía. Tomo primero*. Labor, Barcelona, 1936, p. 1279.

[293] Maeztu Whitney, *Escuelas Normales*, op. cit., p. 122.

[294] Viñao Frago, Antonio: «Hombres e ideas en la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio. Estudio específico del profesorado». En: Antonio Molero Pintado y María del Mar del Pozo Andrés (Eds.), *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio(1909-1932): Un precedente histórico en la Formación Universitaria del Profesorado Español*, pp. 141–166. Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares, Madrid, 1989.

Capitán Díaz, *Educación en la España...*, op. cit., pp. 178-182.

[295] Junta Directiva de la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales: «La Escuela de Estudios Superiores del Magisterio». *Boletín de Escuelas Normales*, 1922, **2**, pp. 1–2.

Mientras existió fueron muchas las críticas y muchos sectores los que, por unas razones o por otras, hablaban de la desaparición de la Escuela Superior. Por otro lado, quienes defendían esta supresión se declaraban portavoces del sentir del magisterio todo. Aunque en 1925, la Junta directiva de la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales apoyaba la solicitud de un grupo de profesores de la Escuela Normal de Maestros de Tarragona y de inspectores, en el sentido de que no se suprimiese la institución formadora de maestros y aclarando que no todo el profesorado normalista estaba a favor de la supresión:

> Creemos que no han llegado hasta el Gobierno sino las voces de los enemigos inveterados de la Escuela [...] Los suscritos estiman, por consiguiente, que estamos en el deber de deshacer este equívoco manifestando a las autoridades cuál es, por el contrario, la verdadera opinión del cuerpo docente, cuya representación otros indebidamente se irrogan y tratan vanamente de usurpar [...]
>
> Aun con todos sus defectos –que no son distintos de los que adolecen los restantes organismos docentes– la Superior ha logrado elevar sensiblemente en pocos años el nivel de las Normales, de la Inspección y, por ende, el de los maestros nacionales[296].

Una polémica que no favoreció a la Escuela fue la lucha ideológica en la que se vio inmersa y que Antonio Molero[297] señala como uno de los motivos por los que muchos desearan su desaparición, a pesar de que entre sus profesores y alumnos cupieron todas las ideologías:

> Pese al ambiente de radicalismo que alrededor de la Escuela Superior se ha formado, los que hemos pasado por sus aulas confesamos que no hay tal cosa. Si de la Escuela han salido elementos radicales –que no dudamos– es que ya lo eran antes de entrar, y si de la Escuela han salido los promotores de los Internados Teresianos, es que ya tenían

[296] Loperena, Pedro; Salazar Chapeta, José; Manuel Nogueras, Francisco; Galés, Manuel; Ribera Villará, Juan y Sancho, M.: «En defensa de la Escuela Superior del Magisterio». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **25**, pp. 197–198. Cita en p. 197.

[297] Molero Pintado, *La Escuela de Estudios...*, op. cit.

> este espíritu al ingresar. No, no hay que censurarla por el lado sectario, pues además de ser una insidia es un craso error[298].

De hecho, uno de los logros del Centro fue el clima de compañerismo y camaradería entre los alumnos, y entre éstos y los profesores, favorecido por las actividades complementarias y extraescolares, lo que contribuyó a crear una conciencia de grupo entre quienes allí estudiaron:

> Uno de los resultados más valiosos ha sido la convivencia fraternal de los profesores, que tuvo dos aspectos gratísimos: el de volverse a encontrar, la mayoría, después de mucho tiempo tornando a revivir la época feliz de los años estudiantiles en la Superior y en la Universidad. [...] Ésta fué la única impresión desagradable, el recuerdo constante de los queridos compañeros que no pudieron asistir a la primera reunión[299].

El artículo 13 del Decreto de enero de 1932 suprime definitivamente la Escuela Superior del Magisterio, puesto que el establecimiento de la Sección de Pedagogía universitaria supone que aquélla «pierde ya su función propia y debe lógicamente quedar suprimida», y expresa el reconocimiento de su labor: «siendo de justicia reconocer que ésta, durante las diversas vicisitudes de su existencia, no ha dejado de realizar una labor meritoria y contribuyó, por una parte, a mejorar la obra de las Normales y de la Inspección»[300].

Es decir, la supresión de la Escuela Superior del Magisterio, pese a cuantas críticas pudiera merecer, no se debió a sus deficiencias o a sus carencias, sino a la pérdida de «su función propia». Estaba condenada a desaparecer para que quienes deseaban que la Pedagogía ocupase el lugar que le correspondía, al lado del resto de disciplinas universitarias, pudiesen ver realizada esta aspiración. No se cuestionaba que ambas instituciones se solapaban en sus funciones y la creación de una debía llevar aparejada la supresión de la otra. En ese momento no se contempla la posibilidad de que el centro coexista con

[298] Junta Directiva de la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales, *La Escuela de Estudios....*, op. cit.

[299] Chico Rello, Pedro: «Grupo de Geografía. Impresión y deducciones». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **91**, pp. 6–10. Cita en p. 6.

[300] *Preámbulo al Decreto de 27 de enero...*, op. cit., p. 732.

la Sección de Pedagogía, ya que se suponía que todas las funciones de aquél se trasladaban a ésta. No obstante eso nunca ocurrió.

No se dieron las condiciones que se pedían en las «Bases para la Reforma de las Escuelas Normales» que se debatieron en la Asamblea de la Asociación del Profesorado Numerario de Escuelas Normales en 1931. Se pedía que a la Sección de Pedagogía se ingresase con el título de Maestro; en la Escuela Superior ingresaban maestros y algunos licenciados, pero la Sección era un centro universitario y los requisitos de entrada no podían ser diferentes a los de los demás centros, luego para comenzar estudios en la universidad no se requería ninguna de las dos cosas.

Se pedía que la preparación del profesorado de secundaria se hiciese en la nueva Sección, cosa que tampoco ocurrió; es más, cuando de esta formación se encargaba el Instituto-Escuela, los aspirantes asistían a conferencias y cursos de Pedagogía en la Escuela Superior, algo que no sucedió con la Sección de Pedagogía. En la Sección desaparecían igualmente las prácticas pedagógicas, algo considerado fundamental en la Escuela suprimida.

Tampoco la formación de los formadores del magisterio primario pasó de la Escuela Superior a la Sección, pues si bien eso fue así en el caso de los profesores de las materias pedagógicas, las llamadas metodologías específicas no tuvieron cabida en dicha Sección. El profesorado de estas materias en las actuales Facultades de Educación se forma principalmente en los Departamentos correspondientes, una vez que ha realizado estudios universitarios previos en las correspondientes disciplinas, conocimientos indispensables para poder adquirir la formación en didáctica de una materia específica a un nivel suficiente para encargarse de la formación del magisterio, primario o secundario, algo que no podía exigirse –ni puede– como requisito de entrada a una Facultad. En cualquier caso, parece que la formación en didácticas específicas no estaba siquiera en la mente de quienes reclamaban un centro universitario para los estudios y la investigación en Pedagogía; o quizá la consideraran inmersa, diluida, en la formación pedagógica general y ni siquiera fuesen consciente de su especificidad ni de su necesidad.

Por otro lado, las funciones de la Sección de Pedagogía superan por su amplitud a las de la formación de los formadores del magisterio, algo que quizá no supieron ver claro quienes pensaban que ambas instituciones no tenía sentido que coexistiesen.

La misma Junta directiva de la Asociación de Profesores de Escuelas Normales, que había defendido la Escuela Superior cuando se la atacaba en épocas anteriores, con la llegada de la República en 1931, debatirá las Bases para la Reforma ya citadas, y apoyará su desaparición. Pero el preámbulo de la Base 11.ª deja claro que dicha desaparición es independiente de sus logros y fallos o de su funcionamiento:

> La Escuela Superior del Magisterio ha cumplido su misión histórica y su persistencia constituye un obstáculo a los anhelos de todos los primarios españoles. *Aun suponiendo perfecto este centro habría que suprimirlo*, porque el nobilísimo anhelo del magisterio de que se le abra la Universidad merece inmediata satisfacción[301].

Investigaciones recientes han puesto de manifiesto las virtudes de una institución que, como formadores de maestros, nos hace sentir cierta nostalgia:

> La Escuela [...] fue un centro de formación de funcionarios de élite –dentro del nivel primero de enseñanza–, previamente seleccionados, con «númerus clausus» de entrada, salida profesional asegurada y, en consecuencia, unos alumnos altamente motivados que llegaban allí ya con el título de Maestro o Licenciado y en muchos casos con cierta experiencia profesional en el magisterio primario. En suma, las condiciones pedagógicas óptimas que cualquier profesor anhela[302].

2.7. Protagonistas de la innovación en la educación matemática

El objeto de este apartado es hacer una breve recensión de las personas, profesores de Escuela Normal, que trataron de innovar en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas, tanto en la escuela primaria como en la formación de maestros. Son los protagonistas cuyas propuestas y realizaciones encontraremos a lo largo de este trabajo.

Se trata de profesores de Escuela Normal que, como tales,

[301] Gil Muñiz, *Bases para la reforma...*, op. cit., p. 119. La cursiva es nuestra.
[302] Viñao Frago, *Hombres e ideas...*, op. cit., p. 143.

- participaron en actividades de formación de maestros (conferencias, cursos, etc.),
- escribieron libros y artículos para la enseñanza Normal (de matemáticas y de metodología de las matemáticas),
- tradujeron libros de autores extranjeros,
- se implicaron en labores de divulgación educativa para adultos,
- etc.

La mayoría fueron alumnos de la Escuela Superior del Magisterio: Daniel Carretero Riosalido (1910-1913), Margarita Comas Camps (1912-1915), José María Eyaralar Almazán (1915-1918), Federico Landrove Moiño (no acabó los estudios en ese centro, solo estudió el curso 1910-1911), Josefina Pascual Ríos (1914-1917), Aurelio Rodríguez Charentón (1920-1924), Felipe Sáiz Salvat (1912-1915), Manuel Xiberta Roqueta (1912-1915).

También participaron en este movimiento Luis Paunero Ruiz y Francisco Romero Carrasco, quienes no fueron alumnos de la Escuela Superior, aunque sí pensionados por la JAE para estudiar la metodología de las matemáticas.

Cinco de estos diez profesores obtuvieron beca de la Junta para la Ampliación de Estudios y viajaron a Europa. Otros dos –Federico Landrove y Felipe Sáiz– la solicitaron, aunque no les fue concedida. Solo Daniel Carretero, Josefa Pascual y Manuel Xiberta no llegaron a solicitar beca. En el resto de este trabajo nos referiremos a ellos y a algunas de sus publicaciones.

Antonio Viñao comenta la presencia elevada, en relación a sus plantillas, entre los pensionados de la JAE de profesionales ligados al magisterio primario. Se trata de profesores de la Escuela Superior del Magisterio (que formaban a los formadores del magisterio primario), de profesores de Escuela Normal (encargados de la formación inicial de los maestros), inspectores de primera enseñanza (relacionados con la formación permanente) y directores de grupos escolares. Considera a estos tres últimos grupos como «intermediarios o mediadores culturales entre la 'alta' y la 'baja' pedagogía práctica

del magisterio primario, entre la pedagogía como ciencia y la pedagogía como arte profesional»[303].

Sin embargo, en el caso de las matemáticas, a diferencia de otras disciplinas como la pedagogía y algunas didácticas específicas, las ciencias sociales o las ciencias experimentales, no hallamos ninguna evidencia de que la llamada 'alta pedagogía' proviniese del profesorado de la Escuela Superior del Magisterio. El análisis minucioso y crítico de las aportaciones de algunos profesores normalistas, alumnos de la dicha institución, que llevaremos a cabo a lo largo de este trabajo de tesis, mostrará que el origen de la Didáctica de la Matemática tiene otros protagonistas, si bien el papel de la Escuela Superior del Magisterio, en la que se formaron, así como el de la Junta de Ampliación de Estudios y otros organismos institucionistas fue fundamental.

[303] Viñao Frago, *Pedagogía y experiencias...*, op. cit.

Capítulo 3

Las matemáticas en el Plan de 1914. Aritmética

Y todo un coro infantil
va cantando la lección:
«mil veces ciento, cien mil;
mil veces mil, un millón»

Antonio Machado

3.1. La enseñanza de la aritmética: propuestas de los formadores de maestros

Como muestra representativa de la enseñanza de la aritmética en las Escuelas Normales, nos centramos en las propuestas sobre el número y las cuatro operaciones básicas. Pretendemos conocer el tratamiento que se da a los sistemas de numeración y a las operaciones aritméticas en la formación de maestros por parte de los renovadores de la educación en los años veinte y treinta del siglo pasado.

Para los dos primeros apartados utilizaremos los dos libros de aritmética escritos por José María Eyaralar. Otros autores –Sáiz Salvat, Comas, Charentón, Romero, Paunero, etc.– escriben libros de aritmética para la escuela primaria y también libros de metodología de la matemática, pero no se trata

propiamente de libros para la formación en aritmética de los futuros maestros. Autores como Xiberta escriben libros de aritmética dirigidos tanto a la enseñanza secundaria como a la formación de maestros, pero nos centramos en los de Eyaralar por haber realizado una reelaboración de su primer libro una década después, por disponer de una obra de metodología en la que trata cuestiones relacionadas con la enseñanza de la numeración y de las operaciones fundamentales, con la que se puede contrastar su propuesta, y por tratarse, al contrario que Xiberta, de una persona que se cuenta entre los profesores que representan el grupo más innovador –y reflexivo– en cuanto a la enseñanza de la matemática en las Escuelas Normales.

En los dos apartados últimos nos referiremos a los libros escritos para la escuela primaria, con el fin de conocer la orientación que sus autores, profesores de Escuela Normal, daban a la Aritmética en ese nivel y contrastarlo, cuando el material lo permita, con las propuestas de las obras de Metodología.

En el caso de las operaciones, utilizaremos también los libros de metodología de las matemáticas de otros autores, para el análisis que se hace de las técnicas de cálculo, análisis en el que consideramos no solo el tratamiento que se les daba en la formación de maestros –un tratamiento matemático y didáctico de cuestiones ya estudiadas previamente por los alumnos futuros profesores–, sino también las orientaciones y los planteamientos para su desarrollo en las aulas de primaria.

3.1.1. La numeración en los libros de Aritmética de Eyaralar

Eyaralar escribió dos obras de aritmética destinadas a las Escuelas Normales; la primera, *Nuevo Tratado de Aritmética*, data de 1922, mientras que la segunda, *Aritmética Intuitiva*, la publicó diez años después[1] reorganizando el *Nuevo Tratado de Aritmética* y recogiendo su experiencia como profesor

[1]El *Nuevo Tratado de Aritmética* fue declarado de mérito por R.O. de 12 de junio de 1923. Eyaralar Almazán, José María: «Carta al Excmo. Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Residencia de Estudiantes. Archivo JAE. Expediente JAE / 49-170, pp. 20-24, 1936. Cita en p. 24.

de Escuela Normal. En ella se advierte una mayor influencia de los principios de la Educación Nueva.

Tomando como referencia investigaciones en Didáctica de la Matemática realizadas en el marco de la TAD[2], y el *modelo epistemológico de referencia* del desarrollo de los sistemas de numeración descrito en dichas investigaciones, analizamos hasta qué punto están presentes o no las cuestiones problemáticas a las que responde la numeración, las 'razones de ser' del sistema posicional decimal, y la *transposición didáctica* llevada a cabo en relación a ese conocimiento.

3.1.1.1. La numeración en el *Nuevo Tratado de Aritmética*

En ambas Aritméticas, la numeración se trata en el capítulo primero. Los epígrafes de que consta el *Nuevo Tratado de Aritmética* son: I. El número. II. La numeración: 1. Numeración hablada. 2. Numeración escrita. III. La cantidad. En la *Aritmética Intuitiva* se suprime el apartado III.

En el apartado I del *Nuevo Tratado de Aritmética*, se definen en primer lugar *conjunto, elemento* y *unidad*. A continuación se definen conjuntos *iguales* como aquéllos en que a cada elemento del primero corresponde uno del segundo y viceversa. Del mismo modo se define cuándo un conjunto es *mayor (menor)* que otro. El número se define como la propiedad común a varios conjuntos iguales (según la definición anterior): *«Número es, pues, el concepto abstracto de un conjunto, o bien el concepto de cuántas unidades forman dicho conjunto»*[3]. Más tarde, *«el número está formado por la reunión de unidades abstractas»*. Y aclara:

> El número así definido es el *cardinal*; responde a la pregunta ¿cuántos? Objetos hay en un conjunto. Puede ahora considerarse estos obje-

[2]Bosch Casabó, Marianna; Gascón Pérez, Josep y Sierra Delgado, Tomás: «Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: el caso de los sistemas de numeración». En: M.J. González; M.T. González y J Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 139–150. SEIEM, Santander, 2009.

Sierra Delgado, Tomás A.: *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid, 2006.

[3]Eyaralar Almazán, José María: *Nuevo Tratado de Aritmética*. Reus, Madrid, 1922, p. 7.

> tos en un *orden* cualquiera, y el número que indica el lugar que ocupa un objeto, dado por el número de objetos que tiene ante él, es un número llamado *ordinal*[4].

Contar se define como hallar el número que corresponde a un determinado conjunto.

La *cuestión* que se plantea para dar sentido a la numeración es cómo representar con pocas palabras y con pocos signos los infinitos números y, además, cómo hacerlo de manera que la representación de un conjunto (en realidad del número que corresponde a un conjunto dado) fuese más eficaz que la representación mediante un conjunto coordinable con él (por ejemplo, piedrecillas o marcas). Así pues, la necesidad de la numeración se plantea porque «era preciso obtener signos más apropiados para representar los conjuntos numerosos, aun más manejables, y era preciso darles un nombre que respondiese al concepto abstracto que de ellos se adquiría»[5].

La primera respuesta –provisional– a la cuestión de la designación –tras descartar la de construir un conjunto coordinable– es el *agrupamiento en unidades colectivas*. En principio pone ejemplos históricos (decurias, centurias...) o de la vida cotidiana (docenas, gruesas; pliegos, cuadernillos, manos, si se trata de papel). Aquí hace una comparación interesante, poniendo de manifiesto la diferencia entre estos usos cotidianos y un verdadero sistema de numeración, ya que en el caso de agrupar por docenas y gruesas el número de objetos sueltos o el de docenas siempre será menor que doce, pero no así el número de gruesas, mientras que en el llamado *sistema decimal* se prolonga el principio del agrupamiento de forma indefinida. Este apartado continúa exponiendo la numeración oral habitual, haciendo hincapié en la posibilidad de designar números de cualquier tamaño.

Comenta después que el mismo proceso era posible hacerlo agrupando según otro número diferente del diez, define *base* de un sistema y cita ejemplos históricos de sistemas de numeración no decimales.

Acaba este apartado, dedicado a la numeración oral, definiendo la *serie natural de los números*, como la que comienza por la unidad y va generando cada nuevo número añadiendo una unidad al anterior. Esto le permite

[4]Ibídem, p. 7.

[5]Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 8.

redefinir la operación de contar como la de sustituir un conjunto por otro equivalente formado por la serie de los números, hasta el número correspondiente al último objeto contado.

Como respuestas posibles al problema de la designación escrita, comienza aclarando que un número puede representarse reproduciendo gráficamente el conjunto correspondiente (pone el ejemplo del dominó o los naipes) o sustituir varios de estos signos por otro signo diferente –está refiriéndose a los *sistemas aditivos*–, como en el sistema romano, que describe a continuación. Refiere cómo en los inicios de este sistema romano se repetían los símbolos (como en un sistema aditivo), hasta que se introdujo el principio sustractivo, para no repetir más de tres veces un símbolo.

El siguiente epígrafe describe la evolución de la numeración en la Edad Media. Esto tiene un doble fin; por un lado la finalidad declarada de

> exponer el proceso histórico de conceptos, figuras o propiedades; proceso acorde con la evolución mental del niño; que da un sentido humano a estas verdades demasiado abstractas y que demostrando el progreso realizado, da sensación de vida a estos estudios e induce a superarlos[6].

Y por otro, mostrar una posible evolución hacia el sistema actual de numeración, que llama 'moderno'. En efecto, describe el ábaco romano y la variante con discos o bolas insertados en varillas, como origen del *tablero contador*[7] usado en las escuelas. Y también, tras la invención de los símbolos para los nueve primeros números y, por tanto, el establecimiento del número máximo de unidades de cualquier orden que podía haber en un número, el ábaco utilizado más tardíamente, con los numerales 'árabes'[8]:

[6] Eyaralar Almazán, José María: «Curiosidades Matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **87**, pp. 90–92. Cita en p. 90.

[7] El *tablero contador*, o tablero de las cien bolas, que describieron Vallejo y Montesino y que se usaba en las escuelas de párvulos, no es un ábaco propiamente dicho, pues el valor de cada bola no depende de su posición: todas las bolas valen lo mismo y en el tablero contador solo se representan los números hasta el 100.

Carrillo Gallego, Dolores: *La Metodología de la Aritmética en los comienzos de los Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*. Tesis doctoral, Universidad de Murcia, 2005.

[8] En el libro de Georges Ifrah se cita el *abacus de Gerbert*, refiriéndose al ábaco introducido por Gerberto de Aurillac con *ápices* en los que figuraban las cifras arábigas. Ifrah,

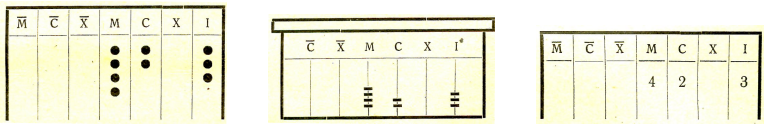


Figura 3.1: Eyaralar. Ábacos

Hay que señalar que, justo antes de describir este último ábaco, describe lo que sería un *sistema multiplicativo*, designando por u, d, c, $\overline{u}, \overline{d}, \overline{c}$, las unidades, decenas, centenas, unidades de millar, decenas de millar, centenas de millar, respectivamente, y pone el ejemplo de $3\overline{c}, 4\overline{d}, 2\overline{u}, 6d, 5u$ (trescientos cuarenta y dos mil sesenta y cinco) .

En el epígrafe dedicado a la numeración moderna se aclara que el principio posicional es un *convenio* y el valor *absoluto* y *relativo* que tiene cada cifra, así como la necesidad del *cero* para indicar la ausencia de unidades de un cierto orden, que en el ábaco suponía un lugar vacío. Seguidamente vienen las reglas para escribir y para leer cualquier número. Después la representación de cualquier número general por una letra y la descomposición polinómica para expresar un número como suma de coeficientes multiplicados por potencias de diez.

Finaliza el apartado con varias indicaciones de orden pedagógico. La enseñanza ha de ser: *objetiva* (empezar por contar objetos manipulables y representados gráficamente); *graduada* (primero estudiar uno a uno los diez primeros números y después por tramos); *asociativa* (objetos reales manipulables, relacionar numeración escrita y hablada y operaciones, relación de la numeración con otras materias de la enseñanza); *activa y agradable* (juegos, narraciones...); *una preparación para la vida* (usar números referibles a cuestiones prácticas).

El último apartado del capítulo va dedicado a la medida; en él se introducen los conceptos de *magnitud* y *cantidad*, *unidad* y *medida*. Se define *número entero* como el que resulta de una medida; también se definen el número *fraccionario* y el *incomensurable* [sic]. Y por último, la representación de la *serie natural de los números enteros* en la semirrecta, haciendo notar

GEORGES: *Historia Universal de las Cifras*. Madrid, 2.ª edición, 1997. Edición original: Histoire universelle des chiffres, 1981, Éditions Robert Laffont, Paris, cap. 26.

que responde a las dos definiciones de número entero:

> 0-6 es la representación del número 6, pues es un conjunto de seis segmentos. Con la segunda definición dada de número entero también coincide nuestra representación: el segmento 0-6 tiene por medida el número 6 cuando el segmento 0-1 se toma como unidad[9].

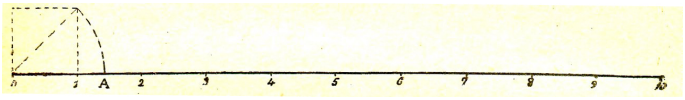


Figura 3.2: Eyaralar. Representación en la recta numérica

Finalmente añade unas indicaciones pedagógicas: estudiar conjuntamente el sistema de numeración y el sistema métrico decimal. Acaba el capítulo con una relación de ejercicios sobre el sistema de numeración, las relaciones entre los diferentes órdenes de unidades, la escritura y lectura de números, el cambio de base, la numeración romana, el sistema métrico decimal y la representación gráfica de los números.

3.1.1.2. La numeración en la *Aritmética Intuitiva*

En la *Aritmética Intuitiva* este tema, como otros, se reduce en extensión (de 30 a 17 páginas) y se simplifica; pero también hay otros cambios. Las notas históricas disminuyen y se sitúan al final del capítulo. Se define *unidad* antes que *conjunto*; después *igualdad* y *desigualdad* de conjuntos; *contar* se define ahora como *«dar nombre a un conjunto, o determinar cuántas unidades forman una pluralidad»*[10]. Al definir el número, define ya *número abstracto* y *número concreto o entero*, por lo que suprime el apartado dedicado a la cantidad y la medida. El epígrafe sobre la representación de los números va después de tratar la numeración escrita y las reglas sobre lectura y escritura de números, justo antes de las notas históricas.

Al introducir la numeración hablada y escrita, al procedimiento de agrupar en lo que antes denominaba *unidades colectivas*, lo que constituiría un

[9] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 30.

[10] Eyaralar Almazán, José María: *Aritmética Intuitiva*. Reus, Madrid, 1932, p. 11.

sistema de numeración multiplicativo (oral), lo llama 'Procedimiento natural', y al sistema de numeración decimal, 'Procedimiento sistemático'. Hay que señalar que ahora se suprime la observación de que el agrupamiento solo se hace indefinidamente en éste último (podía haber doce o más gruesas pero no diez o más unidades de un orden). La característica que diferencia ahora el sistema decimal de otros sistemas de uso cotidiano es únicamente la base.

Aparecen en un único epígrafe los dos procedimientos para determinar un conjunto, bien contando todos sus elementos siguiendo la serie de los números hasta el último elemento, bien agrupando en grupos de diez, de diez veces diez, etc. y expresando el resultado final enunciando «sucesivamente, a partir del orden más elevado, las unidades que haya de cada uno»[11].

La numeración escrita comienza con el 'Procedimiento natural', que es un *sistema multiplicativo*, usando las iniciales de 'unidad', 'decena', centenas, etc., para representar los órdenes de unidades; pone el ejemplo: «3d'4c8d = tres decenas de millar, cuatro centenas, ocho decenas = treinta mil, cuatrocientos, ochenta»[12]. El sistema de numeración posicional lo presenta a continuación como una *evolución* del anterior:

> Ha parecido más sencillo que cada cifra representase las unidades de cada orden por el lugar que ocupase contando a partir de la derecha del número adoptando un signo (0 = *cero*) para ocupar el lugar del orden de unidades que no existan en el número. Así el número anterior se escribirá 30480.

Y el cero vuelve a presentarse como una necesidad de la aplicación del principio posicional.

En este segundo libro de aritmética destaca la enumeración de los principios del sistema posicional (aparecen numerados, uno a continuación de otro, y en letra cursiva[13]).

Se simplifica el epígrafe dedicado a la representación gráfica de los números, que ahora se incluye en el capítulo II, suprimiendo las referencias a números no enteros. En cambio se define 'contar' como recorrer la recta, a

[11] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 15.
[12] Ibídem, p. 16.
[13] Ibídem, p. 17.

partir del origen, hacia la derecha y el orden en los números también se define por la posición relativa en la recta numérica.

Solo la relación de ejercicios al final del tema es más extensa, pasa de 24 a 35; aunque veremos que esa no es la única diferencia.

3.1.1.3. Comentarios

Mientras en el *Nuevo Tratado de Aritmética* Eyaralar primero define el número con un significado cardinal, a partir de conjuntos 'coordinables' (aunque no utilice este término), y luego define número ordinal, en la *Aritmética Intuitiva* la definición de número corresponde a la interpretación cardinal y no se hace esta precisión. No obstante, hay que observar que este autor es consciente del papel del concepto de número que surge de construir la serie de los números desde el primero mediante la aplicación «siguiente» (construcción de Peano), e incluso de lo que esto implica a la hora de definir las operaciones, en particular la suma. Así, en un artículo publicado en 1932, en el que aborda la demostración de que «2 + 2 = 4», afirma:

> El concepto intuitivo del número es difícil si no imposible de formar en cuanto el número crece un poco, y a causa de ello es sustituído por el concepto *serial*, en el cual cada número está formado agregando una unidad al anterior. Así, mientras el concepto intuitivo de *cuatro* es
>
> ! ! ! !
>
> el concepto serial es
>
> 3 + 1
>
> Y ahora ya no es tan evidente la proposición que encabeza este epígrafe[14].

A diferencia de otras propuestas de enseñanza de la numeración, que pueden clasificarse como «clásicas»[15], la *cuestión* que se plantea no es solamente, y en primer lugar, la de la designación de infinitos números con un número finito de signos, ni siquiera *«representar los números con pocos signos»*[16]. Justo antes de iniciar el epígrafe que comienza definiendo 'numeración', lo

[14] Eyaralar Almazán, *Curiosidades Matemáticas*, op. cit., cita en pp. 90-91.
[15] Sierra Delgado, *Lo matemático en el diseño...*, op. cit.
[16] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva* op. cit., p. 16.

que se plantea como *cuestión inicial* es la «necesidad de *determinar* un conjunto, esto es, de poder reconocerlo y de saber si es mayor o menor que otro»[17], mediante una técnica mejor –más *económica* o *«manejable»*– que la que ha descrito en primer lugar: construir un conjunto coordinable con otros objetos o mediante marcas. Es esta cuestión la que da sentido a la técnica del «agrupamiento» (en unidades colectivas).

Eyaralar, en su Metodología aconseja incluir el estudio de otros sistemas de numeración en la escuela primaria, pero no alude a ninguna razón de tipo utilitario o propedéutico, al contrario:

> Para que el conocimiento de los sistemas de numeración sea completo y educativo desde un punto de vista humano, es necesario que se estudien los diferentes sistemas, *sus evoluciones con los inconvenientes y ventajas que presentan* (numeración romana inclusive), para llegar a percibir la larga evolución del pensamiento humano hasta la adquisición del actual y maravilloso mecanismo[18].

El cuestionamiento de las técnicas –sistemas de numeración– que a lo largo del tiempo se han propuesto como respuesta a la cuestión de la designación de los números, se hace patente cuando indica expresamente que se estudien –no solo en las Escuelas Normales sino también en la escuela primaria– las ventajas y los inconvenientes de cada una de ellas y cómo han ido evolucionando hasta una solución que es «algo realmente maravilloso»[19]. Concretamente, y siguiendo el modelo de Jean Macé[20], incluye en esta obra de Metodología una lectura para niños titulada *El rebaño de Juanito*, que trata de la búsqueda de soluciones al problema de comparar colecciones (en este caso una misma colección en dos momentos diferentes):

> Mira, Juanillo, mañana con el alba llevarás a pastar todas estas ovejas ayudado por Pedrito el zagalín y estos dos mastines. Pero has de tener cuidado de que a la noche vuelvan tantas como te lleves sin

[17] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 8.

[18] Eyaralar Almazán, José María: *Metodología de la Matemática*. Reus, Madrid, 1933, op. cit., p. 43. La cursiva es nuestra.

[19] Ibídem, p. 43.

[20] Macé, Jean: *L'Arithmétique du grand-papa. Histoire de deux marchands de pommes*. I. Hetzel et Cie, París, 3.ª edición.

> faltar una, y ya sabes lo fácil que es que se alejen y no vuelvan cuando pastan. Pues bueno, tú las contarás al salir, y al volver, y me dirás si hay las mismas[21].

Las soluciones intermedias son: 'contar' las ovejas mediante la comparación biunívoca entre las ovejas y una colección de guijarros, la sustitución de cada diez guijarros por una piedra de mayor tamaño, luego diez de éstas en una mayor aún y, por último, utilizar números.

Es consciente de la dificultad de imaginar colecciones grandes y del papel de las actividades de evaluar una cantidad y asignarle un número mediante la *técnica* de agrupar sucesivamente en unidades cada vez de mayor orden; en la *Aritmética Intuitiva* aclara que «esta manera de contar nos muestra la constitución del número y nos da una clara idea de él»[22].

A pesar de que las operaciones aritméticas aún no se han presentado –lo harán en el segundo capítulo–, Eyaralar al describir el sistema de numeración romano hace a los futuros maestros este comentario de tipo *tecnológico*:

> Actualmente solo en los relojes, en la paginación de libros y en las fechas, es utilizado. *Su inconveniente principal consiste en que* por no corresponder la representación del número con su verdadera constitución, según unidades de los diversos órdenes *se presta muy mal para el cálculo*[23].

Vemos que, aunque de una forma muy breve, apenas una aclaración a pie de página, alude al *ámbito de aplicación* de esta *técnica matemática*[24] –la numeración romana– para designar números. Sin embargo no hace comentarios sobre la *economía* (por ejemplo, número de símbolos necesario para representar un número) del sistema. Solo se hace referencia al ahorro de símbolos cuando se propone pasar del sistema multiplicativo ('procedimiento natural') al posicional.

[21] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 239.

[22] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 15.

[23] Eyaralar Almazán, José María: *Nuevo Tratado de Aritmética*. Reus, Madrid, 1922, op. cit., p. 17 (nota a pie). La cursiva es nuestra.

[24] Chevallard, Yves: «L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1999, **19(2)**, pp. 221–266.

En cualquier caso, hay diferencias entre el tratamiento que tiene la numeración romana en las dos Aritméticas y sobre su papel. En el *Nuevo Tratado de Aritmética* este sistema va antes del actual, como una de las soluciones o respuestas anteriores a la cuestión que se plantea para dar sentido al sistema actual. En la *Aritmética Intuitiva* el sistema romano aparece después de haber estudiado el sistema posicional decimal, al final del capítulo, como una curiosidad histórica. Solo recuerda brevemente la escritura de números en el sistema romano, pero ni siquiera establece todas las reglas, tan solo el principio aditivo y éste sin hablar de ninguna restricción.

El cuestionamiento de la 'razón de ser' de los conocimientos que se proponen se percibe asimismo en lo referente al estudio de los sistemas de numeración en otras bases diferentes de diez:

> En todas las escuelas se estudia en cierto modo el paso de un sistema de numeración al decimal y viceversa al transformar los números complejos. En algunos libros españoles (Palau Vera) se estudian directamente estas transformaciones. Nosotros creemos conveniente el estudio de los sistemas de numeración por su valor educativo[25].

Las concordancias y diferencias en los contenidos entre ambas aritméticas tienen su reflejo en los ejercicios que propone.

Las dos Aritméticas incluyen ejercicios para poner a prueba o afianzar la comprensión del principio posicional y la ley de formación de los números. Los ejercicios de lectura y escritura de números y los de equivalencia de unidades de diferentes órdenes están en ambas obras. Pero hay matices diferentes en la relaciones de ejercicios de una y otra obra.

Así, aparecen en su segunda Aritmética algunos tipos de ejercicios que no están en la primera. En la *Aritmética Intuitiva* el primer ejercicio solicita la comparación de dos conjuntos de *objetos*, y el segundo pide establecer la correlación entre las diferentes unidades del sistema de numeración decimal y las del sistema métrico decimal (magnitudes lineales). También hay un ejercicio, el 4, que pregunta cómo representar números en un sistema aditivo

[25] Eyaralar Almazán, *Curiosidades Matemáticas* op. cit., cita en p. 92.

Margarita Comas en su *Aritmética*, p. 87, comete un claro error al poner 18 en base 3 como "60" y no está en la Fe de Erratas que figura al final del libro.

cuyos signos se inventa Eyaralar (luego los propondrá también en la *Metodología*[26]). Después, el ejercicio 6 pide una comparación entre el sistema anterior (aditivo) y el habitual (posicional): «distribuir un conjunto en unidades de los diferentes órdenes del sistema de base 10 y representarlo con la notación adoptada en [el ejercicio] 4 y con la actual»[27]. Otro ejercicio que no aparecía en su primera obra es el de representar números en un ábaco[28].

En el *Nuevo Tratado de Aritmética* encontramos el ejercicio: «Dado el número 45276, explicar el cambio que experimenta si se colocan dos ceros entre el 2 y el 7»[29]. Pero en la *Aritmética Intuitiva* se insiste mucho más en este tipo de ejercicios:

> 28. Explicar el cambio que experimenta el número 38 al añadirle dos ceros.
>
> 29. Ídem íd., al intercalar dos ceros entre el 3 y el 8.
>
> 30. Ídem, íd. el número 34827 cambiando el 4 por el 7.
>
> 31. Ídem, íd., 873245 permutando el 4 con el 7.
>
> 32. Ídem, Íd., 834526 permutando el 6 con el 3 y el 5 con el 8[30].

Hay ejemplos de otros enunciados que no hallamos en el *Nuevo Tratado de Aritmética* y sí en la *Aritmética Intuitiva*: «¿Cuál es el número más pequeño de 3, 5, 7 y 10 cifras?»[31].

Mientras que en el *Nuevo Tratado de Aritmética* hay dos ejercicios en los que se pide escribir en números romanos algunos números dados en el sistema posicional y viceversa, en la *Aritmética Intuitiva* no se proponen ejercicios sobre números romanos.

Hay cuatro ejercicios de cambio de base (del número 13 al 16) en el *Nuevo Tratado de Aritmética* y uno en la *Aritmética Intuitiva* (el número 5), y de los cuatro del *Nuevo Tratado de Aritmética*, solo en dos se pide efectuar cambios de una base a otra; el resto van encaminados a la comprensión de

[26] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 203-204.

[27] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 21.

[28] Ibídem, p. 21. Hace referencia al «ábaco de los billares», que se hallaba en los lugares en los que se jugaba este juego, para contar carambolas, y especifica que cada alambre tiene 10 bolas.

[29] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 34.

[30] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 25.

[31] Ibídem, p. 22.

los principios del sistema posicional, de acuerdo con lo expresado por su autor respecto de aquel tipo de ejercicios:

> 13. 1.º.- ¿Cuántas cajitas pueden llenarse con 368 bolas poniendo 5 en cada cajita?
>
> 2º.- ¿Cuántas cajitas pueden llenarse con las cajitas anteriores poniendo 5 en cada caja? ¿Cuántas bolas hay en cada caja?
>
> 3.º- ¿Cuántos paquetes de a 5 cajas pueden hacerse? ¿Cuántas bolas hay en cada uno?
>
> 4.º- ¿Cómo quedan distribuídas las 368 bolas?
>
> 14. ¿Cuántos signos son necesarios para escribir un número en el sistema de base 5? ¿Y en el de base 12?[32].

En general podemos afirmar que si bien en ambos libros, junto a ejercicios de práctica de los principios del sistema de numeración decimal y de mecanización de los sistemas oral y escrito, se incluyen ejercicios destinados a la comprensión de los principios del sistema posicional, en la segunda obra se insiste más en ejercicios que pongan a prueba esa comprensión, y en otros que muestren la evolución de los sistemas y permitan al alumno comparar el actual con otras soluciones menos eficaces al problema de la designación de las cantidades.

3.1.2. Las operaciones en los libros de Aritmética para las Normales de Eyaralar

Hemos elegido una de las cuatro operaciones básicas, la división, para analizar y comparar el tratamiento que Eyaralar hace en las dos Aritméticas que escribió para la formación inicial de maestros, y nos centraremos en este apartado en lo referente a la definición –sentido– de la operación. Podremos compararlo con Francisco Romero, cuyo libro de metodología trata sobre las operaciones aritméticas y los procedimientos de cálculo para alumnos normalistas. En cualquier caso, cuando tratemos aspectos de las técnicas de cálculo o del papel de las representaciones gráficas y del simbolismo, nos referiremos en ocasiones a las cuatro operaciones.

[32] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 33.

Otros profesores no escriben obras para enseñar el sentido de las operaciones y la justificación de las técnicas habituales a los futuros maestros, sino que hacen comentarios a los alumnos normalistas sobre la enseñanza de las operaciones en el nivel de primaria, como Sáiz Salvat, o como Charentón, quien en su libro de *Metodología* hace algunas observaciones sobre la división precisamente, al hablar del papel de los problemas. También podemos deducir las ideas que sobre la enseñanza de las operaciones tenían los profesores normalistas a partir de obras escritas por ellos para usarse en la escuela primaria, como las de Charentón, Comas o Sáiz Salvat. Estas obras las estudiaremos en los siguientes apartados.

En el *Nuevo Tratado de Aritmética*, Eyaralar comienza por proponer la siguiente situación: *«Una obrera ha confeccionado 54 pañuelos, y como los cobra por docenas quiere saber cuántas docenas contienen»*[33]. La *tarea* propuesta para motivar la división consiste en hallar el número de partes, conocidos la cantidad total y la cantidad de cada parte, en una situación de reagrupamientos idénticos. La *técnica* que presenta para resolverla alude a la realización con objetos, separar grupos de 12 pañuelos, hasta 4 docenas, y comprobar que ha separado 48 y le quedan 6. Inmediatamente da a las cantidades que han intervenido los nombres de 'dividendo', 'divisor', 'cociente' y 'resto' y expresa en lenguaje simbólico la relación «$54 = 12 \cdot 4 + 6$ y $6 < 12$»[34], relación que ejerce un papel *tecnológico* para la técnica de las restas sucesivas. A partir de ello enuncia la técnica que denomina 'natural' para realizar una división: «restar del dividendo el divisor todas las veces que sea posible. El último resto es el resto de la división; el número de veces que se pueda restar es el cociente». Entonces da la primera definición de división: *«La división es una operación que tiene por objeto determinar cuántas veces un número (dividendo) contiene a otro (divisor). El número de veces que lo contiene se llama cociente»*[35]. Y diferencia entre división exacta e inexacta.

La segunda situación que propone es: *«Un padre reparte 15 pesetas a partes iguales entre sus tres hijos ¿cuánto corresponde a cada uno?»*. Ahora la *tarea* es calcular la cuantía de cada parte y la cuantía restante, en una

[33]Ibídem, p. 79.
[34]Ibídem, p. 80.
[35]Ibídem, p. 80.

situación de reparto equitativo, conocidos la cantidad total y el número de partes. La *técnica* es buscar un número que multiplicado por 3 (repetido 3 veces) dé 15, recurriendo a la multiplicación, en este caso a un resultado conocido. Se busca «un número de pesetas *3 veces menor que 15*, puesto que repetido tres veces nos ha de igualar a 15»[36]. Define la enésima parte de un número como la enésima parte del mayor número contenido en él que tenga enésima parte exacta, y 'resto' como la diferencia entre ese mayor número y el de partida. Ahora ya da la segunda definición de división: *«La división es una operación que tiene por objeto hacer un número (dividendo) tantas veces menor como unidades tiene otro (divisor)»*.

También aclara, para la primera definición, que en el caso de un dividendo 'concreto', el dividendo, el divisor y el resto son de la misma especie y del mismo orden de unidades y el cociente es un número abstracto. En la segunda definición, es el divisor el que es un número abstracto y si el dividendo es concreto, el cociente[37] y el resto son de la misma especie que el dividendo. Diferencia pues entre el papel del cociente –el número buscado– como operador escalar sin dimensión o como un operador funcional, respectivamente[38].

Por último, presenta la tercera definición de división como un *modelo común* que permite unificar las definiciones anteriores: *«La división es una operación que tiene por objeto, dado un producto de dos factores y uno de éstos, hallar el otro»*, y el cociente exacto es el número por el que hay que multiplicar el divisor para obtener el dividendo. Esta definición lleva asociada la *técnica* anterior (ahora proporciona un procedimiento) para hallar el cociente: formar la serie de los múltiplos del divisor hasta encontrar uno que coincida con el dividendo (división exacta), o bien elegir el mayor número que al multiplicarlo por el divisor dé como resultado un número menor que el dividendo. La *tecnología* asociada a esta técnica la precisa para el caso particular de dividir 34 entre 5: 5 x 6 = 30 y 5 x 7 = 35. Los elementos tecnológicos aluden ahora claramente a la relación entre la multiplicación y la división, como operaciones inversas.

[36]Ibídem, p. 81.

[37]En el libro hay una errata y donde debe decir 'cociente' dice 'divisor'.

[38]Vergnaud, Gérard: *L'enfant, la Mathématique et la Réalité*. Peter Lang, Berna, 1981.

Cuando se trata de la práctica de la división, reconoce que las técnicas anteriores no resultan *económicas*, y pierden *fiabilidad* al crecer el tamaño de los números, lo que restringe su *ámbito de aplicabilidad*[39] a un campo numérico restringido. Según sus propias palabras, el procedimiento descrito «resulta largo, fatigoso y expuesto a errores en cuanto los números dados para dividir son algo grandes y, sobre todo, cuando el cociente tenga varias cifras»[40]. Esta razón tecnológica actúa como *razón de ser* de la técnica habitual para dividir, que presenta siguiendo una secuencia en cuatro fases, según la complejidad del procedimiento, determinada a su vez por el tamaño de los números que intervienen: divisor y cociente de una cifra; divisor de varias cifras y cociente de una sola; divisor y cociente de varias cifras; divisor de una cifra y cociente de varias (lo reduce al caso anterior). Antes proporciona un procedimiento justificado para averiguar, a priori, el número de cifras del cociente.

Luego vienen algunas propiedades y su aplicación al cálculo rápido o al cálculo mental.

En *Aritmética Intuitiva* comienza definiendo la división 'gráfica'. Para ello parte de la situación: *«Determinar cuántas veces el segmento a contiene al segmento b»* (figura 3.3, p. 169).

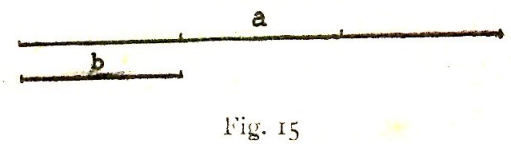


Fig. 15

Figura 3.3: Eyaralar. Definición 'gráfica' de la división

La *técnica* ahora es llevar b sobre a tantas veces como se pueda y dicho

[39] Brousseau, Guy: «Le calcul «à la plume» des multiplications et des divisions élémentaires». ARDM, 2007. `http://www.ardm.eu/files/Francais_Calcul_partie1.pdf`. Consultado el 10-10-2015

Sierra Delgado, Tomás A.; Bosch Casabó, Marianna y Gascón Pérez, Josep: «El cuestionamiento tecnológico-teórico en la Actividad Matemática. El caso del Algoritmo de la Multiplicación». *BOLEMA-Boletím de Educaçao Matemática*, 2013, **27(47)**, pp. 805–828.

[40] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 87.

número es la respuesta: «a = b x 3». Este ejemplo le sirve para presentar simultáneamente tres definiciones de división:

> La operación realizada tiene tres aspectos:
> 1.º Hemos hallado cuántas veces a contiene a b, resultando 3.
> 2.º Hemos dividido a en 3 partes iguales.
> 3.º Hemos hallado un número, 3, que, multiplicado por b, nos da a[41].

Aclara a continuación que esas mismas cuestiones se pueden resolver numéricamente, atribuyendo a los segmentos a y b los valores 6 cm y 2 cm, respectivamente. Con este ejemplo numérico presenta juntas las dos técnicas, restas sucesivas y tanteos para hallar que 2 es la 'tercera parte' de 6, esto es, que «2 cm. x 3 = 6 cm.»[42]. Y entonces da las tres correspondientes formas de caracterizar la división numérica:

> 1.º Hallar cuántas veces un número contiene a otro. [...]
> 2.º Dividir un número en tantas partes iguales como indica otro. [...]
> 3.º La división de dos números, dividendo y divisor tiene por objeto hallar un tercero que multiplicado por el divisor nos da el dividendo[43].

Expresa mediante una fórmula la relación entre el dividendo, el divisor y el cociente y aclara que la implicación recíproca es cierta, es decir, el cumplimiento de dicha relación supone que los tres números que intervienen pueden considerarse como los términos de una división exacta.

Esta misma línea la desarrolla después para definir la división inexacta, tras lo que hace varias observaciones: que si se divide un número en 2, 3 o más partes, cada una se llama 'mitad', 'tercera parte', etc.; que con números abstractos todas las definiciones dadas son equivalentes y son por tanto intercambiables para deducir reglas o propiedades; introduce un signo de invención propia (figura 3.22, p. 212) para expresar que un resultado es el cociente entero (aproximado) de una división.

[41] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 83.
[42] Ibídem, p. 84.
[43] Ibídem, p. 84.

Para *motivar la introducción del algoritmo*, presenta lo que llama 'procedimiento natural', que es el de las restas sucesivas o el buscar –por tanteo– un número que multiplicado por el divisor dé el dividendo, o sea, el número que más se aproxime por defecto; esto lo hace con un ejemplo numérico y a continuación califica el procedimiento de largo, penoso y expuesto a errores.

La secuencia para presentar la técnica algorítmica habitual presenta diferencias con la que proponía en *Nuevo Tratado de Aritmética*; ahora las fases son: divisor y cociente de una cifra (sugiere recurrir a la tabla pitagórica); divisor de varias cifras y cociente de una sola; divisor de una cifra y cociente de varias; divisor y cociente de varias cifras. Por último, presenta la prueba de la división y finaliza con algunas propiedades y su aplicación al cálculo rápido.

Comparemos el tratamiento que recibe la división en ambas Aritméticas.

En los dos libros propone situaciones de naturaleza diferente, pero que son modelizables mediante la división euclídea. En *Nuevo Tratado de Aritmética* se proponen ejemplos de problemas que aluden a *tipos de tareas* asociadas a los diferentes significados de la división, y que, al mismo tiempo, han de contribuir a poner de manifiesto los elementos comunes y la existencia de un modelo matemático común. Las técnicas se presentan en un principio asociadas a tipos de tareas y se explican con ejemplos particulares. Intenta dar sentido a las técnicas relacionando éstas con las definiciones. Los problemas propuestos como ejemplos introductorios desempeñan un papel doble: por un lado, motivan la razón de ser de introducir la división, pero también inducen una técnica, la explican, y de este modo contribuyen a la tecnología de la técnica.

Ambas situaciones, junto con las técnicas asociadas, permiten construir la fórmula $D = d \cdot c$ (o $D = d \cdot c + r$ con $r < d$), que a la vez modeliza la relación existente entre las operaciones de multiplicar y dividir, como operaciones inversas, y actúa como un elemento tecnológico que permite comprender o justificar la técnica multiplicativa (apenas esbozada con el ejemplo que emplea para la segunda definición), explicada con detalle a continuación, y más tarde también algunos *gestos* en el desarrollo de la técnica habitual.

Antes de presentar una técnica común ofrece pues un modelo de división

más general, que engloba a los anteriores, lo que a su vez justifica la existencia de una técnica general aplicable a todos los tipos de tareas.

En *Aritmética Intuitiva* parte primero de un problema gráfico y después de otro similar en un contexto numérico –esta vez utiliza números más pequeños– para introducir los diferentes significados de la división, ahora de manera simultánea, sin asociarlos a situaciones o problemas diferentes. En este caso la fórmula anterior no aparece antes de la técnica multiplicativa, sino que ambas técnicas, la sustractiva y la multiplicativa, han sido presentadas justo antes, aunque solo con un ejemplo, y sin institucionalizarlas.

En ambas Aritméticas, la técnica habitual, más económica, más fiable y también menos transparente, motiva su necesidad por la falta de economía (*largo, penoso*) y fiabilidad (*expuesto a errores*[44]) de las técnicas primitivas, es decir, se preocupa por mostrar las limitaciones de unas técnicas y la razón de ser de las otras.

Los conocimientos que actúan como *elementos tecnológicos* en los que se apoya la técnica habitual, que han de permitir comprender y justificar los *gestos* en la ejecución del algoritmo, son las reglas del sistema posicional decimal y la definición de división euclídea. En el *Nuevo Tratado de Aritmética* hace explícitos estos elementos tecnológicos, junto con los relativos a la operación de multiplicar:

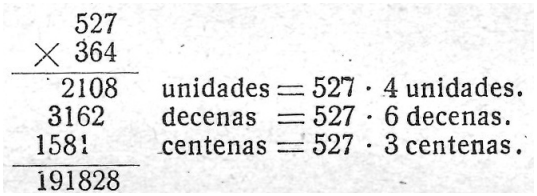


Figura 3.4: Eyaralar. Algoritmo de la multiplicación

1.º Que el dividendo contiene al producto del divisor por el cociente, y al resto.

2.º Que el producto de dos números se compone como se indica anteriormente.

[44]Ibídem, p. 87.

> 3.º Que, por ejemplo, en las 1.918 centenas del producto entran el producto de un factor por la cifra de las centenas del otro más las centenas que provienen del producto de las demás cifras[45].

En *Nuevo Tratado de Aritmética* la exposición del algoritmo tradicional va precedida del procedimiento para determinar el número de cifras del cociente, mientras que en *Aritmética Intuitiva* esto va incluido en los dos primeros casos del algoritmo. En cualquier caso, en el primer libro la determinación del número de cifras del cociente no se utiliza como un primer elemento de comprobación del resultado de dividir. Solo parece incluirse por su uso posterior en la justificación del algoritmo[46].

Por último, en *Aritmética Intuitiva* la prueba de la división va tras el algoritmo y antes de las propiedades de la operación, mientras que en *Nuevo Tratado de Aritmética* iba después. Además, el caso particular de la prueba para las divisiones exactas lo incluye en el último libro como ejercicio.

Para exponer y justificar las propiedades de la división en *Nuevo Tratado de Aritmética*, parte de un problema –que sirve para motivar la propiedad pero también para explicarla con él y no solo para ejemplificarla– y luego enuncia la propiedad en general, mientras que en *Aritmética Intuitiva* parte de un ejemplo abstracto con números y de ahí pasa a la definición general.

Hay otra diferencia. En *Nuevo Tratado de Aritmética* justifica que el cociente no varía al multiplicar o dividir dividendo y divisor por un mismo número; como consecuencia, si ambos acaban en ceros puede simplificarse la división. En *Aritmética Intuitiva* el ejemplo con el que justifica la propiedad anterior consta de dividendo y divisor acabados en ceros, y a partir del ejem-

[45] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 88.

[46] Era habitual que los libros de aritmética de la época incluyesen el cálculo del número de cifras del cociente cuando se iba a explicar cómo efectuar el algoritmo tradicional. Así lo hacen Rey Pastor y Puig Adam en sus *Elementos de Aritmética*, Xiberta en su obra del mismo título y Sánchez Pérez en su *Tratado de Aritmética*. Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Elementos de aritmética. Colección Elemental intuitiva. Tomo I.* Imprenta de A. Marzo, Madrid, 3.ª edición, 1928. La primera edición es de 1927.

Xiberta Roqueta, Manuel: *Elementos de Aritmética*. Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, Madrid, 1929. Primera edición de 1928.

Sánchez Pérez, José Augusto: *Tratado de Aritmética*. Tip. Sucesor de J. Peláez, Toledo, 1922. Primera edición en 1914.

plo deduce la regla para simplificar una división si el dividendo y el divisor son múltiplos de una potencia de 10, y también para facilitar el algoritmo si el divisor acaba en ceros.

La comparación de las dos obras respecto a la justificación de las propiedades –en particular de la división– está hecha en la subsección 8.2.3 (p. 568) y las propuestas de varios autores, entre ellos Eyaralar, acerca del cálculo rápido, las comentamos más adelante (pp. 217 y sig.).

No disponemos de elementos para analizar la *organización didáctica* de la secuencia de enseñanza en las clases en la Escuela Normal, aunque a partir de los libros y de ciertos elementos *ecológicos*, como la institución en la que se llevaba a cabo la enseñanza, podemos hacer algunas hipótesis. En efecto, es una enseñanza dirigida a la formación de maestros, lo que supone que los alumnos conocen la operación y saben ejecutar el algoritmo y lo que se hace es una presentación sistemática que se aprovecha para una reflexión epistemológica sobre el contenido. No hay un genuino *momento de primer encuentro* con la operación ni de *elaboración de una técnica*. Éstas se presentan ya *institucionalizadas* –se trata de un libro en el que no se le proponen al alumno tareas, sino que se exponen tanto las tareas como las técnicas justificadas–, lo mismo que el vocabulario relativo a la división. El énfasis se pone en los momentos de la *construcción del entorno tecnológico-teórico* y del *trabajo de la técnica*; se trata de hacer un análisis matemático-didáctico, que permita comprender las técnicas, tecnologías y teorías en relación con la división[47], y decidir sobre la pertinencia de una u otra técnica (incluidas las de cálculo mental o rápido), de cara a poder enseñarla en la escuela primaria:

> Tratar de efectuar, de la misma manera [calculando previamente el valor de los paréntesis y aplicando las propiedades de linealidad], las operaciones siguientes:
>
> $(36+81+30)\div 9 \quad (12+28+20)\div 6 \quad (50-16):8 \quad (53-18)\div 7$

[47] Ruiz Higueras, Luisa y García García, Francisco Javier: «Didáctica de las matemáticas y Formación de Maestros: Respuestas y desafíos (desde la TAD)». En: A. Bronner; M. Larguier; M. Artaud; Y. Chevallard; G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. IIe congrès international sur la TAD*, pp. 171–213. IUFM de l'Academie de Montpellier, 2010.

$(48 \times 42) \div 27 \quad (48 \times 42) \div 9$

¿Por qué es imposible aplicar las reglas dadas? Nótese en el 1.º y 3.er ejemplos cuál es el resto del término no divisible y el de la suma o diferencia; en el 2.º, cuánto vale la diferencia de los restos, y para los últimos recúrrase a la descomposición factorial[48].

El enunciado de buena parte de los ejercicios indica que lo que se busca es una reflexión tecnológico-teórica: para responder a algunos de ellos son necesarios elementos teóricos y se insiste en cuestiones tecnológico-teóricas, como la comprensión de la operación y su relación con las técnicas sustractiva y multiplicativa, la relación entre los números que intervienen en la división, las propiedades de la división y su ámbito de aplicación, la aplicación al cálculo rápido, la comprensión de aspectos del algoritmo tradicional, etc.:

Referir estos problemas [tres ejemplos anteriores] a cada una de las definiciones dadas[49].

¿Cuántos sumandos iguales a 3 tiene una suma que vale 27? ¿Cuántas veces se puede restar 12 de 600?[50]

¿Qué divisiones se deducen de las igualdades siguientes?
a) $39 = 9 \cdot 4 + 3$; b) $81 = 12 \cdot 6 + 9$; c) $321 = 28 \times 11 + 3$[51].

Calcular x de modo que se verifique:
$23 \times x = 253 \quad x \times 48 = 288 \quad x(12 + 3) = 135 \quad 5x + 8 = 68$
$9 \cdot x - 7 = 281$[52].

Dividiendo 353 por 43 se obtiene un cociente 8 y un resto 9. ¿En cuántas unidades se puede aumentar el dividendo sin que el cociente cambie?[53]

[48] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 179.
[49] Ibídem, p. 177. En *Aritmética intuitiva*, op. cit., p. 98, los hay similares.
[50] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 177. *Aritmética intuitiva*, op. cit., p. 99.
[51] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 99.
[52] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 178. En *Aritmética intuitiva*, op. cit., p. 100, los hay similares.
[53] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, p. 99. En *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 180, el problema 166 es similar.

> Un alumno tenía que multiplicar por 5 un producto de 3 factores; multiplica los 3 [por 5 cada uno de ellos], y halla como producto total 8675. ¿Cuál es el producto verdadero?[54]

Junto a éstos hay numerosos ejercicios de cálculo mental y rápido y también problemas que se resuelven mediante una división.

La definición de división y el tratamiento en la Escuela Normal de José María Eyaralar contrasta, por ejemplo, con la de **Francisco Romero** en su libro sobre el cálculo para Normales[55]. Comienza por definir la división como una operación inversa, cuyo objeto es «dividir o partir un número por otro»[56]. El interés no está tanto en la operación en sí –que se supone conocida por los alumnos– como en las técnicas, y quizá por eso no alude a situaciones concretas de dividir ni tampoco ve las técnicas menos eficaces como recurso didáctico para la comprensión del sentido de la operación:

> Antiguamente se definía diciendo que es una operación por la cual se trata de sacar un número de otro cuantas veces se pueda. Esta forma primitiva y elemental de dividir consiste en restar un número de otro las veces que el primero esté contenido en el segundo[57].

La definición de división como inversa de la multiplicación la considera una manera simplificada de definirla, para evitar la incomodidad del procedimiento de las restas sucesivas. Define el dividendo como el producto de la multiplicación y el divisor y el cociente como los factores conocido y desconocido, respectivamente. Siguen algunos comentarios sobre cómo iniciar el estudio de la división con los niños, pero en ningún momento se ocupa más

[54] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 104.

[55] Aunque las orientaciones que vienen en los libros sobre metodología de la matemáticas van referidas a la escuela primaria y las comentaremos en el siguiente apartado, el libro de *Metodología* de Romero se titula *Metodología de las Matemáticas y Procedimientos de Cálculo mental y de Cálculo escrito rápido*, y además de traer algunas orientaciones sobre la enseñanza de la matemática y, en particular, del cálculo, se trata ante todo de un libro sobre las operaciones elementales para las Escuelas Normales.

[56] Romero Carrasco, Francisco: *Metodología de las Matemáticas. Procedimientos de cálculo mental y de cálculo escrito rápido.* Tip. y Lib. de A. Arqueros, Badajoz, 1933, p. 169.

[57] Ibídem, p. 169.

del sentido o significado de la división, ni tampoco del aprendizaje del algoritmo habitual. El interés se centra en las técnicas de cálculo mental y rápido, que presenta en su mayoría sin justificación alguna. Las propiedades en las que se basan están implícitas y el ejemplo actúa aquí de *ejemplo genérico*[58]:

$$240 : (2 \text{ x } 3 \text{ x } 5) = \left| \begin{array}{c} 240 : 2 = 120 \\ 120 : 3 = 40 \\ 40 : 5 = 8 \end{array} \right.$$

En este caso[59], como en algunos otros, indica expresamente que se dé a conocer el principio a los escolares. En otros casos, como cuando ofrece técnicas abreviadas para dividir por 9, sí justifica las técnicas, incluso apelando a los teoremas de divisibilidad, pero siempre utilizando ejemplos que actúan como ejemplos genéricos.

A diferencia de Eyaralar, este profesor no parece considerar necesaria una reflexión por parte de los futuros maestros sobre el sentido de las operaciones; las tareas que propone son de cálculo simplificado y la *función* que tienen ahora las técnicas es distinta, puesto que en general son un fin en sí mismas. Por ello su número se amplía considerablemente, al tiempo que se reduce el cuestionamiento tecnológico-teórico. El tratamiento de las operaciones en la Escuela Normal pone de manifiesto una visión epistemológica de la matemática muy diferente entre estos dos profesores.

3.1.2.1. La representación gráfica de las operaciones en las dos Aritméticas

Tanto en su *Nuevo Tratado de Aritmética* como en la *Aritmética Intuitiva*, Eyaralar muestra procedimientos para sumar o restar gráficamente sobre la

[58] «El ejemplo genérico consiste en la explicación de las razones de validez de una aserción para la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de una determinada clase». Balacheff, Nicolas: *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Traducido por Pedro Gómez. Una empresa docente. Universidad de los Andes, Bogotá (Colombia), 2000. `http://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-00520133/document`. Consultado el 10-10-2015, p. 27.

[59] Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., p. 176.

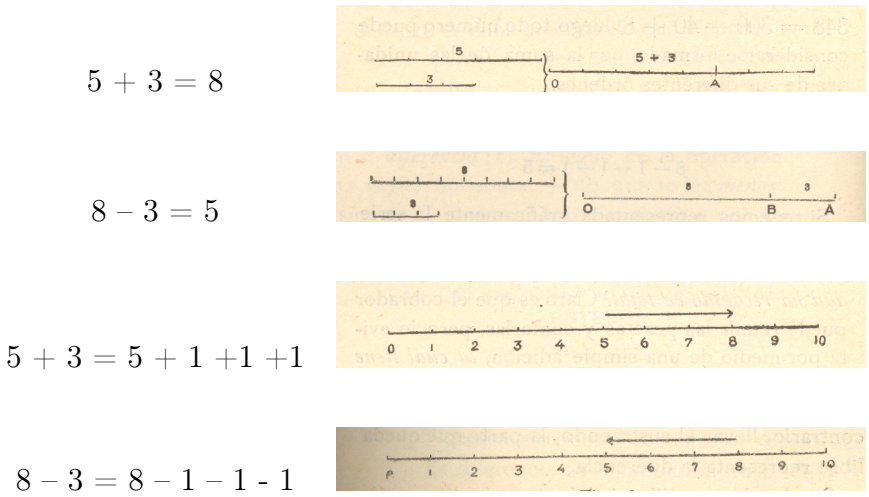


Figura 3.5: Eyaralar. Representación gráfica de operaciones

recta numérica, ligados también a un material que él mismo diseña[60]. A partir de la representación de los números sobre la recta numérica, presenta dos tipos de dibujos[61], dispositivos que sirven como medio de representar el concepto de suma o de resta y como instrumento de cálculo gráfico de sumas y restas[62] (figura 3.5, p. 178).

Investigaciones recientes[63] confieren a este tipo de representaciones gráficas, que se presentan muy esquematizadas y con énfasis en las relaciones, un doble juego de significados. Cualquiera de estas representaciones *representa* al objeto matemático suma o resta, permite visualizar dichas operaciones, pero a la vez tiene un *carácter instrumental*, en el sentido de que posibilita prácticas, en este caso efectuar cálculos, que otro tipo de representación quizá no permitiría.

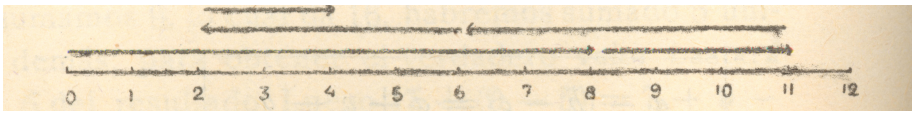
También utiliza una representación del tipo anterior para formular y jus-

[60]Este material, las «reglas superpuestas» lo estudiaremos en el apartado 7.2.4.1, p. 468 (ver también figura 7.8, p. 469).

[61]Uno de los tipos de representación se corresponde con las situaciones aditivas de reunir (E-E-E), mientras que el otro se corresponde con las situaciones aditivas de añadir o quitar (E-T-E). [E representa 'estado' y T 'transformación' o acción].

[62]Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., pp. 28, 43, 44.

[63]Font, Vicenç; Díaz Godino, Juan y D'Amore, Bruno: «An onto-semiotic approach to representations in mathematics education». *For the learning of mathematics*, 2007, **27(2)**, pp. 2–7.



$$8 + 3 - 5 - 4 + 2 = (8 + 3 + 2) - (5 + 4)$$

Figura 3.6: Eyaralar. Representación gráfica de operaciones encadenadas

tificar una regla general de cálculo del valor de un polinomio numérico[64] (figura 3.6, p. 179). Aunque en realidad el dibujo no pone de manifiesto este proceder, que podemos calificar de 'prealgebraico', sino que muestra las operaciones –sumas y restas– realizadas de forma sucesiva[65].

3.2. La enseñanza de la aritmética en la escuela primaria

La aritmética era considerada una de las materias básicas de la escuela primaria, por el doble valor que se le atribuía, utilitario y educativo, fines que coinciden con los que se le asignan también a la Escuela en este nivel. Por otra parte, hay quienes consideran que esta disciplina puede contribuir a la enseñanza *activa* que respaldaban las ideas pedagógicas del momento:

> Aun en las escuelas en que más domina el carácter memorista y dogmático de la enseñanza [...] acaso sea la Aritmética la disciplina en que el niño intervenga de un modo más activo y personal y en la que realice un trabajo que más que en otras materias se aproxime a una labor de investigación propia, con el planteamiento y resolución de sus ejercicios y problemas[66].

[64] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 48.

[65] Cid Castro, Eva y Bolea Catalán, Pilar: «Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico». En: A. Bronner; M. Larguier; M. Artaud; Y. Chevallard; G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 575–595. IUFM de l'Academie de Montpellier, Montpellier, 2010.

[66] Gutiérrez del Arroyo, Luis: «La enseñanza de la Aritmética y del Cálculo Mental». En: *Libro-Guía del maestro*, pp. 381–402. Espasa-Calpe, Madrid, 1936. Cita en p. 382.

Los contenidos de aritmética en aquel momento eran, con pocas diferencias los siguientes: número y numeración hablada y escrita; las cuatro operaciones elementales con números enteros; números decimales y operaciones; potenciación y radicación; logaritmos; magnitudes y su medida, sistema métrico decimal y unidades de tiempo; fracciones; proporcionalidad; divisibilidad; aritmética mercantil (interés, tanto por ciento).

Las indicaciones que dan los profesores que estudiamos respecto a la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria son un indicador del grado de asunción de las ideas pedagógicas de la Escuela Nueva, pero no solo; la manera en la que conciben la enseñanza de la aritmética y la forma concreta de organizar esta enseñanza van a depender igualmente del *modelo epistemológico de las matemáticas* subyacente, e incluso de la formación matemática y de la capacidad de reflexión didáctica de cada uno de ellos.

Utilizamos los libros escritos para la escuela primaria por Felipe Sáiz, Aurelio R. Charentón y Margarita Comas y analizaremos igualmente las indicaciones dadas a los estudiantes normalistas sobre cómo enseñar la Aritmética a los niños, a partir de las obras sobre *Metodología de la Matemática* de éstos y otros autores, como José María Eyaralar o Francisco Romero. Haremos algunos comentarios centrándonos en este apartado en la numeración y las operaciones elementales y en el siguiente en las cuestiones relativas a la automatización del cálculo, incluido el aprendizaje de los algoritmos.

3.2.1. La aritmética en los libros escritos para la escuela primaria

La obra *Aritmética*[67], de Comas, está destinada al último grado de la enseñanza primaria (niños de diez a doce o trece años, según su autora) y la *Aritmética Experimental. Libro Primero*[68], de Sáiz, aunque su autor la declara destinada a los primeros grados de la enseñanza elemental, comienza proponiendo problemas de sumas con llevadas en los que intervienen números

[67] Comas Camps, Margarita: *Aritmética*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1928.

[68] Sáiz Salvat, Felipe: *Aritmética experimental. Libro primero*. Imp. Elzeviriana y Librería Camí, S.A., Barcelona, 1936 .

del orden de las decenas de millar y unidades de superficie. Son por tanto libros que tratan la numeración y las cuatro operaciones (entre otras cosas), pero para alumnos que se supone que ya conocen y utilizan el sistema de numeración decimal y saben operar. El objetivo no es por tanto introducir estos contenidos sino más bien ampliarlos, profundizar en ellos, sistematizándolos, y posiblemente hacer inteligibles las técnicas introducidas con anterioridad. Por esta razón, y a diferencia de lo que proponen en sus tratados de metodología, no hay en ellos ejercicios con objetos concretos –o apenas alguno que haga referencia a ellos– y casi tampoco de tipo gráfico; solo en el de Margarita Comas se hallan referencias a instrumentos de medida y se proponen actividades de mediciones concretas, para el estudio de las magnitudes y del sistema métrico decimal, y algunos enunciados que conllevan una imagen gráfica.

No obstante, hay diferencias entre ambas obras, sobre todo en cuanto a la organización de los contenidos, que presenta mayor coherencia en el libro de **Comas**. En él aborda en primer lugar el número y la numeración, insistiendo en el principio del agrupamiento, en el valor absoluto y relativo de las cifras y en el papel del cero. Como la intención es, como ya expusiera en una obra anterior[69], repasar estas cuestiones y profundizar en ellas, se detiene en la lectura y escritura de números 'grandes'. Entre los ejercicios, los hay de práctica pero también algunos que inciden en la comprensión de estos principios. A continuación extiende el sistema de numeración a los números decimales y, por último, cita otros sistemas de numeración –en otras bases– y la numeración romana, destacando su interés cultural. Acaba el capítulo con unas notas históricas, que aprovecha para indicar que los sistemas de numeración surgieron para dar respuesta al problema de representar cantidades grandes sin escribir un signo por cada unidad, lo que condujo al agrupamiento.

Se trabaja en este nivel en el plano simbólico. Sin embargo, en su obra *Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría*, en el primer grado de la escuela

[69]En la obra Comas Camps, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría.* Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 5.ª edición, 1932, publicada por vez primera en 1923, al proponer unos cuestionarios para la escuela primaria, la numeración y las cuatro operaciones figuran antes del tercer grado y en éste lo que figura es el repaso de estas cuestiones.

primaria[70], cuando se trata de aprender a escribir cantidades considerando el valor relativo de las cifras y el uso del cero, plantea el trabajo partiendo de materiales discretos para ir haciendo grupos de diez sucesivamente. Y en su *Metodología de la Aritmética y la Geometría*, propone varias fases para la introducción del sistema de numeración decimal en este primer grado:

a) Comparar dos conjuntos mediante correspondencia biunívoca y cuantificar la diferencia.

b) Agrupar en montones de 3 , de 4, de 5, etc. y usarlos para cuantificar los conjuntos y la diferencia.

c) Describir y representar números (por ejemplo, con palillos o puntos) descomponiéndolos en grupos cada vez de diferente tamaño y convenir en un agrupamiento común, de diez en diez.

Después bastaría introducir la terminología y el simbolismo escrito, lo que llevaría a la introducción del cero.

El capítulo dedicado a la medida y al sistema métrico decimal está a continuación, como aplicación del sistema de numeración decimal: «para escribir o leer un número expresando longitudes basta aplicar, al conocer la unidad, las reglas de la numeración»[71]; y en general propone recurrir al cuadro de la figura 3.7 (p. 183) para hacer conversiones de unas medidas en otras unidades.

La técnica que utiliza para trabajar las magnitudes expresadas en unidades del sistema métrico decimal[72] hace que las operaciones de multiplicar y dividir por la unidad seguida de ceros puedan estudiarse no antes, sino después: «Para convertir en hectómetros 3825 m. no tenemos más que colocar mentalmente esta cantidad en el diagrama dibujado más arriba, y separar con una coma las cifras que queden a la derecha de los Hm. Así: 38,25 Hm.»[73].

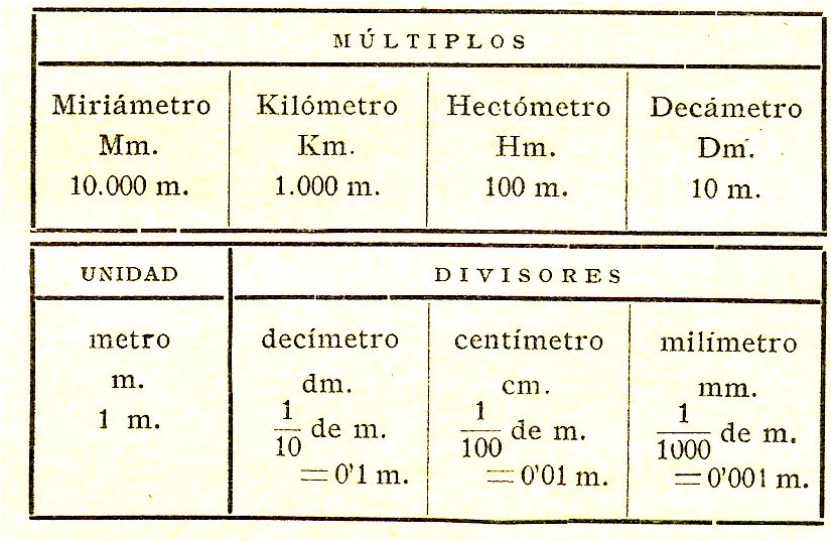
Para el estudio de cada una de las operaciones parte de un problema contextualizado, que enfatiza normalmente uno de los sentidos de la operación

[70]Ibídem, pp. 29-31.

[71]Comas Camps, *Aritmética*, op. cit., p. 30.

[72]Es la que actualmente se conoce como "la escalera", técnica que se utiliza como una rutina, sin apelar a la comprensión.

[73]Ibídem, pp. 30-31.



MÚLTIPLOS			
Miriámetro Mm. 10.000 m.	Kilómetro Km. 1.000 m.	Hectómetro Hm. 100 m.	Decámetro Dm. 10 m.

UNIDAD	DIVISORES		
metro m. 1 m.	decímetro dm. $\frac{1}{10}$ de m. = 0'1 m.	centímetro cm. $\frac{1}{100}$ de m. = 0'01 m.	milímetro mm. $\frac{1}{1000}$ de m. = 0'001 m.

Figura 3.7: Comas. Cambios de unidades del sistema métrico decimal

(reunir, quitar, sumar reiteradamente, repartir) y tras ello define la operación; en general esta *institucionalización* se hace subrayando la relación entre las operaciones inversas y así la resta y la división se definen como las operaciones que tienen por objeto hallar un sumando en una suma o un factor en un producto, respectivamente.

Las técnicas que aparecen son los algoritmos habituales, que se van construyendo a partir de ejemplos no contextualizados y en sucesivas etapas, desde el caso mas simple hasta el caso general, y se extienden a los números decimales. Las tecnologías de las técnicas se basan, además de en la definición de cada operación, en la estructura del sistema de numeración; la justificación de los algoritmos es utilizada para poner de manifiesto el principio del agrupamiento. Y es precisamente al explicar de manera razonada los algoritmos cuando se insiste en el trabajo en otras bases diferentes de la 10, siempre motivadas por una tarea problemática que aporta una razón de ser: manos, pliegos y hojas de papel para la base 5, medida del tiempo (horas, minutos y segundos) o de ángulos para el sistema sexagesimal; e incluso utiliza unidades de medida que no se estructuran en ninguna base –no constituyen pues un verdadero sistema posicional– para incidir en la comprensión del algoritmo y en su relación con el principio del agrupamiento (años, meses y días; vara,

pie y pulgada).

Las propiedades de las operaciones (invarianza de la resta, distributiva de la multiplicación respecto de la suma, etc.) se justifican y se explicitan a partir de un problema contextualizado y contribuyen, a la vez, a la tecnología de los algoritmos.

Los ejercicios no solo tienen la función de aplicar las propiedades y practicar las técnicas, sino también, respecto a ellas y respecto a las definiciones, una *función tecnológica*:

> Di por qué se deduce de la definición que los números que han de restarse necesitan ser homogéneos y que el minuendo debe ser mayor que el sustraendo[74].
>
> Di por qué queda un producto multiplicado o dividido cuando se hacen estas operaciones con un factor[75].
>
> Multiplica 98×63; efectúa después la prueba y di en qué principio se funda[76].
>
> En una división el divisor es 432, el cociente 28 y el resto lo mayor posible. ¿Cuál es el dividendo?[77].

El primer tomo de la *Aritmética Experimental*[78], de **Sáiz Salvat**, muestra diferencias con el de Comas en varios aspectos relativos a los contenidos, en particular en la organización de éstos. Comienza por considerar magnitudes continuas y definir 'cantidad' y 'unidad', para pasar de inmediato al sistema métrico decimal y tras ello definir el 'número entero' como «las veces que la cantidad contiene a la unidad cuando ésta cabe exactamente en la cantidad», el 'fraccionario' como «la veces que la cantidad contiene exactamente una de las partes iguales de la unidad» (los decimales están en el capítulo siguiente) y el 'número' como «las veces que la cantidad contiene a la unidad»[79]. Sigue con transformaciones entre complejos e incomplejos y viene después la suma

[74]Ibídem, p. 65.
[75]Ibídem, p. 79.
[76]Ibídem, p. 75.
[77]Ibídem, p. 91.
[78]Sáiz Salvat, *Aritmética experimental. Libro primero*, op. cit., pp. 9-10.
[79]Ibídem, pp. 20-21.

de enteros, curiosamente antes del estudio del sistema de numeración y de la lectura y escritura de números. Finaliza este primer capítulo nada menos que con 264 ejercicios, muchos de ellos repetitivos, entre los que se encuentran sumas de muchos sumandos con números del orden de los millones y mayores.

Sáiz Salvat aclara al principio del libro que divide cada párrafo (noción, definición, procedimiento) en tres partes: a) observación o experimentación; b) inducción; c) aplicación o práctica. Concibe que la enseñanza de la aritmética ha de partir, pues, de la experiencia para llegar por ella a la abstracción y de ahí nuevamente a la experiencia. Con ese fin, aunque los ejercicios están agrupados al final de cada capítulo, sugiere realizar algunos de ellos como tarea introductoria; y tras esta parte de *observación* viene la de *inducción*, término con el que denomina a la definición del concepto o la exposición de la regla o procedimiento, que va seguido de la *práctica*. A pesar de este esquema, en el que las nociones y las técnicas vendrían motivadas por tareas o ejercicios previos cuya función es dotarlas de sentido o hacerlas inteligibles, antes de su institucionalización y práctica, lo cierto es que los ejercicios que propone como preliminares precisan las más de las veces de las nociones o técnicas que no han sido explicitadas (aunque se hayan utilizado quizá en alguna medida en cursos anteriores) y no permiten tampoco una estrategia inicial que asegure que se produzca la «devolución»[80] por parte de los alumnos. Este libro resulta así mucho menos intuitivo que el de Margarita Comas.

En los capítulos siguientes trata cada una de las operaciones, primero con números enteros y luego con decimales. No obstante diferencia entre la operación con números abstractos, de la que expone los diferentes casos que puede haber, y luego la misma con números concretos (medidas de magnitud), para la que repite todo lo anterior. Como ejemplo, para el caso de la división, lo vemos en paralelo:

[80]El concepto de 'devolución' hace referencia a la aceptación, por parte del alumno, de la responsabilidad de la situación de aprendizaje: «la devolución es el acto por el cual el enseñante hace captar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctica) o un problema y aceptar él mismo las consecuencias de esa transferencia». Brousseau, Guy: *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage, Grenoble, 1998, p. 303. La traducción es nuestra.

> La división de enteros es una operación que sirve para encontrar uno de los dos números que formen un producto (p. 190).

> La división es una operación que sirve para averiguar las veces que un numero cabe o está contenido en otro. La división es una operación que sirve para repartir cosas tocando a partes iguales (p. 194).

> Siempre que se quiera hallar el valor de una unidad o repartir un valor entre varias unidades, se dividirá el valor de todas por el número de ellas convertidos en incomplejos (p. 203).

> Para hallar el número de unidades o cosas, conociendo el valor de todas y lo que vale una, se divide el valor de todas por lo que vale una (p. 203).

> Para averiguar cuántas veces un valor está contenido en otro se divide el mayor por el menor (p. 204).

En el capítulo siguiente, vuelve a dar la primera de las definiciones, esta vez para decimales: «La división de decimales es una operación aritmética que tiene por objeto calcular *factores* de multiplicaciones». Vuelve a definir dividendo, divisor, cociente, resto, división exacta e inexacta..., para los números decimales.

Para el algoritmo presenta también de manera gradual los diferentes casos, en función del tamaño de los números, desde las divisiones que pueden hacerse con las combinaciones numéricas básicas (divisor y cociente de una cifra) hasta el caso general.

Las únicas propiedades de la división que cita son que el cociente no varía al multiplicar o dividir dividendo y divisor por un mismo número, propiedad que aplica a la simplificación de divisiones y a las divisiones acabadas en ceros en el dividendo y/o el divisor, que en una división exacta divisor y cociente son intercambiables y que dividir un número por un producto de varios factores equivale a dividirlo sucesivamente por cada uno de ellos. Salvo la primera, el resto están enunciadas sin justificar.

Entre los 160 y 153 ejercicios que figuran al final de los capítulos sobre la división de enteros y de decimales, respectivamente, hay solo operaciones de dividir y problemas contextualizados que requieren una división, con enteros y decimales, cantidades discretas y continuas, y los que tratan de la conversión de cantidades expresadas en el sistema métrico decimal. Pero no se halla ninguno que tenga por objeto cuestionar o explicar las técnicas o la comprensión de aspectos de la propia operación. En otras palabras, todo

cuestionamiento tecnológico-teórico está ausente en los problemas propuestos, lo que marca una diferencia con respecto al libro de Margarita Comas y, como veremos, al de Charentón.

Hay un claro contraste, no solo en el tipo de ejercicios y problemas, sino en la cantidad de ellos, en los dos libros analizados. Comas incluye muchos menos ejercicios; los que hay tienen la intención, declarada por la autora, de servir al maestro como ejemplo de los *tipos de tareas* a proponer a los niños, pues «es indudable que nadie como el educador que está con él [el niño] varias horas diarias podrá encontrar temas que sean realmente vivos»[81]. Sáiz en cambio, aunque deja al maestro la decisión sobre si hacer antes de la teoría los problemas que llama «de experimentación» o hacerlos al final como aplicación, indica que han de hacerse los problemas que figuran en el libro; es más, recomienda sus doce cuadernos de *Cálculos Aritméticos*[82], que dice se corresponden, respectivamente, con los capítulos de este libro y del segundo. Además publica otro libro con las soluciones de todos los ejercicios de los dos libros de aritmética y de los doce cuadernos[83]. Si Margarita Comas concibe su Aritmética como un libro de consulta para el alumno y una guía para el maestro, Felipe Sáiz concibe los suyos más bien como lo que algunos autores califican de libros «a prueba de profesores»[84].

Los dos libros que existen de **Aurelio R. Charentón** para la enseñanza primaria están destinados a los grados preparatorio y elemental[85], respectivamente. Por ello los aspectos que contienen sobre la enseñanza del número y de las operaciones son, de entrada, diferentes. En este caso van destinados

[81] Comas Camps, *Aritmética*, op. cit., p. 8.

[82] Paluzie Lucena, Josep y Sáiz Salvat, Felipe: *Cálculos Aritméticos. Vol. 1-12.* Imp. Elzeviriana y Libr. Cami, Barcelona, s.f.

[83] Sáiz Salvat, Felipe: *Aritmética experimental. Libro del maestro.* Imp. Elzeviriana y Librería Camí, S.A., Barcelona, 1936.

[84] Monterrubio Pérez, María Consuelo y Ortega del Rincón, Tomás: «Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones». En: SEIEM (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 37–53. González, M.T. and Murillo, J., Santander, 2009.

[85] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?. Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado elemental. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?.

a alumnos que se enfrentan por primera vez a su aprendizaje en la escuela.

En el grado preparatorio cada número es presentado como el número anterior más uno, construyendo colecciones de objetos para poner de manifiesto el cardinal y la relación entre el número y el anterior. En el apartado «Ejercicios Prácticos» se proponen actividades del *primer nivel de conocimiento*[86] del número, con objetos reales; en el apartado «Ejercicios de Reflexión» se proponen cuestiones referidas al *segundo nivel de conocimiento del número*. Después viene el epígrafe sobre el cálculo, en el que se proponen «Ejercicios manuales», consistentes en realizar operaciones con objetos reales y luego expresarlas simbólicamente; «Ejercicios escritos» u operaciones expresadas simbólicamente; «Problemas» aritméticos contextualizados; y, por último, «Cálculo mental», que consiste en ejercicios de conteo continuo y discontinuo, progresivo y regresivo. Del 10 al 20 los números se presentan como diez (una decena) más otro número, y en los diferentes apartados se insiste en la descomposición del número en una decena más un cierto número de unidades y en el valor relativo de las dos cifras.

En el grado elemental se introducen primero las decenas netas hasta 90, con material agrupado, y se realiza un trabajo similar al anterior pero ahora con decenas netas, que tiene como objetivo comprender el paralelismo entre el cálculo con unidades y con decenas netas. A continuación los números hasta el 100, insistiendo en la descomposición en decenas y unidades y en las actividades de agrupamiento. Siguen las centenas netas, los números hasta el 1000, haciendo hincapié en la escritura en el sistema posicional y los órdenes de unidades; los números de cuatro cifras en general; décimas, centésimas y las operaciones suma, resta, multiplicación y división.

Para favorecer la comprensión del sistema posicional y del principio del agrupamiento, propone representar los números en un sistema *aditivo*, repitiendo estos símbolos, inventados por el propio autor (figura 3.8, p. 189)[87]

[86] Carrillo Gallego, Dolores; Saá Rojo, María Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: *El aprendizaje del número y las regletas de Cuisenaire*. Universidad de Murcia, Murcia, 1989. Este *primer nivel de conocimiento* comprende los aspectos más culturales, como el nombre y el símbolo, la serie numérica y la evaluación de cantidades. El *segundo nivel de conocimiento* del número contempla cuestiones de orden y lugar en la serie numérica, descomposiciones del número y las operaciones básicas.

[87] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 54.

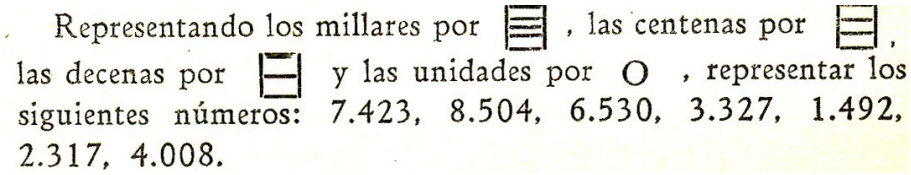

Representando los millares por ☰ , las centenas por ☰ , las decenas por ☰ y las unidades por O , representar los siguientes números: 7.423, 8.504, 6.530, 3.327, 1.492, 2.317, 4.008.

Figura 3.8: Charentón. Representación de números en un sistema aditivo

Asimismo, propone ejercicios de representar números (7423, etc.) utilizando esos símbolos. Aquí el recurso a un sistema aditivo no es previo a la escritura posicional, como una respuesta menos eficiente a la cuestión de la representación de los números, sino que se trata de una técnica didáctica que utiliza este profesor en los ejercicios, con el fin de facilitar la reflexión.

Hay que destacar que en el grado preparatorio introduce las unidades de medida correspondientes a las magnitudes lineales (metro, kilogramo, litro) y también la unidad monetaria (peseta), ésta cuando ha introducido el número 10. En el grado elemental incluye los múltiplos y divisores del metro, el decámetro, hectómetro y kilómetro tras las decenas, centenas y millares, respectivamente; el decímetro y el centímetro tras la décima y la centésima, y el milímetro. Los múltiplos y divisores del kilo y del litro y las unidades de tiempo van intercaladas entre las lecciones dedicadas a las operaciones. El estudio del sistema métrico decimal se relaciona con el del sistema de numeración decimal.

En el primer libro las operaciones aparecen, incluida la escritura simbólica, junto con el estudio de los números, para expresar relaciones entre ellos, como hemos comentado. En este segundo libro se trata cada operación como objeto de estudio en sí; ligadas a la teoría –definiciones– están las técnicas para realizar las operaciones, técnicas que se presentan graduadas y justificadas. Los elementos tecnológicos son la estructura del sistema de numeración decimal y la definición de la propia operación.

3.2.2. La aritmética en las obras de metodología

Los libros sobre metodología de la matemática que escribieron todos los profesores que estamos estudiando contienen, de manera más o menos explícita, las ideas que tenía cada uno sobre la enseñanza de la aritmética, en

particular acerca de la numeración y las operaciones básicas. Además, estos libros fueron escritos en el periodo que va desde 1930 hasta 1936, en un momento en el que estas ideas habían podido madurar y en que estos libros podían recoger de algún modo la experiencia de sus autores como profesores de Escuela Normal y, en algún caso, también en la Escuela Primaria. Constituyen pues un medio privilegiado para observar, no solo indicaciones acerca de las *técnicas didácticas* para la enseñanza de estos conocimientos, sino reflexiones y comentarios que ponen de manifiesto algunos elementos de la *tecnología* o la *teoría didáctica* subyacente a las propuestas.

En general se destaca la importancia de la enseñanza de estas cuestiones en la escuela. **Luis Paunero**, cuando enumera los conocimientos que deben estudiarse en la escuela primaria por su utilidad en la vida ordinaria, cita el cálculo en primer lugar, y al clasificar aquellos conocimientos en cuestiones «fundamentales» y «secundarias y de aplicación», lo incluye entre las primeras. Opina que es la destreza fundamental de la escuela primaria y debe ser dominado, en todos sus aspectos (mental, escrito, rápido, aproximado) y en la resolución de los problemas, al acabar esta etapa[88]. Más adelante destaca el valor utilitario y el educativo de las matemáticas y considera que a la utilidad del empleo de los números y el cálculo se une el valor educativo del cálculo mental y del estudio comparativo o correlativo de las operaciones de cálculo.

Pero esta obra, más que dar pautas específicas para la enseñanza de la aritmética –más allá de ideas generales–, se centra en los aspectos psicológicos de los aprendizajes numéricos; los capítulos VI y VII se titulan, respectivamente, «Génesis de la idea de número y extensión» y «Desarrollo de las ideas de número y extensión» y en ellos recoge las ideas de pedagogos y psicólogos, fundamentalmente. Por ejemplo, las conclusiones de Descoeudres, tras realizar unos test establecidos por Decroly y Degrand: «Del conjunto de los test resulta, que el UNO se adquiere a los dos años y medio. El DOS a los tres años, el TRES a los cuatro años y el CUATRO a los cinco años»[89] (estas

[88] Paunero Ruiz, Luis: *Ensayo. Las matemáticas en la educación.* Tipografía Heliópolis, Sevilla, 1935, pp. 18-22.

[89] Ibídem, p. 125.

mismas conclusiones las cita también Romero[90]). A continuación recoge los resultados, bastante diferentes, de otros test, en un intento por reflejar cuál sería el desarrollo normal en la percepción del número.

Francisco Romero considera la lengua y el cálculo la base de la enseñanza primaria, y llega a afirmar que «un hombre puede pasarse, hasta cierto punto, sin saber leer ni escribir, mas no sin saber contar»[91]. Por otra parte, reconoce que en muchas escuelas la enseñanza aún no ha superado, a pesar de los cambios en la sociedad, la limitación de su actuación a la lengua y el cálculo.

En cuanto a las «cuatro reglas» destaca que son necesarias para resolver, en última instancia, los problemas no solo aritméticos sino de las otras ramas de la matemática. Y sobre todo, los problemas de la vida cotidiana.

No obstante, el contenido dedicado a la enseñanza de la aritmética en cada una de las Metodologías es distinto, en cuanto a las cuestiones de las que se ocupa y la extensión con la que las trata; por supuesto, existen diferencias relativas a la orientación dada a los aspectos tratados.

La *Metodología* de Romero, tal y como reza en el subtítulo de la obra, se centra en el calculo mental y el cálculo escrito rápido. Apenas dedica algunos epígrafes a cuestiones como la cantidad y la unidad en el primer tema.

Aurelio R. Charentón destaca la complejidad de la enseñanza del cálculo, dado el carácter abstracto que tiene y las cuestiones poco familiares que a veces se plantean, pero también por el carácter de necesidad que tienen unos conocimientos respecto de otros, aludiendo al carácter jerárquico de la matemática y, especialmente, de la aritmética. Este libro se dedica a los problemas aritméticos –sus propuestas van en el sentido de transformar los problemas en algo concreto y tangible, que conecte con la experiencia

[90] Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., p. 32.

[91] Ibídem, p. 5. «Mucho importa la enseñanza de la lengua, porque "el idioma es el instrumento indispensable para la adquisición de la cultura" y porque la "lectura es la llave que abre las puertas del templo del conocimiento"; pero el cálculo es el conocimiento mismo, la cultura misma. Un hombre puede pasarse, hasta cierto punto, sin saber leer ni escribir, mas no sin saber contar».

del niño– y no trata de la enseñanza del número y de las operaciones como tales[92].

Felipe Sáiz, en la parte de Didáctica de su libro *Arte de Estudiar Matemáticas*, dedica tres de los dieciséis capítulos a la enseñanza de la aritmética. El primero de ellos a cuestiones de tipo psicológico; por ejemplo, que el concepto de número se forma por abstracción de una propiedad común a varias colecciones de objetos con el mismo cardinal. Así, mientras que en la matemática pura ('sabia') las proposiciones provienen de unas fundamentales, no experimentadas, axiomas o postulados, y puede construirse sin la experiencia, «la aritmética escolar no es matemática pura por el estado mental del niño que no puede despegarse de las cosas; en ella los juicios han de ser empíricos y en consecuencia posteriores a la experiencia»[93]. Se centra en las fases del estudio de una cuestión aritmética, los tipos de tareas convenientes para su aprendizaje, los materiales necesarios para ello, la estructura de una lección de aritmética[94]... y, lo mismo que para el número y la numeración, para las operaciones. Igualmente se ocupa del aprendizaje de los algoritmos.

Margarita Comas, en su libro de *Metodología*, dedica su atención a la numeración en los dos primeros ciclos de la escuela primaria. En el primer ciclo propone trabajar los números hasta el 100, y lo divide a su vez en dos etapas, una primera en la que se manejan números del 1 al 10, y otra en la que intervienen números de dos cifras (Felipe Sáiz considera que el primer grado solo está dedicado a los números hasta el 10[95]). El objetivo que establece para la etapa en la que se estudian los diez primeros números, es el de

> completar y sistematizar los conocimientos adquiridos esporádicamente por el niño antes de su asistencia a la escuela, fijar en su mente las combinaciones numéricas hasta 10, acostumbrarle a aplicar estos co-

[92] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Metodología de los problemas. Enseñanza razonada de los problemas de Aritmética y Geometría en la Escuela Primaria.* Editorial Instituto Samper, Madrid, 1930, p. 5.

[93] Sáiz Salvat, Felipe: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental.* Imp, Mercé, Castellón, 1931, p. 189.

[94] Nos referiremos a ella en p. 372.

[95] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 203.

> nocimientos a nuevos casos y enseñarle los símbolos de dichos números y los significados de los signos +, –, =, y más tarde, ×[96].

Se trata pues de completar el conocimiento informal de los niños sobre aspectos del *primer nivel de conocimiento* del número, al que nos hemos referido antes en este capítulo (p. 188), y trabajar a la vez aspectos del *segundo nivel de conocimiento*, como las combinaciones numéricas y las operaciones. En las páginas siguientes propone numerosos ejemplos de actividades y de materiales para ello.

En el segundo ciclo, que divide a su vez en la etapa de introducción de la segunda decena y la de los números a partir del 20, el trabajo con números se hace poniendo énfasis en las agrupaciones: «Se parte de la comprensión (no del mero enunciado) del hecho de que los números grandes pueden manejarse por ser considerados en la práctica como formados por agrupaciones de otros más pequeños»[97].

Para el segundo grado declara que es preciso introducir otras técnicas diferentes del conteo para las operaciones básicas, además de cobrar más importancia la representación escrita –simbólica–, al tratarse de números mayores, aunque no deja de considerar relevante el cálculo mental. Igualmente propone dividir este grado en dos periodos, uno en el que se trabaje con los números hasta el 1000 y otro con números mayores.

José María Eyaralar destina a la enseñanza y el aprendizaje del número bastantes apartados de su *Metodología*. En el capítulo quinto, dedicado a la psicología del niño, figura un apartado titulado «Génesis del concepto de número y de la extensión»[98].

El capítulo noveno, «Desarrollo del Programa»[99], contiene varios apartados dedicados a la enseñanza de la Aritmética y en particular al cálculo, en todas sus formas. Pero además, en el resto de los capítulos hace numerosas reflexiones y propuestas de tipos de actividades para trabajar la numeración y las operaciones, cuando habla del material, del juego, de la invención, de la

[96] Comas Camps, Margarita: *Metodología de la Aritmética y la Geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1932, p. 13.

[97] Ibídem, p. 18.

[98] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 161.

[99] Ibídem, p. 307.

relación entre la matemática y otras disciplinas, de los programas escolares, etc.

Además del valor utilitario y educativo que atribuye a los conocimientos numéricos, destaca el papel que tiene, en el estudio de la matemática en general, la destreza en el manejo de números y símbolos, «ya que toda deficiencia en ello suele entorpecer la marcha del pensamiento, que se ha de apoyar constantemente en transformaciones de cálculo numérico y literal»[100].

En cuanto a la distribución de los contenidos numéricos en la etapa primaria «propugnamos una graduación del contenido de la Matemática predominantemente psicológica para formar los grados, por la complicación relativa de números y formas, pero una graduación genética, esto es, la propia de la ciencia dentro de cada grado»[101]. Así, concretamente en Aritmética, tal como hace también Margarita Comas, lo que diferencia cada grado es el tamaño de los números que se estudian:

> Así, en gradación sucesiva se estudian las operaciones numéricas y aun se inician las propiedades (descomposición en factores) con los 10 primeros números; después con los números hasta 20; más tarde hasta 100, y después hasta 1000; 100.000, e indefinidamente. Se consigue así limitar el campo de acción a números que el niño concibe y por los que se interesa, y al simplificar las operaciones ponerlas al alcance de sus escasas capacidades, sobre todo de su débil capacidad de atención sostenida[102].

En general, lo que se propone es una enseñanza en la que el estudio de los números contemple actividades asociadas a un conocimiento de los aspectos más 'culturales', ligados al aprendizaje del nombre y símbolos y a la técnica de contar (nombre y símbolo, serie numérica, evaluación de cantidades), pero también de aquellos aspectos que suponen contemplar los números relacionados entre sí y que están ligados a la enseñanza de las operaciones elementales, como las descomposiciones y las operaciones[103].

[100] Ibídem, p. 45.
[101] Ibídem, p. 179.
[102] Ibídem, p. 178.
[103] Carrillo Gallego, Saá Rojo y Sánchez Jiménez, *El aprendizaje del número y las regletas...*, op. cit., cap. 1.

3.2.2.1. El papel de la intuición

También coinciden los profesores citados en diferenciar distintas fases para la enseñanza de los números y las operaciones y de la Aritmética en general. La importancia que conceden a la *intuición* les hace insistir en un método de enseñanza que comience por la utilización de objetos del mundo sensible, después imágenes gráficas y, por último, símbolos abstractos. Pero, a pesar de los puntos comunes del *logos* de las *praxeologías didácticas*, hay matices diferentes en la praxis, entre las propuestas, al menos en cómo las concretan o las detallan.

Romero propone empezar la adición con objetos sensibles u 'objetos de intuición', e incluso variar el tipo de objetos para unas mismas cantidades para que el niño entienda «que el número no es una cosa, sino un concepto racional, una abstracción del espíritu, que nada tiene que ver con la naturaleza de los objetos»[104], siguiendo con imágenes para después pasar a los signos gráficos antes de representar la suma solo con guarismos.

Comas, para atender a las fases del pensamiento «experimental, intuitivo y racional»[105] propone usar, por este orden, objetos reales, dibujos o representaciones esquemáticas (rayas, círculos), imágenes mentales de los objetos o de sus representaciones y, por último, representaciones abstractas. Esta autora hace una distinción más fina que el anterior (aunque en el libro de Romero aparecen ejemplos de representaciones gráficas con un tipo de objetos y otros, acompañadas ambas de la expresión simbólica correspondiente) y diferencia objetos reales 'figurativos' (manzanas, abalorios, niños, pelotas) de 'no figurativos'[106] (palillos, fichas), e igualmente las representaciones gráficas de unos objetos y de otros, más esquemáticas las segundas.

Sáiz, apoyándose en la psicología, señala las mismas fases para el estudio de cualquier cuestión: «habrá de empezarse por estudiar la cuestión de *modo objetivo* (intuición objetiva), luego *gráfico*, por dibujo o por cifras (intuición

[104] Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., p. 41.

[105] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., p. 7.

[106] Comas no emplea esta denominación, sino objetos sobre los que hay que calcular y objetos que sirven de base al cálculo, respectivamente.

gráfica), a continuación *imaginativamente* y por fin *abstractamente*»[107]. Comienza pues por utilizar objetos manipulables (cubitos, monedas, botones) y de ahí pasa a las representaciones escritas. Hay que aclarar que Sáiz considera la representación de una operación o relación numérica con cifras y signos una representación gráfica (no diferencia entre representaciones gráficas y simbólicas). Las fases imaginativa y abstracta no van acompañadas de material o de alguna representación, y se distinguen entre sí porque en el primer caso los problemas hacen referencia a objetos concretos o situaciones que el niño puede evocar (contextualizadas), y en el segundo se trata de operaciones abstractas con números.

Eyaralar basa sus recomendaciones sobre la enseñanza de los números en estudios realizados desde la psicología, pero sobre todo interpretando éstos desde un análisis epistemológico (matemático) previo del concepto de número. Así, primero detalla que el número puede concebirse: como suma de unidades (cardinal); como elemento de la serie natural o concepto serial (ordinal); como relación entre la cantidad y la unidad (medida); como relación de números, por ejemplo 6 como 4+2 y como $6 = 2 \times 3$[108]. Y, tras citar varios estudios psicológicos sobre la adquisición del concepto de número, destaca varias consecuencias pedagógicas o *«Aplicaciones»*[109]: 1.º El método de aprendizaje ha de ser intuitivo (la secuencia es utilizar objetos, imágenes y símbolos). 2.º Dada la relación entre número y extensión, debe utilizarse la representación gráfica de los números para estudiar sus propiedades. 3.º Conviene agrupar los objetos que forman el número para dar la sensación del conjunto.

A propósito de la primera observación, recomienda el «álbum numérico», dispositivo que había observado durante su estancia en Francia, y que refleja en su *Memoria*, que los niños han de ir elaborando pegando en él grabados e incluso objetos que representen cada número, por ejemplo, para el número 2 pueden ser tijeras, bicicleta, balanza, etc. Eyaralar destaca como ventajas del dispositivo:

[107] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 187.
[108] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 161.
[109] Ibídem, pp. 164-165.

> Satisfacen el instinto coleccionador del niño; presentan obra de conjunto; obligan a observar; exigen cuidado en la confección; satisfacen el gusto del niño por las imágenes; se prestan al aprendizaje de nombres y propiedades de los objetos representados, y si además se prefiere coleccionar flores, hojas y aun insectos que respondan a ese fin (por ejemplo, para el 3 la hoja de trébol, para el 7 la del castaño de Indias), el valor de esta colección resulta extraordinario[110].

Este dispositivo será citado también por Sáiz Salvat[111], quien recopila en su *Metodología* y también en su tratado posterior[112] muchos de los materiales y de los juegos que Eyaralar había citado en su *Memoria* y que pone como ejemplo en sus obras. Concretamente este autor recomienda el Álbum de Números, y el Álbum de Formas, para que la matemática escolar no pierda el contacto con la realidad, «lo cual se remedia partiendo constantemente de ésta y volviendo a ella en las aplicaciones»[113].

El método intuitivo se extiende a las unidades de cada orden, usando haces de palillos y símbolos, que ha visto durante su estancia francesa, para unidades, decenas y centenas. Tanto Eyaralar como Margarita Comas se preocupan bastante por la cuestión del sistema de numeración posicional y proponen tipos y ejemplos de actividades, dirigidas a los niños, en el caso de Comas, o también a promover la reflexión en los futuros maestros, en el de Eyaralar. Como ejemplo de las primeras podemos citar la representación de varios números agrupando las unidades –representadas por fichas o círculos– en grupos de tamaño menor que 10 y luego cuantificando el número de grupos y de unidades sobrantes en cada número, para compararlos, antes de hacer lo mismo en base decimal. Como ejemplo de las segundas tenemos estos ejercicios: «Escribir en caracteres asirios 34, 22, 200», «Escribir con caracteres griegos 35, 44, 78, 845, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$»[114].

Eyaralar es consciente, y así lo señala, de que el análisis del número –lo

[110] Eyaralar Almazán, José María: «La enseñanza de las Matemáticas en las escuelas francesas». En: *Anales de la JAE*, tomo XIX, pp. 1–96, 1924, p. 13

[111] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., pp. 191, 203.

[112] Sáiz Salvat, Felipe: *Geometría y ampliación. Didáctica. Trigonometría.* El autor, Málaga. 195?.

[113] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 41.

[114] Ibídem, p. 137.

que hemos llamado segundo nivel de conocimiento– no es algo espontáneo, sino consecuencia de la enseñanza. Y por ello sugiere realizar composiciones y descomposiciones de los números hasta el 10 o el 12, de todas las maneras posibles «haciendo de ellos un estudio monográfico»[115], advirtiendo a la vez que con números mayores pierden interés algunas descomposiciones (pone el ejemplo de descomposición en el número anterior más uno), en favor de aquéllas basadas en la escritura decimal, como $26 = 20 + 6$.

Resalta que el estudio del número, sobre todo en lo que respecta a la parte analítica, composiciones y descomposiciones, va a simplificar mucho las operaciones, refiriéndose a su papel en las técnicas de cálculo. El análisis del número aparece así ligado al estudio de las operaciones básicas.

3.2.2.2. La relación entre las operaciones y su secuenciación

El análisis de las operaciones aritméticas básicas, por ejemplo los significados o los tipos de problemas que se modelizan mediante una operación, las formas de definirla, es abordado con una profundidad desigual en los libros sobre metodología que analizamos. Así, ni Paunero, ni Comas, ni Charentón abordan en sus respectivas *Metodologías* la enseñanza sistemática de las operaciones (ni de los algoritmos). El primero hace apenas algún comentario y la segunda sugiere actividades y materiales para trabajar la numeración, pero no incluye un capitulo sobre las operaciones, aparte de su presencia para trabajar el número en cuanto que relacionado con otros mediante composiciones y descomposiciones, motivadas por enunciados de problemas contextualizados sencillos. Charentón expone algunas consideraciones sobre el tipo de problemas que se resuelven mediante una división y sobre cómo construir el correspondiente algoritmo, ya que su *Metodología* se centra en la resolución de problemas. Solo Sáiz Salvat y Eyaralar se ocupan algo más de esta cuestión. En cuanto a Romero, ya hemos comentado (p. 176) el tratamiento que hace de las operaciones en su libro, centrado sobre todo en los procedimientos alternativos a los algoritmos tradicionales para operar, sea mentalmente o por escrito.

[115] Ibídem, p. 166.

Un aspecto significativo de cómo se concibe la enseñanza de las operaciones es la manera de secuenciar su enseñanza, abordándolas de manera sucesiva o considerando las relaciones existentes entre ellas para tratar de manera integrada algunos aspectos de su aprendizaje. Veamos qué proponen para la enseñanza primaria los profesores normalistas sobre esta cuestión.

Eyaralar considera que el método de enseñanza debe poner de manifiesto las relaciones entre las diferentes partes de la Aritmética; por ejemplo, hacer las primeras sumas contando hacia adelante ayuda a ver la suma como una abreviación del conteo; análogamente se relacionan la sustracción y el conteo regresivo; además indica que hay que insistir en la relación entre estas dos operaciones como inversas. Para esto propone que tras cada problema –concreto o abstracto– de suma se realicen los dos correspondientes de resta, lo cual favorece además, por ser la solución conocida de antemano, la invención de ejercicios por parte de los alumnos[116]. Y lo mismo para las operaciones de multiplicación y división. Al comentar los programas escolares recomienda que en todos los grados se estudien las inversas como tales, con ejercicios del tipo: $5 + ? = 15$; $5 \times ? = 15$[117].

Romero insiste en que se ponga de manifiesto, ante todo, cómo se relacionan unas operaciones con otras; por ello propone abordar su enseñanza de manera simultánea, abandonando la costumbre de hacerlo de manera sucesiva, aunque, eso sí, adaptando los números que intervienen y también los procedimientos con los que se opera a la edad y al nivel de los niños:

> La vieja costumbre de la antigua escuela de enseñar primero la suma, después la resta, luego la multiplicación y más tarde la división, como si se tratara de compartimientos sin conexión entre sí, independientes unos de otros, debe desecharse por irracional y antipedagógica. [...] La diferencia en la enseñanza entre la escuela de párvulos y los distintos grados de la escuela primaria estriba, no en las operaciones mismas, sino en el límite de los números con los que opera y en el procedimiento operatorio[118].

[116] Ibídem, p. 188.
[117] Ibídem, p. 44.
[118] Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., pp. 31-32.

Esto es precisamente lo que hallamos en el libro para el grado preparatorio de **Charentón** que, aunque no sea una obra de metodología de la matemática, merece la pena recordar, pues ya desde la primera lección sobre el 0 y el 1 incluye sumas y restas, y en cuanto introduce el número 2 propone ejercicios con las cuatro operaciones[119]. Así, en todas las lecciones en las que va introduciendo los números, figuran ejercicios y problemas en los que intervienen las cuatro operaciones básicas.

Paunero propone tratar primero la suma y la multiplicación y a continuación las correspondientes operaciones inversas, dada la mayor dificultad que presentan éstas últimas, y la necesidad de tener en cuenta las características –la dependencia jerárquica de los contenidos– de las matemáticas y de la aritmética en particular. En todo caso, indica que la gradación puede estar en los datos empleados en los cálculos[120].

Comas en su Metodología[121] propone, al tiempo que se introduce el sistema de numeración posicional, en el primer grado, numerosas actividades con materiales Mackinder[122], Winetka, Decroly, etc., sobre composición y descomposición de números y también, con la introducción de los signos de sumar y restar, propone expresar estas operaciones como sumas y restas. Entre los problemas que cita como ejemplo, los hay de multiplicar y dividir con números pequeños. En el segundo grado también trata la multiplicación y la división conjuntamente al introducir la tabla y los problemas sencillos con números pequeños en los que intervienen estas operaciones.

Sáiz Salvat coincide con sus compañeros en que en la etapa de primaria se enseñen de manera simultánea las diferentes operaciones, ligadas al análisis y la síntesis del número, sobre todo en los dos primeros grados (hasta el 100 o hasta el 1000). Las recomendaciones que hace en su tratado sobre

[119] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?, p. 12-13, 22-25.

[120] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., pp. 136-137.

[121] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., pp. 13-27.

[122] Estos materiales los toma de su libro: Comas Camps, Margarita: *El método Mackinder.* Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1930.

metodología no se hallan reflejadas, tanto como cabría esperar, en la obra de aritmética que escribe unos años después para la escuela primaria. En ella, cuando trata en lecciones sucesivas las operaciones, indica cuáles son inversas de otras:

> Sin hacer operación calcular x en:
> $3 \times x = 24$; sabiendo que $3 \times 8 = 24$.
> $17 \times x = 187$; sabiendo que $17 \times 11 = 187$[123]

No obstante, en las amplísimas relaciones de ejercicios y problemas que figuran al final de las lecciones, todos se resuelven utilizando la operación de la que trata la lección en cuestión, sin que al alumno se le presente la ocasión de tener que elegir entre una operación y otra relacionada; por ejemplo, en la lección de la división no hay problemas que se resuelvan con una resta ni con una multiplicación, y lo mismo sucede en los cuadernos que publica para que sirvan de complemento a los libros, a diferencia de lo que recomienda en el libro de *Metodología* para alumnos normalistas.

Comas también plantea en su libro para la etapa de primaria, al estudiar cada operación, solamente problemas que se resuelven por dicha operación –a pesar de que es un libro de sistematización y ampliación para niños que ya conocen las cuatro operaciones–, aunque inserta algún otro con fines tecnológico-teóricos, que supone realizar otras operaciones relacionadas, como éstos dos que aparecen sobre la división:

> Dividiendo por 18 un cierto número, el resto es 3. ¿Cuál es este número?[124]
>
> ¿Cuántas veces puedes quitar 83 de 7553?[125]

A pesar de que en el tratamiento que hacen de las operaciones aritméticas las obras de Metodología de la Matemática hay diferencias, encontramos elementos comunes. En general, se busca una enseñanza graduada y sobre todo razonada, en la que las operaciones se vayan introduciendo al tiempo que se realiza el análisis de los números, partiendo de los tipos de situaciones que modeliza cada una. Todos los autores que hemos mencionado abogan

[123] Sáiz Salvat, *Aritmética experimental. Libro primero*, op. cit., p. 2.
[124] Comas Camps, *Aritmética*, op. cit., p. 98.
[125] Ibídem, p. 99.

por la intuición y por ello para el aprendizaje de las operaciones, lo mismo que para el del número, promueven el empleo de materiales manipulativos (materiales sencillos del entorno en la mayoría de los casos), en primer lugar, y, después, de material gráfico para la comprensión de cada operación, que dé sentido a la representación simbólica abstracta.

3.3. Las representaciones gráficas y la introducción del simbolismo aritmético

En las propuestas para la enseñanza de la numeración y de las operaciones, y de la aritmética en general, son frecuentes las representaciones gráficas de las cantidades y de las relaciones entre ellas, muchas veces expresables como operaciones, e incluso algunas que pretenden ayudar a la comprensión de procedimientos o algoritmos. Estas representaciones a menudo van asociadas al uso de materiales similares o son copia de dichos materiales y de las acciones que se realizan con ellos, aunque el uso de material didáctico en general se analiza en otro capítulo (sección 7.2, pp. 453 y sig.).

No obstante, aunque el valor que se concede a este tipo de representaciones es compartido, observamos algunas diferencias de tratamiento en las imágenes de los libros analizados.

En primer lugar podemos citar las representaciones analógicas de la cantidad, como las de Comas, tomadas del método Mackinder[126], en las que el número aparece representado como cardinal de una colección (figura 3.9, p. 203)

Charentón, para presentar cada número recurre a representaciones de tipo analógico mostrando la formación del número mediante otra de sus descomposiciones básicas[127], como el número anterior más una unidad [128] (figura 3.10, p. 203).

[126] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., p. 15. También en Comas Camps, *El método Mackinder*, op. cit., p. 62.

[127] Carrillo Gallego, Saá Rojo y Sánchez Jiménez, *El aprendizaje del número y las regletas...*, op. cit.

[128] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio...*, op. cit., p. 42

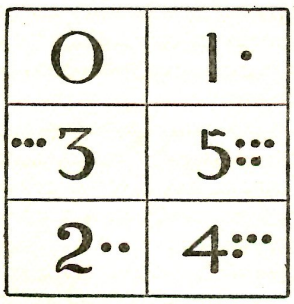


Figura 3.9: Comas - Mackinder. Representación analógica de cantidades



Figura 3.10: Charentón. Descomposiciones básicas del número

Para las descomposiciones y composiciones de números también se utilizan a veces representaciones analógicas, pero ahora los números se suelen representar –aunque no siempre– formando configuraciones geométricas que facilitan la evaluación de la cantidad de manera perceptiva, como hace Margarita Comas[129] (figura 3.11, p. 203).

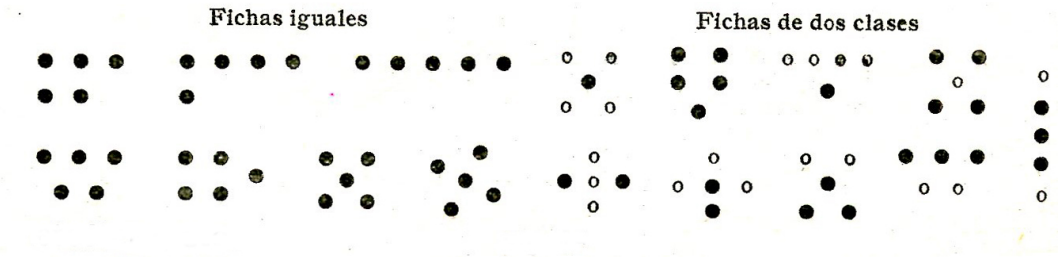


Figura 3.11: Comas. Descomposiciones de números

En ocasiones estos dibujos representan materiales concretos, en el caso anterior fichas redondas y en la figura 3.12[130] (p. 204) fichas de dominó.

Eyaralar es el único de los profesores estudiados que distingue entre mate-

[129] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., p. 17.
[130] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio...*, op. cit., p. 58.

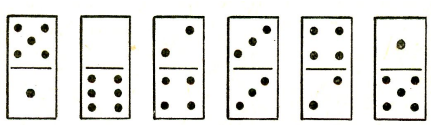


Figura 3.12: Charentón. Material de fichas de dominó

riales para la «numeración» y materiales para el «análisis del número»[131], los dos niveles de conocimiento del número, y propone materiales para ese segundo nivel, muchos de los cuales había visto utilizar en las escuelas francesas[132] (figura 3.13, p. 204).

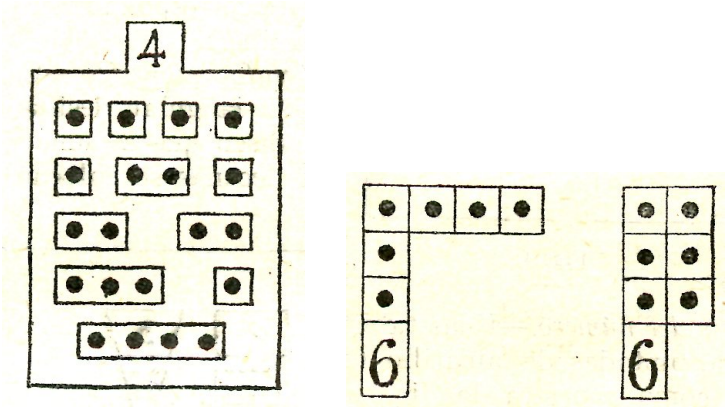


Figura 3.13: Eyaralar. Materiales para la numeración y el análisis del número

Otras veces encontramos representaciones más abstractas, donde se prescinde del elemento analógico y se esquematizan las relaciones entre números, como ésta de Romero para las descomposiciones del 9 en dos sumandos[133] (figura 3.14, p. 205).

Se observa que, en todos los casos, los símbolos matemáticos universales para los números y las operaciones se van introduciendo junto al grafismo, de manera progresiva. Para Comas la función de los símbolos aritméticos, al igual que los químicos o los de otras disciplinas, es abreviar. Reconoce

[131] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 216-221.
[132] Ibídem, p. 218. También en Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 8 y p. 9.
[133] Romero Carrasco, *Metodología...*, p. 42.

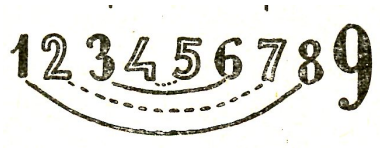


Figura 3.14: Romero. Descomposiciones del 9 en dos sumandos

que no deben introducirse mientras el niño no sienta la necesidad. Por ello recomienda empezar por el cálculo mental o escrito en lenguaje natural, hasta que la necesidad de simplificar la escritura sea sentida por los propios niños[134]. Recomienda, una vez que los niños se han familiarizado con los números de dos cifras, trabajando con objetos (palillos y haces de 10 palillos), representar el número 43 así[135]:

$$\begin{array}{lll} \text{cuarenta y tres} & = 4 \text{ haces} & + 3 \text{ palillos} \\ & = 4 \text{ decenas} & + 3 \text{ unidades} \\ & = 4 \text{ d} & + 3 \text{ u} \end{array}$$

hasta llegar a la escritura convencional.

Para la comprensión de las operaciones y la práctica de resultados con números pequeños, hallamos igualmente imágenes en las que se combinan la representación analógica de cantidades y los símbolos de las operaciones. Romero habla de «asociación de las relaciones numéricas entre los objetos de intuición, los signos gráficos y la representación cifrada de los números»[136] (figura 3.15, p. 206).

Margarita Comas utiliza fichas de dos colores para representar los sumandos en un problema real e introduce los símbolos de las operaciones como una escritura abreviada (figura 3.16, p. 206)[137].

En ambos casos el tipo de tareas utilizadas para la introducción de los signos de las operaciones es evaluar (ya sea determinando el cardinal de una colección o construyendo una colección de cardinal dado) el número de objetos que intervienen en situaciones de añadir y quitar, mediante la técnica del

[134]Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., pp. 8-9.
[135]Ibídem, p. 21.
[136]Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., p. 42. Imagen en p. 75.
[137]Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., p. 18.

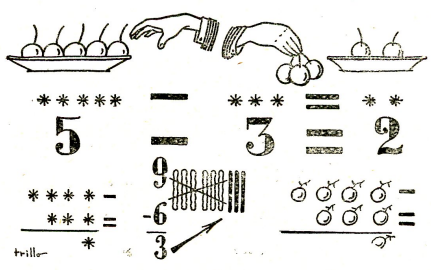


Figura 3.15: Romero. Situaciones de suma

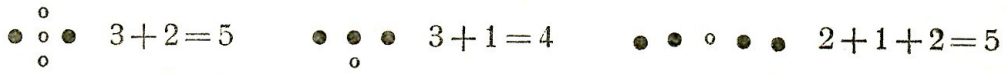


Figura 3.16: Comas. Situación de suma

conteo (quizá 'conteo súbito') y expresar simbólicamente las acciones realizadas como operaciones de suma o resta. Otras veces, las representaciones van ligadas a composiciones y descomposiciones del número y los signos de las operaciones representan las relaciones subyacentes.

Se observa que el signo «=» va ligado a los signos de las operaciones y se introduce a la vez; aunque hay alguna excepción en cuanto a esto último en la gradación que propone Eyaralar, en el epígrafe de su *Metodología* dedicado a las dificultades del simbolismo. Para introducir los símbolos en el caso de la resta sugiere una secuencia como la siguiente, en orden creciente de dificultad[138] (figura 3.17, p. 206)

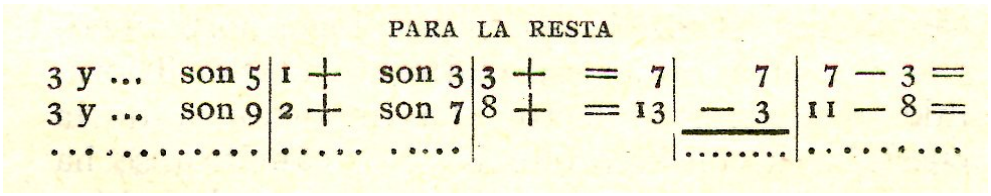


Figura 3.17: Eyaralar. Introducción de los símbolos

En general, cuando se trata de números mayores que 9, se eligen representaciones –o materiales– que pongan de manifiesto la composición del número

[138] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 213.

como un grupo de 10 (o varios) y algunas unidades más[139] (figura 3.18, p. 207)

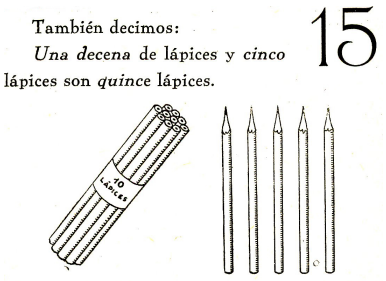


Figura 3.18: Charentón. Descomposiciones de números de la segunda decena

Es el caso de un material que Eyaralar retoma en su *Metodología* y que había conocido en Francia, el «cinematógrafo numérico»[140] (figura 3.19, p. 207)

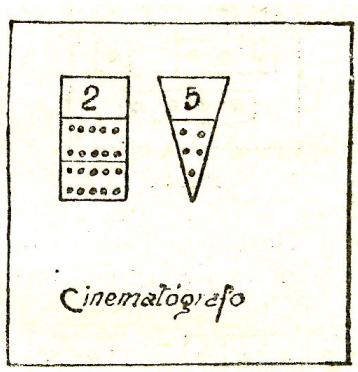


Figura 3.19: Eyaralar. Cinematógrafo numérico

Sáiz Salvat utiliza también fichas de dominó, en este caso para representar una suma como varias veces 5 más un resto menor[141] (figura 3.20, p. 207).

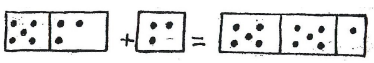


Figura 3.20: Saiz Salvat. Sumas con fichas de dominó

[139] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio...*, op. cit., p. 122.
[140] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 217. También en Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 8.
[141] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 188.

Charentón usa representaciones de este tipo (en su caso con cajas, botones sueltos y cartoncillos de 10 botones) para realizar materialmente las primeras sumas con números pequeños y representar mediante el dibujo la cantidad resultante de manera agrupada. Con cartoncillos de 100 botones, que simbolizan las centenas, representa números mayores que 100[142].

No obstante, para representar en el grado elemental las operaciones, las representaciones se volvían más esquemáticas –ya no son analógicas[143]– para poder explicar con sentido las técnicas algorítmicas de suma y resta (figura 3.31, p. 235). Eyaralar propone también un tipo parecido de simbolización para representar números más grandes y ayudar a mostrar la secuencia de acciones de las que se compone el algoritmo de la suma, como veremos en el apartado dedicado a la automatización del cálculo (figura 3.32, p. 236).

Respecto al uso de figuras o imágenes cuyo objetivo sea específicamente la comprensión de propiedades como, por ejemplo, la conmutativa de la multiplicación o la distributiva de esta operación respecto de la suma, solo las encontramos en la obra de metodología de Eyaralar, en el apartado dedicado al «método gráfico» de demostración, consistente en «emplear la representación gráfica de los números para estudiar sus propiedades»[144]. Esta representación de la multiplicación, útil para visualizar la propiedad conmutativa, de tipo geométrico y con un carácter más 'matemático' que las que aportan otros autores[145] –cada unidad del producto se asocia a una unidad de superficie–, tiene la ventaja de extenderse fácilmente al caso de tres factores y proporcionar una justificación intuitiva en el caso más general[146]

Además, su carácter más abstracto la hará extensible al estudio de otras propiedades de la operación. Esta representación, más parecida –aunque se

[142] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., pp. 42-43.

[143] Representan analógicamente, no la cantidad total, sino las unidades de cada orden.

[144] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 82.

[145] Margarita Comas utiliza el dibujo de una puerta con ventanas distribuidas uniformemente formando un rectángulo, que gira noventa grados, para mostrar de manera intuitiva la propiedad conmutativa del producto. Comas Camps, *Aritmética*, op. cit., p. 78.

[146] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 63. Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 64. Eyaralar Almazán, *Metodología...*, p. 81 (figura 3.21(a)) y Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 70. Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 72. Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 82. (figura 3.21(b))

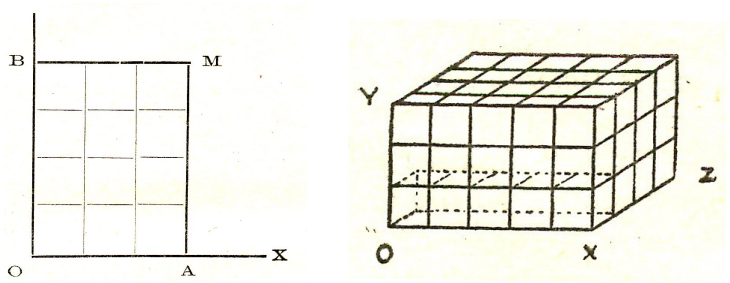


Figura 3.21: Eyaralar. Método gráfico para propiedades de la multiplicación

plantee en un contexto de áreas y no en un contexto que aluda a colecciones– al 'producto cartesiano' en la que ambos factores son intercambiables, incluso en el plano de lo concreto[147], precisamente facilita el estudio de las propiedades del producto.

En la Aritmética de Saiz Salvat[148] figura también un rectángulo dividido en cuadrados para mostrar el producto 4×2, pero solo como una técnica gráfica de multiplicación, sin vincular esta representación a las propiedades de la operación.

No obstante, es una constante en las obras analizadas que casi todas las situaciones multiplicativas que se proponen sean del mismo tipo, multiplicando y multiplicador de diferente naturaleza, actuando el último como operador 'escalar'[149]; hay algunos problemas de cálculo de áreas y ninguno combinatorio.

También hay que resaltar que en general no hemos hallado en el resto de los profesores cuyas obras analizamos materiales o representaciones gráficas, como las que vimos en el apartado 3.1.2.1 (p. 177), que pongan tan claramente el énfasis en que la suma es avanzar en la serie numérica y la resta retroceder (también es cierto que solo Eyaralar representa los números naturales sobre

[147]No es lo mismo calcular el número de patas que tienen 5 galgos de 4 patas cada uno, que el de 4 galgos de 5 patas cada uno. En cambio sí puedo realizar el mismo número de combinaciones con 5 faldas y 4 camisas que con 4 faldas y 5 camisas y, sobre todo, ambas situaciones tienen sentido en el plano de lo real, aunque no sean la misma, lo que no ocurre en el primer ejemplo.

[148]Sáiz Salvat, *Aritmética experimental. Libro primero*, op. cit., p. 152.

[149]Vergnaud, *L'enfant, la Mathématique...*, op. cit.

una semirrecta orientada a la derecha)[150]. Encontramos representaciones de las operaciones de suma y resta que utilizan la recta numérica, por ejemplo en Saiz Salvat[151], pero son menos 'dinámicas', en el sentido de que se centran en la representación del resultado, no en poner de manifiesto las acciones involucradas y con ello la relación entre ambas operaciones una como inversa de la otra.

Podemos decir que Eyaralar incluye, junto a las representaciones más o menos analógicas o vinculadas a lo concreto, otras que se presentan más esquematizadas y con énfasis en las relaciones –se identifican como matemáticas–, que este autor asocia a lo que llama «intuición representativa»[152].

3.3.1. Propuesta de nuevos símbolos en Aritmética

El uso de símbolos matemáticos es un aspecto que comentan varios autores de distinta procedencia. Así, Gutiérrez del Arroyo, del Museo Pedagógico Nacional, señala que el objetivo del cálculo simbólico es «trabajar con estos signos como tales signos y mediante las leyes operatorias a que se les ha sujetado [sin apelar al concepto de número]; hasta el punto de que estos signos y estas leyes llegan a ser origen de nuevos números»[153].

De los profesores que estamos considerando, es Eyaralar el que dedica más atención al simbolismo matemático y, en particular, al aritmético. Ya en la *Memoria* que presentó tras disfrutar la beca de la JAE, podemos leer: «Conviene emplear los símbolos porque hacen visibles e inscriptibles las relaciones matemáticas, y permiten representar de un modo claro y sencillo la marcha del pensamiento al demostrar un principio o resolver un problema»[154]. Pone como ejemplo la representación de un determinado tipo de problemas aritméticos, los de compra-venta, en los que la relación entre el beneficio total, el precio de venta total y el precio de compra total, se representa como «BT

[150] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., pp. 18-19. *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., pp. 30-31.

[151] Sáiz Salvat, *Aritmética experimental. Libro primero*, op. cit., p. 153.

[152] Eyaralar Almazán, José María: *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría. Normas para su planteo y resolución*. Sardá, Guadalajara, 1936, p. 17.

[153] Gutiérrez del Arroyo, *La enseñanza de la Aritmética...*, op. cit., p. 386.

[154] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 20.

= PVT – PCT; de donde se deduce PVT= PCT + BT y PCT = PVT – BT, que el alumno interpreta con facilidad»[155]. Hemos de señalar que en este caso, aunque la intención es expresar simbólicamente relaciones aritméticas, el tratamiento que se hace de esas expresiones es pre-algebraico o algebraico, aunque veamos trazas de lenguaje sincopado.

En las Notas al Capítulo III del libro de *Metodología* dedica un apartado precisamente al simbolismo. Para él, el simbolismo matemático es importante «por cuanto facilita el pensar»[156], es decir, la *función* de los símbolos no es solo –ni es lo más importante– la de servir a una escritura abreviada, como expresaba Margarita Comas. Incluso propone símbolos nuevos y diferentes de los habitualmente admitidos para algunas relaciones y operaciones, algunos de los cuales ya habían sido propuestos en 1925 en un artículo que publica en la *Revista de Escuelas Normales*[157]. En dicho artículo insiste en la doble función del simbolismo: por una parte, economizar esfuerzo mental y material (reconoce que en el origen de los símbolos está el deseo de simplificar); por otra, responder a la necesidad de rigor a la hora de expresar las relaciones numéricas.

Incluso propone la introducción de nuevos símbolos: uno para sustituir al del logaritmo (inspirado en el símbolo usado habitualmente en Alemania), que evita los paréntesis y a la vez es más parecido al de la operación radicación y contribuye a recordar la relación entre ambas operaciones; otros, para expresar relaciones de manera más clara y precisa que con los símbolos existentes. Se trata en el último caso de signos de la relación «aproximadamente igual», para la que considera que el signo «∼», admitido en matemáticas y usado por Rey Pastor, es confuso porque recuerda al de la equivalencia en Geometría y, además, porque no permite diferenciar el sentido de la aproximación. En cambio sugiere el uso de éstos otros[158], más relacionados con el símbolo de la igualdad (figura 3.22, p. 212).

Más tarde sustituye los símbolos para «aproximadamente igual por exceso» y «aproximadamente igual por defecto» por otros que son combinación

[155]Ibídem, p. 20.

[156]Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 54.

[157]Eyaralar Almazán, José María: «Adopción de nuevos signos en Aritmética». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **24**, pp. 130–131.

[158]Ibídem, figura en p. 130.

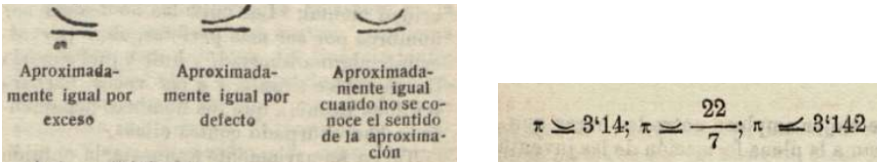


Figura 3.22: Eyaralar. Símbolos de aproximación (1)



Figura 3.23: Eyaralar. Símbolos de aproximación (2)

del signo «=» y los signos «>» y «<», respectivamente[159] (figura 3.23, p. 212).

Él mismo estaba casi seguro de que no había apenas esperanza de que fuese adoptado ninguno de esos símbolos, a pesar de su utilidad –declara haberlos empleado con éxito–, al no provenir del mundo de la propia Matemática:

> ¡Lástima que no hayan sido propuestos por Rey Pastor desde la Argentina, Hadamard en Francia, o Klein en Alemania, en vez de serlo por un modestísimo profesor de Escuela Normal española!; pero ello es [sic] muestra *cómo en lo más elemental de las matemáticas pueden surgir cuestiones de interés*[160].

Vemos cómo alude a la labor investigadora del profesor de Escuela Normal[161]. Más tarde alberga alguna esperanza, no exenta de ironía: «Esperemos que aun siendo útiles tales símbolos, tarden un par de siglos, como ha ocurrido otras veces, en ser generalmente usados, si es que llegan a serlo»[162].

3.4. La automatización del cálculo

La importancia que se concede en aquel momento a los automatismos de cálculo es universal y queda patente en este comentario de Eyaralar:

[159] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 54-56.
[160] Eyaralar Almazán, *Adopción de nuevos símbolos....* La cursiva es nuestra.
[161] Eyaralar Almazán, José María: «La investigación. Los números pitagóricos». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **17-18**, pp. 226–228.
[162] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 56.

> El arte de calcular debe ser un puro automatismo para que la atención pueda quedar libre en la persecución de la solución del problema planteado, y sobre todo para que las operaciones se realicen con la rapidez y la exactitud que requieren, con la misma rapidez y exactitud que lo haría una máquina de calcular[163].

Una perspectiva de estudio *ecológica* –en el sentido de la TAD– ha de considerar aspectos como la importancia que se concede a la rapidez, consecuencia de la época que estudiamos; baste observar la referencia a la máquina de calcular para comparar con la situación actual.

La automatización de las operaciones básicas conlleva el aprendizaje de las combinaciones numéricas básicas o 'tablas', esto es, los resultados de operar con números pequeños, necesarias a su vez para la ejecución de los algoritmos, técnicas de cálculo mental (no escrito) o técnicas para el cálculo rápido o no automático y el aprendizaje de los algoritmos de cálculo, normalmente los habituales en cada cultura.

3.4.1. El aprendizaje de las combinaciones numéricas básicas o 'tablas'

En cuanto al aprendizaje de las 'tablas' o combinaciones numéricas básicas para las operaciones, ha sido tradicionalmente un contenido de la enseñanza primaria y las personas más preocupadas por hacer la enseñanza del cálculo grata y menos mecanizada se han preocupado por proponer *técnicas didácticas* para su aprendizaje.

Así, **Nelson** –cuya obra cita Eyaralar en más de una ocasión– propone un juego para practicar la tabla de multiplicar[164]. En la pizarra se tiene una tabla pitagórica con los productos de números entre 2 y 9 (se suprimen las filas y columnas en las que un factor es el 1). Se fabrican 64 círculos de cartón con un color en cada cara, de modo que cada color pertenece a un equipo

[163] Ibídem, p. 207.

[164] Nelson, Ernesto: *Aritmética Inventiva*. Appleton y Cía, Nueva York, 1918. Primera edición de 1906, pp. 33-35. Se trata de un juego de los llamados 'de estrategia' que, a la vez, permite automatizar las combinaciones numéricas básicas de la multiplicación.

de los dos en los que se divide la clase. Comienza el juego eligiendo cada equipo, alternativamente, dos de los cuadrados del centro, marcados con los números 25, 30, 30 y 36. Cada vez que un equipo elige un número se coloca encima de él un disco con el color del equipo (figura 3.24, p. 214). Los niños de ambos equipos dicen alternativamente un producto de dos números y el maestro pone un disco por la cara correspondiente al color del equipo, sobre el número que representa el producto indicado (el primer factor se lee en la fila horizontal y el segundo en la vertical). Pero cuando una casilla de un equipo quede entre dos tapadas con discos del equipo contrario, en horizontal o en vertical, dicha casilla pasa a ser propiedad del equipo que la ha encerrado. Cuando las 64 fichas están colocadas, se acaba el juego y gana el equipo que tiene más círculos de su color[165].

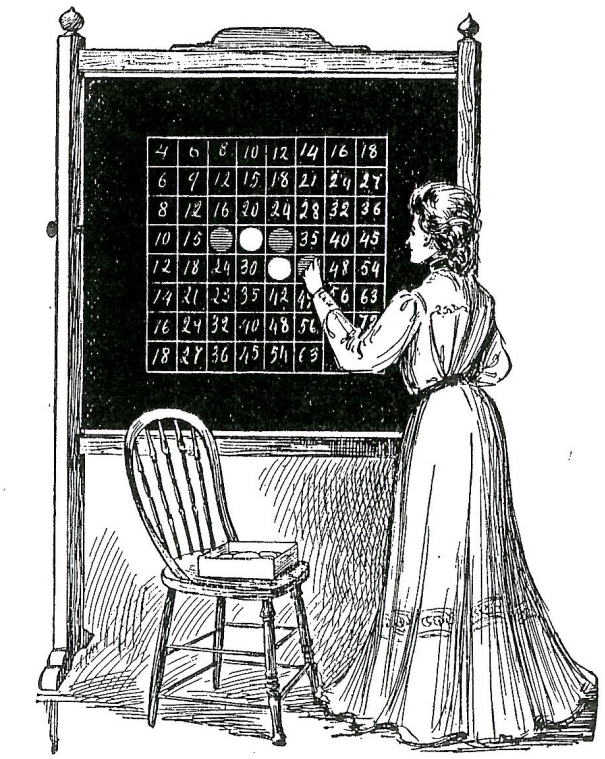


Figura 3.24: Nelson. Juego aritmético

[165]En realidad las estrategias ganadoras no guardan relación únicamente con el conocimiento de los productos de la tabla, pero éstos se van recordando al jugar.

Francisco Romero sugiere hacer notar las regularidades en la tabla de la suma (en la diagonal principal y las paralelas los números aumentan de dos en dos unidades y en las diagonales que van en el otro sentido todos los números son iguales). En el apartado dedicado al cálculo mental hay estrategias para aprender las combinaciones numéricas básicas de la suma y la resta, relacionando unas con otras; concretamente presenta una disposición gráfica para las descomposiciones del número 8, que luego expresa como sumas y restas (figura 3.25, p. 215). En el caso de la tabla de multiplicar, tras señalar la importancia de su memorización para poder avanzar en el aprendizaje del cálculo, indica que su conocimiento es mecánico y se adquiere por repetición[166].

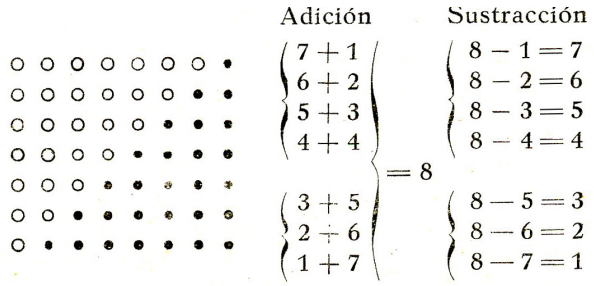


Figura 3.25: Romero. Descomposiciones de 8 en dos sumandos

Aurelio R. Charentón dedica varias lecciones a las combinaciones numéricas básicas, primero la tabla del 2, luego el resto de dos en dos, antes de abordar la multiplicación por decenas o centenas netas y el algoritmo. Cada una de estas lecciones incluye problemas que se resuelven con los productos de la tabla y el apartado dedicado al cálculo mental se destina ahora a memorizar las tablas: «Productos por 3 de los 10 primeros números. El tercio de esos productos»[167]. En cualquier caso, ya hemos comentado cómo en el libro para el grado preparatorio las multiplicaciones de números de una cifra se incluían entre los problemas y los ejercicios de cálculo mental, al final de cada tema. La *técnica didáctica* consiste en ir construyendo los resultados de las tablas a la vez que se introducen los números y las operaciones.

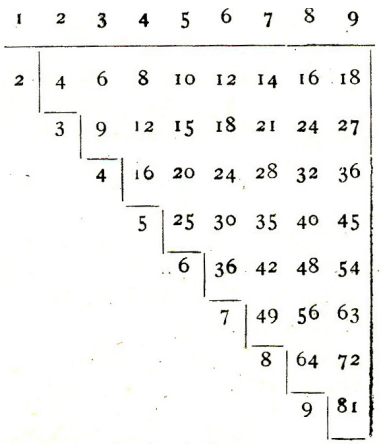
[166] Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., pp. 44 y 100.
[167] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 192.

Comas opina, en su Aritmética[168], que no hay que aprender de memoria las tablas de sumar y restar, ya que los niños pueden adquirir velocidad en esos resultados ejercitando simplemente, incluso recurriendo a los dedos en caso de apuro. En la *Metodología* propone el uso de tarjetas con sumas y restas de números de una cifra, con las que los niños pueden ir practicando los resultados de la tabla[169]. Sin embargo, para las de multiplicar considera imprescindible memorizarlas para poder ejecutar las operaciones fluidamente, por lo que recomienda que las aprendan los alumnos aunque, eso sí, «una vez que hayan entendido su construcción». Aconseja cambiar la cantinela habitual «siete por tres son veintiuno» por la que recomienda el Board of Education inglés, «tres sietes son veintiuno», para resaltar el significado de la multiplicación como adición repetida de un mismo número[170]. En este último libro insiste en la necesidad del aprendizaje comprensivo de las combinaciones básicas de la multiplicación y de su memorización; por ello propone construir la tabla, al menos parcialmente, antes de memorizarla, a base de práctica. Es de destacar que a la hora de plantear ejercicios para afianzar la tabla tiene en cuenta la relación entre las operaciones de multiplicar y dividir y las definiciones de las operaciones: «¿Cuánto es 4 por 5?, ¿cuántos cincos hacen 20?, ¿qué número repetido cuatro veces da 20?»[171]. Y propone realizar ejercicios colectivos y problemas, orales o escritos. Vemos que el aprendizaje de las combinaciones numéricas básicas no solo es un fin en sí mismo, sino que se aprovecha como un medio para profundizar en la comprensión de las operaciones.

Eyaralar propone sustituir la tabla de multiplicar habitual por una en la que se supriman casi la mitad de los productos para poner de manifiesto la propiedad conmutativa de la multiplicación[172] (figura 3.26, p. 217).

Hay que observar que no aparecen los productos por 1, ya que son triviales. Para multiplicar dos números se toma el menor en la diagonal y el mayor en

[168]Comas Camps, *Aritmética*, op. cit., pp.18-19.
[169]Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., Cap. II.
[170]Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., p. 19.
[171]Ibídem, p. 25-26.
[172]Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 343.



1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	9	12	15	18	21	24	27
		4	16	20	24	28	32	36
			5	25	30	35	40	45
				6	36	42	48	54
					7	49	56	63
						8	64	72
							9	81

Figura 3.26: Eyaralar. Tabla de multiplicar

la primera fila. Para la suma también aconseja una tabla reducida del mismo tipo[173].

La *tecnología didáctica* se refleja, como en el caso de Margarita Comas, en la recomendación de un uso razonado de los dispositivos o recursos. Pero Eyaralar va un paso más allá. La propiedad conmutativa puede utilizarse para determinar los resultados de la tabla en su presentación habitual, pero el diseño de esta tabla es una *variable didáctica*[174] que obliga a tener que hacerlo. El uso que hace Eyaralar de las llamadas 'tablas' como un dispositivo material que ayude al razonamiento se deduce igualmente de ejercicios como estos, propuestos a futuros maestros: «Sabiendo que la suma de los 9 primeros números es 45, calcular la suma de los números contenidos en la Tabla de Pitágoras»[175] «¿Cuánto suman los números inscritos en la tabla de sumar?»[176].

3.4.2. El cálculo mental y el cálculo *rápido*

Era bastante común que los profesores de Escuela Normal que estaban más comprometidos con las tendencias renovadoras reivindicaran la importancia del cálculo mental, a la vez que reconocían su escasa presencia en

[173]Ibídem, p. 340.
[174]Ver p. 8.
[175]Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 176.
[176]Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 81.

la escuela primaria. Esta ausencia en la enseñanza española también había sido señalada por **José Augusto Sánchez Pérez** en 1921, durante el Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias celebrado en Oporto. Este profesor del Instituto-Escuela reclamaba que los programas de Aritmética para la enseñanza media incluyeran, entre otras cuestiones, el cálculo mental, tal como se había hecho en otros países[177].

La importancia concedida en la época de la que nos ocupamos a calcular mentalmente el resultado de una operación y, en general, a hacer cálculos con rapidez, es una muestra de cómo un modelo epistemológico y un modelo docente de las matemáticas guarda relación con una época y una institución. La no disponibilidad en aquel momento de dispositivos electrónicos de cálculo, a diferencia de lo que ocurre en la actualidad, confería gran importancia a la agilidad en la ejecución de los cálculos y, por consiguiente, a las técnicas de cálculo, tanto escrito como mental, ya que éste último se asociaba con la rapidez[178]. Es normal encontrar opiniones como la de **Francisco Romero**: «El cálculo rápido es una habilidad que se adquiere con el ejercicio, y, como toda habilidad, tiene mucho de mecánico. Por eso es de toda precisión que los niños operen mucho, tanto en forma mental como cifrada»[179]. Y en los capítulos dedicados a los problemas, tras introducir cada una de las operaciones, propone numerosos problemas para resolver mentalmente, en general con números pequeños o que se prestan al cálculo mental.

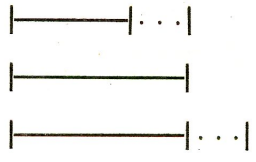
Este profesor atribuye al cálculo mental un valor doble, utilitario o práctico y educativo. Incluso, siguiendo a Félix Martel, un valor moral: «Por medio

[177] Sánchez Pérez, José Augusto: «Notas de metodología matemática». En: *Congreso de Oporto. Tomo III. Ciencias Matemáticas*, pp. 5–22. Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Madrid, 1921.

[178] Actualmente existe cierta controversia entre los partidarios y los detractores del aprendizaje de las técnicas de cálculo algorítmicas (que algunos profesores erróneamente identifican exclusivamente con los algoritmos tradicionales) al disponer de instrumentos materiales capaces de realizar dichas operaciones. De hecho, las razones para su aprendizaje estarían más relacionadas con la comprensión del sistema de numeración y de las propiedades de las operaciones, que con la agilidad o rapidez en los cálculos. Cambia así la *tecnología didáctica*, y con ella las *tareas* y las *técnicas*; por ejemplo, no se proponen operaciones con números muy grandes si no se prestan al cálculo no algorítmico, ni se potencia la rapidez al calcular.

[179] Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., p. 42.

del cálculo desarrolla el niño su capacidad lógica, su escrupulosidad y amor a la verdad, que después aplica a todas las actividades de su vida»[180]. Para ello, el niño debe aprender en la escuela primaria a calcular mentalmente y por escrito y a comprender los procedimientos que usa. En su libro justifica, ayudándose de un esquema gráfico, la técnica para sumar tres números enteros consecutivos[181] (figura 3.27, p. 219).



Fijándonos en el gráfico vemos que si quitamos una unidad al número mayor y la añadimos al menor los tres números son iguales al número medio

Figura 3.27: Romero. Suma de tres números consecutivos

No solo la *praxis* es importante, sino el *logos*, y cita a Detaille cuando declara que el cálculo mental es menos maquinal y más educativo que el escrito[182]. Además considera el cálculo mental la base del cálculo escrito y que por ello debe ejercitarse antes. Reconoce que los procedimientos del cálculo oral y los del escrito no son los mismos, y pone el ejemplo de empezar a realizar una suma por la izquierda o por la derecha, respectivamente.

Incluso aporta una razón que podemos situar en el *nivel Sociedad* (cf. p. 17): la satisfacción de los padres al ver calcular a sus hijos con rapidez y exactitud y como consecuencia el buen nombre que tendrá la escuela. Pero el valor práctico del cálculo mental –ahorro de tiempo, no disponibilidad o no conveniencia de usar lápiz y papel– también se considera importante en aquel momento, incluso alude a la ventaja que supone para ciertos trabajos, como la banca o el comercio. La importancia del cálculo mental se extiende a los alumnos normalistas y Romero refiere su tratamiento destacado en las Normales francesas.

Romero, al igual que Eyaralar, diferencia entre cálculo 'mental' y cálculo 'rápido' (escrito). Con éste último se refiere al que se efectúa mediante

[180]Ibídem, p. 20.
[181]Ibídem, p. 223.
[182]Ibídem, p. 26.

procedimientos diferentes –y más rápidos o más cómodos– de los algoritmos tradicionales.

En cuanto a los dispositivos que podían hacer más ameno el cálculo mental o el cálculo escrito rápido, cita los cuadrados mágicos[183], a los que denomina «ábacos mágicos», o el «Sistema Jackson»[184], que considera útil para acostumbrar a los niños a sumar y restar de manera rápida y segura (figura 3.28, p. 220).

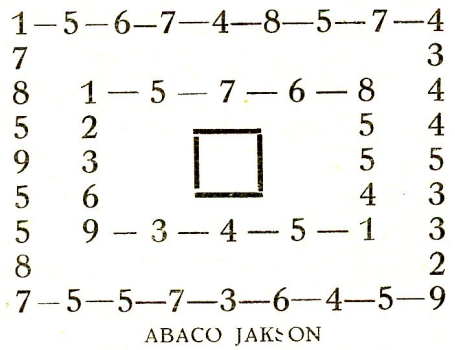


Figura 3.28: Romero. «Ábaco Jackson»

Dispositivo citado igualmente por Sáiz Salvat, quien describe así los cuadros para practicar operaciones:

> No consisten en otra cosa que en unos cuadros que contienen números apropiados en filas y columnas dispuestas; los ejercicios consisten en que los alumnos añaden o quitan [sic] multipliquen o dividan a los números de los cuadros las unidades que les dice el maestro y dan los resultados[185].

Recoge también en su obra técnicas matemáticas de cálculo mental: agrupar números para formar unidades completas de un orden superior, completar hasta decenas, centenas o millares netos, compensación, técnicas para sumar

[183]Números dispuestos formando un cuadrado, de modo que la suma de los números de cada fila, columna o diagonal sea la misma.

[184]Francisco Romero cita otra manera de utilizar el llamado 'sistema Jackson'. En Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., pp. 44-45.

[185]Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 259.

series de números consecutivos operando con el número central y, por supuesto las basadas en la descomposición polinómica de los números y en las propiedades de las operaciones. En el caso de la multiplicación, figura una elevada cantidad de técnicas para el cálculo rápido, basadas en la propiedad distributiva y en algunas propiedades algebraicas, técnicas que describe sin justificación alguna en la mayoría de los casos.

En el caso de **Aurelio R. Charentón**, aunque en los tres libros que se conservan de matemáticas no se refiere explícitamente a la importancia o al papel del cálculo mental, la propuesta que hace, tanto en los libros de aritmética para primaria como en el de Metodología, dedicado a los maestros y alumnos normalistas, no deja lugar a dudas sobre su postura. La *técnica didáctica* que utiliza en las Lecciones de Cálculo consiste en incluir, en ambos grados, ejercicios de cálculo mental en todas las lecciones dedicadas al aprendizaje de los números. Tras introducir cada número, o cada orden de unidades, en la parte de la lección dedicada al cálculo hay ejercicios manuales –en el grado preparatorio–, ejercicios de cálculo escrito, problemas y, para terminar, ejercicios de cálculo mental.

En el grado preparatorio los ejercicios de cálculo mental propuestos incluyen: conteo continuo y discontinuo (el 'salto' es un divisor del número estudiado), ascendente y descendente, combinaciones básicas de la suma y sumas en las que al menos un sumando es de una cifra y el resultado no supera el 20 (es el máximo número que se estudia en el libro para el grado preparatorio). Pero también hay ocasiones en las que en el apartado dedicado al cálculo mental se lee: «Los mismos ejercicios que para el cálculo escrito»[186], aunque solo en las lecciones dedicadas a los números menores que 9; en estos casos los niños han de realizar problemas de resta, multiplicación y división con números pequeños (las operaciones como tales no se estudian en este libro).

Para el grado elemental contempla, con decenas, centenas o millares netos, el conteo discontinuo, ascendente y descendente, sumas y restas, multiplicaciones y divisiones por un número de una cifra. En las lecciones sobre las

[186] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio...*, op. cit., pp. 25, 30, 40, 45, 60, 78.

operaciones elementales hay ejercicios de cálculo mental que inciden en la estructura del sistema de numeración decimal –aunque al tratarse de un libro para el alumno no haga explícita la *técnica didáctica* que consiste en proponer ejercicios para practicar ciertas *técnicas matemáticas*–, por ejemplo: «18 – 6 = ...; 28 – 6 = ...; 38 – 6 = ...; 48 – 6 = ...». En las lecciones sobre números decimales y sobre las operaciones con éstos, tras explicar las técnicas de cálculo, se proponen operaciones con números decimales en las que la parte entera es un número de una cifra y la parte decimal es múltiplo de 5, así como problemas y operaciones de multiplicar y dividir un número decimal por un número de una cifra; los resultados no son siempre números enteros. También las lecciones dedicadas a la medida de magnitudes (longitud, capacidad, masa, tiempo) o pseudo magnitudes (dinero) incluyen ejercicios para calcular mentalmente operaciones con números 'concretos' y problemas para resolver calculando mentalmente. Las técnicas para multiplicar o dividir un número por la unidad seguida de ceros también se practican, tras justificarlas con ejemplos concretos referidos a magnitudes, en el apartado dedicado al cálculo mental. Tan solo en el último capítulo, dedicado a las fracciones, aparece explícito –sin justificar– que para dividir por 25 un número se puede multiplicar por 4 y dividir por 100.

El apéndice que hay al final de la *Metodología de los Problemas*[187] consta de una colección de problemas propuestos, clasificados por temas. En cada una de las clases hay un apartado dedicado a problemas para resolver mentalmente, antes de otro dedicado a problemas para resolver por escrito.

Felipe Sáiz Salvat, en la parte dedicada al Cálculo Mental del libro de 1931[188], considera una falta de desarrollo de una habilidad de la inteligencia numérica la incapacidad de muchas personas formadas para ejecutar mentalmente un cálculo. Da tres razones para incluir el cálculo mental en la escuela primaria: en un plan educativo no debe olvidarse el desarrollo de todo germen físico, intelectual o moral; el cálculo mental produce agudeza numérica y ésta permite resolver rápidamente muchas cuestiones de la vida cotidiana; otras razones son de tipo psicológico. Vemos pues motivos utilitarios junto a

[187] Charentón, *Metodología...*, op. cit., pp. 91-128.
[188] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., pp. 251-301.

los educativos, para trabajar el cálculo mental en la enseñanza, aunque reconoce que no se hace suficientemente[189]. Por ello recomienda su libro como guía didáctica y como medio de entrenamiento para los maestros. Unos años antes había insistido en la diferencia entre el talento matemático en general y las destrezas calculatorias: «Nosotros nos inclinamos por un cálculo mental restringido como medio de despertar la velocidad de concepción, pero nunca con la amplitud y exclusivismo que adquiere en muchas escuelas»[190].

Entre las actividades para trabajar el cálculo mental que propone en este libro hay problemas para resolver mentalmente, juegos de adivinar números (realizar una serie de operaciones inversas en orden también inverso), y cuadros de sumar y restar, como el de Jackson, descrito anteriormente, para el que sugiere que el alumno no solo calcule productos, sino que encuentre, dado un número, otros dos que multiplicados den ese resultado.

Propone empezar los ejercicios de cálculo mental ayudándose de materiales tales como cubos. Luego aparecen operaciones con números de una cifra o con decenas netas, ejercicios en los que se muestran técnicas de cálculo no algorítmico, como el recurso a las decenas o centenas netas (que llama «procedimiento del número redondo»), a los complementos (a 10, 100, 1000), incluso algún procedimiento menos habitual, como el que denomina «de la resta compuesta»:

> $84 - 37 = 40 + 7$ porque $37 + 7 = 44$, $44 + 40 = 84$; el número que sumando al sustraendo 37 ha dado el minuendo es $(40 + 7) = 47$, luego ese es la resta según la ecuación fundamental[191].

También propone series de operaciones para poner de manifiesto algunas técnicas, como ir sumándole 9 sucesivamente a 3, 13, 23, 33, 43, 53, por ejemplo. Y técnicas basadas en las propiedades del sistema de numeración (descomposición polinómica de los números) y de las operaciones (asociativa, distributiva, etc.).

La *técnica didáctica* consiste en invitar al lector a generalizar los resultados de varios ejemplos previos para obtener reglas, por ejemplo, para multi-

[189] Ibídem, p. 253.

[190] Sáiz Salvat, Felipe: «La enseñanza de las Matemáticas. El cálculo mental». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **15**, p. 157.

[191] Ibídem, p. 263.

plicar por 11. Es de destacar que de estas reglas a veces da una justificación aritmética que, en todo caso, «conserva la traza de las operaciones»[192]:

> *Productos por 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91...*
>
> Ejemplo:
>
> $39 \times 11 = 39(10 + 1) = 39 \times 10 + 39 \times 1 = 390 + 39$
>
> $85 \times 12 = 85(10 + 2) = 85 \times 10 + 85 \times 2 = 850 + 85 \times 2$
>
> $96 \times 13 = 96(10 + 3) = 99 \times 10 + 96 \times 3 = 960 + 96 \times 3$
>
> $54 \times 21 = 54(20 + 1) = 54 \times 20 + 54 \times 1 = 54 \times 2d. + 54$
>
> $73 \times 31 = 73(30 + 1) = 73 \times 30 + 73 \times 1 = 73 \times 3d. + 73$
>
> *Regla:*
>
> Si el uno está a la izquierda se añade al multiplicando el producto de éste por la otra cifra, corrido un lugar a la derecha; y si el uno está a la derecha se añade al multiplicando el producto de éste por la otra cifra, corrido un lugar a la izquierda[193].

Otras veces, por ejemplo, para multiplicar dos números acabados en 5, para obtener el cuadrado de dos números menores que 100, y otras operaciones derivadas de éstas, proporciona una justificación algebraica, basada en propiedades algebraicas, como las llamadas 'igualdades notables'. Hay que recordar que se trata de un libro dirigido a maestros o futuros maestros:

> *Producto de dos números acabados en 5*:
>
> (d+5)(d'+5) = dd' + 5d' + 5d + 25 = dd' + 5 (d+d'+5)
>
> Este desarrollo indica que para hallarlo *se agrega al producto de las decenas el de 5 por la suma de éstas con 5*[194].

Pero no solo se proponen técnicas de cálculo mental; algunas de las técnicas matemáticas que aparecen deben llamarse *técnicas de cálculo no algorítmico*, ya que permiten ejecutar operaciones sin recurrir a los algoritmos

[192]Las operaciones se hacen con números, sin letras, pero se van dejando indicadas, actuando exactamente igual que si se hicieran con letras. Esto permite generalizar los resultados. Sessa, Carmen: *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Libros del Zorzal, Buenos Aires (Argentina), 2006.

[193]Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 271.

[194]Ibídem, p. 275.

o técnicas convencionales habituales, pero es dudoso que puedan ejecutarse mentalmente. Es el caso de la técnica para multiplicar por 37, que utiliza ciertos productos interesantes o productos curiosos con este número (al multiplicar 37 por 3, 6, 9, 12, 15, ..., 27, se obtiene 111, 222, 333, 444, 555..., 999, respectivamente), para efectuar cálculos como éste:

$$37 \times 36 = 37 \times 12 \times 3 = 444 \times 3 = 1332$$[195]

Algo parecido se observa en el libro de Francisco Romero, en alguna de las técnicas que propone; por ejemplo, para multiplicar un número por 65 (agregar a la mitad del número la décima parte de esa mitad y la décima parte del número propuesto y multiplicar el resultado por 100)[196]. Aunque Romero (como veremos que hace también Eyaralar y al contrario que Sáiz Salvat) diferencia entre ambos tipos de cálculo e incluso los designa de distinto modo, cálculo 'mental' y cálculo 'rápido'. Sin embargo, la denominación 'calculo mental' era en ocasiones utilizada en un sentido amplio, para designar cualquier cálculo por técnicas diferentes de los algoritmos tradicionales.

En otra de sus obras, escrita en época posterior, dirigida igualmente a maestros o futuros maestros, una de las consecuencias que Sáiz Salvat atribuye a un uso acertado de las Matemáticas es «rapidez y exactitud del cálculo mental y escrito»[197]. Este mismo libro –la parte titulada Cálculo mental– contiene algunos ejemplos de juegos colectivos para el cálculo rápido (Cuadro de Jakson, Juego de las estrellas)[198]. Y entre las pautas que cita para dar una lección de matemáticas, la tercera dice: «No dejar de usar el cálculo mental en la Aritmética, ni el dibujo (esquemático y decorativo) en la Geometría»[199].

Esto choca con lo que hallamos en el primer libro de Aritmética para alumnos de primaria[200], en el que no menciona el cálculo mental en ninguna de las lecciones y, a pesar de que la mayor parte de ellas incluyen más de 200 ejercicios y problemas, no hay ninguno en el que se indique o se sugiera que se haga mentalmente. Tampoco los cuadernillos que publicó junto a Paluzie,

[195] Ibídem, pp. 276-277.
[196] Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., p. 115.
[197] Sáiz Salvat, *Geometría y ampliación...*, op. cit., p. IV.
[198] Ibídem, pp. XVIII-XIX.
[199] Ibídem, p. XXXII.
[200] Sáiz Salvat, *Aritmética experimental. Libro primero*, op. cit.

alguno de los cuales contiene hasta 127 operaciones o ejercicios, se menciona siquiera el cálculo mental ni se observa, igual que en el caso anterior, que los enunciados o las cantidades que intervienen estén pensadas para efectuar mentalmente las operaciones.

Una cosa son los libros escritos para maestros o para alumnos normalistas, en los que debe tener en cuenta las nuevas ideas en cuanto a las metodología de la matemática, y otra los libros para la escuela primaria, escritos probablemente siguiendo las pautas que imperaban en ese nivel educativo[201]. Vemos así la influencia de la *institución*, Escuela Primaria o Escuela Normal, a la hora de concretar las propuestas didácticas.

Margarita Comas incluye en su Aritmética, destinada al último grado de la escuela primaria, en la lección dedicada a cada una de las cuatro operaciones fundamentales, algunos comentarios sobre la conveniencia de disponer de técnicas para el cálculo rápido no escrito (mental). Incluso en el prólogo advierte de que el cálculo mental debe estar en todas las lecciones[202]; para ello propone a los alumnos modificar los números «de manera que sea el cálculo más rápido»[203]. Proporciona técnicas como: la descomposición polinómica de los números, la compensación, el apoyo en las operaciones con decenas o centenas netas, la invarianza de la resta al sumar o restar un mismo número al minuendo y al sustraendo, y de la división al multiplicar o dividir dividendo y divisor por un mismo número, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, la relación inversa entre la multiplicación y la división o expresar los números 5, 50, 500... como fracciones de numerador una potencia de 10, entre otras. De este modo da reglas para multiplicar un número por 21, 31, 41..., 9, 19, 29... (decenas netas más o menos uno), o para dividir por 0,1, 0,02, etc. Por ejemplo:

> Para multiplicar cantidades de dos cifras menores que 20, se añaden al multiplicando las unidades del multiplicador, se multiplica esta suma por 10 y al producto se une el de multiplicar entre sí las unidades.

[201] Esto mismo ya lo hemos señalado a propósito de la secuenciación en las operaciones y las relaciones entre ellas.

[202] Comas Camps, *Aritmética*, op. cit., p. 8.

[203] Ibídem, p. 61.

Ejemplo: $17 \times 16 = 230 + 42 = 272$[204]

No solo recomienda practicar el cálculo mental con números, sino que algunos de los problemas que incluye al final de cada tema, indica que se realicen mentalmente.

En cuanto a actividades o juegos colectivos para automatizar ciertos procedimientos de cálculo mental solo hallamos uno en su libro. Se trata de una rueda de números, que en su borde contiene números de dos cifras con el mismo número de unidades y en el interior números de una cifra. El niño ha de sumar un número del interior sucesivamente a todos los del exterior para ejercitarse en alguna técnica de cálculo mental en cada caso; por ejemplo: 9+5, 9+15, 9+25..., 6+5, 6+15, 6+25... Para la resta propone algo similar; en este caso poniendo en el exterior números acabados igual y en el interior también números acabados igual, como 9, 19, 29, 39... fuera y 2, 12, 22, 32... dentro[205] (figura 3.29, p. 227).

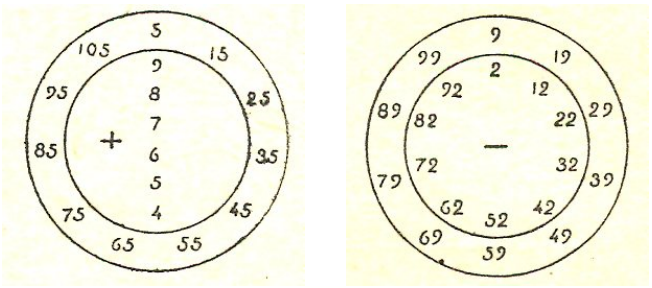


Figura 3.29: Comas. Ruedas de números

Nelson recoge en su libro ruedas similares para la suma y también para la multiplicación[206].

Luis Paunero destaca del cálculo mental la capacidad de atraer a los alumnos por sus aplicaciones y por la diversidad de procedimientos, contra la rutina que supone el cálculo mecanizado[207]. Otras de las ventajas del cálculo mental que señala son la rapidez y la seguridad y propone, en lugar

[204]Ibídem, p. 84.
[205]Ibídem, pp. 57, 71.
[206]Nelson, *Aritmética inventiva*, op. cit., pp. 21 y 48.
[207]Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., cap. III, cap. IX.

de propiedades, aprender de memoria ciertos resultados: dobles, triples y cuádruplos de números cuyos resultados lleguen hasta 100, inversamente, mitades, tercios y cuartos de los 100 primeros números y complementos de los números hasta el 10 y hasta el 100. En cuanto a la elección de los ejercicios y los métodos para trabajar en la escuela primaria el cálculo mental, remite a la bibliografía; el único que explica es el de Tabereau, de «La Martiniére»[208].

Este *dispositivo* para el trabajo colectivo del cálculo mental no alude a ninguna técnica matemática de cálculo mental, sino que forma parte de una *técnica didáctica* citada por varios autores. Francisco Romero lo considera el más adecuado para la práctica colectiva del cálculo mental por toda la clase. Consiste en que el maestro lanza un problema o ejercicio a la clase y, cuando él lo indique, cada niño escribe la respuesta en su pizarra individual, cuidando de que no sea vista por ningún otro y, a una segunda señal del maestro, levantan todos las pizarras para que el maestro pueda comprobar las respuestas. Recomienda que el maestro se interese por el procedimiento seguido por los niños para calcular y proponga procedimientos alternativos a otros menos eficaces[209]. Este método es citado también por Sáiz Salvat[210] y por Eyaralar[211], quien le atribuye ventajas como la simultaneidad y agilidad en los ejercicios y en la percepción del resultado, posibilidad de corrección como si fuese individual y conocimiento inmediato de los alumnos sobre sus aciertos o fallos.

En general la razón a la que aluden casi todos los profesores para resaltar la importancia del cálculo mental es la rapidez o la comodidad, al evitar tener que recurrir a la escritura y a la ejecución de las técnicas de cálculo ordinarias, así como el valor educativo en general del cálculo. Pero en algunos casos la justificación va más allá. **Margarita Comas** opina que:

> *Como para realizar bien las operaciones no hay más secreto que el tener una representación clara de la composición decimal de los*

[208]Eyaralar, durante su estancia con la beca de la JAE, buscó referencias a este método y halló su origen en la obra «Exposée de la méthode Tabereau, fondée à l'Ecole de la Martinière, pour l'enseignement préparatoire des Mathématiques». Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 19. El autor comenta esta técnica y analiza lo que sería la tecnología didáctica asociada.

[209]Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., pp. 24-25.

[210]Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 178.

[211]Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 370-371.

números, creemos es muy útil hacer, al principio sobre todo, numerosas sumas y restas mentales a base del cuadro[212] [figura 3.30, p. 229].

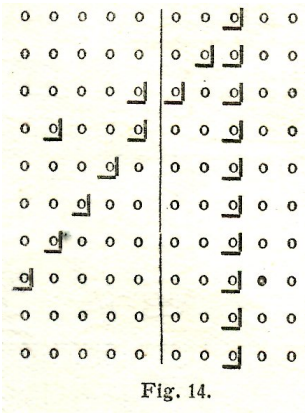

Fig. 14.

Figura 3.30: Comas. Cuadro de descomposición de números

Propone disponer de este dispositivo material en tamaño mural en la clase y también tenga uno pequeño cada niño, con cada fila de un color, para recurrir a él una vez que dejan de operar con objetos materiales.

José María Eyaralar enumera, en un artículo anterior a la *Metodología*, la razones por las que es útil el cálculo mental en la escuela, más allá de su utilidad práctica –lo cual es algo normal si tenemos en cuenta la época–: habitúa a cierta reflexión; facilita el automatismo mental; hace placentera la enseñanza al notar el alumno cómo aumenta en rapidez de cálculo; y se presta a realizar actividades colectivas que sirvan de estímulo, tanto competiciones entre alumnos como de la clase consigo misma[213]. No obstante, reconoce el descuido de la enseñanza primaria por el cálculo mental.

Más tarde, al escribir la *Metodología*, alude a razones ya mencionadas por él y por el resto de profesores estudiados, pero también apunta algunos otros motivos interesantes para justificar el papel del cálculo mental: combate la enseñanza basada en la adquisición de automatismos y favorece la 'invención', debido al carácter personal de los métodos de cálculo mental:

[212] Comas Camps, *Metodología...*, p. 24. El destacado el nuestro.

[213] Eyaralar Almazán, José María: «El cálculo mental». *Revista de Escuelas Normales*, 1928, **50**, pp. 18–19.

> Interesante por la disminución de esfuerzo que supone, lo es aún más por mostrar la aplicación de las teorías matemáticas al carácter de *arte* que hemos señalado a esta ciencia, y por prestarse a la invención por parte del alumno, neutralizando los efectos del automatismo[214].

Pero además cita una característica importante: es la base del cálculo «pensado», lo que relaciona cálculo mental y otros tipos de cálculo. De hecho propone que los ejercicios de comprensión para cada lección sean, en la parte numérica, de cálculo mental[215].

En el caso de las Normales, destaca además las siguientes razones: mostrar la aplicación de las propiedades de las operaciones, en particular de la distributiva, «hacer notar la constitución del número y su trascendencia»[216], y hacer ejercicios de observación, interpretación y generalización.

Quizá la concepción que tenía Eyaralar del cálculo rápido y, en particular, del cálculo mental, no solo como instrumento útil para resolver problemas sino, y de una manera muy especial, como instrumento [técnica] didáctico para la comprensión de la estructura del sistema de numeración y de las propias operaciones y sus propiedades, le lleva a dedicarle bastante atención en sus *Aritméticas*, aunque sin caer en la inclusión de técnicas que, por la complejidad de su ejecución (criterio de *economía*[217]) o por la escasa *aplicabilidad*, son de dudosa utilidad práctica y tienen poco interés didáctico. Por ello en sus libros de *Aritmética* para la formación de maestros no insiste, como hacen en ocasiones Sáiz Salvat o Romero, en mostrar técnicas de cálculo cuya ejecución no supone ventaja prácticamente respecto de los algoritmos tradicionales o de otras técnicas; tampoco lo hace en la *Metodología* al proponer un programa de cálculo mental para la escuela primaria[218]. Más que un intento de mostrar una exhaustiva colección de procedimientos, selecciona aquéllos que aúnan interés didáctico, en cuanto que hacen intervenir propiedades de las operaciones, con facilidad o rapidez de ejecución, lo que en la práctica lleva a su uso. Por ejemplo, sugiere obtener, a partir de la regla para multiplicar

[214] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 367.
[215] Ibídem, op. cit., p. 370.
[216] Eyaralar Almazán, *El cálculo mental*, op. cit., cita en p. 18.
[217] Sierra Delgado, Bosch Casabó y Gascón Pérez, *El cuestionamiento...*, op. cit.
[218] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 371.

un número por 9, la correspondiente para multiplicar por 99, 999, etc.[219] Recomienda proponer para calcular mentalmente las mismas operaciones que hayan servido de ejemplo para el 'cálculo rápido' o 'cálculo pensado', con números más pequeños.

Al contrario que Sáiz Salvat, por ejemplo, todas las justificaciones de las técnicas de cálculo mental que hay en sus dos libros de aritmética para futuros maestros se justifican mediante ejemplos genéricos, que conservan la traza de las operaciones, en lugar de recurrir a complicadas y a veces engorrosas demostraciones algebraicas.

Conviene señalar que el tratamiento de estas *técnicas matemáticas* de cálculo mental en la Normal constituye para Eyaralar una *técnica didáctica* que, a su vez tiene, respecto a las propiedades del sistema de numeración y de las operaciones, una función *tecnológica*, en tanto que en la comprensión y la justificación de las técnicas se hallan implicadas dichas propiedades. Eyaralar explicita elementos de la *tecnología didáctica* cuando se refiere no solo a la práctica de las técnicas: «*la explicación y la práctica* de este ejercicio constituye un medio excelente para repasar la constitución de los números y las propiedades del producto de los diferentes órdenes»[220]. En su última obra de *Aritmética* dirigida a alumnos normalistas y a maestros, reivindica la importancia del cálculo mental no solo por su utilidad propia sino, entre otras cosas, por «la aplicación que supone de propiedades que si no aparecen como inútiles»[221].

3.4.3. El aprendizaje de los algoritmos

La automatización del cálculo se completa con el aprendizaje de los algoritmos habituales. Analizar el tratamiento que dan a los algoritmos estos profesores involucrados en la formación de maestros contribuye a entender la función que asignaban no solo a estos algoritmos como técnica de realización de operaciones, sino a las técnicas en general, lo que influirá en la presentación de varios algoritmos para una misma operación. Veremos cómo la presentación a los futuros maestros y el análisis de diversos algoritmos

[219] Ibídem, p. 29.

[220] Eyaralar Almazán, *El cálculo mental*, op. cit., p. 19. La cursiva es nuestra.

[221] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 7.

para multiplicar y dividir, diferentes de los habituales, por parte de algunos profesores, como Romero y Eyaralar, ayuda a poner de manifiesto cómo las técnicas van asociadas a propiedades de las operaciones. Además, la justificación de la validez de las técnicas, y la investigación sobre las ventajas y los límites de su uso, están relacionadas con la validación, aspecto que es característico del trabajo matemático.

Una muestra de la preocupación por los algoritmos estándares de cálculo en aquel momento es la presencia en la *Revista de Escuelas Normales* de un artículo de **Daniel Carretero**, en el que explica cómo justifica el algoritmo de la multiplicación a sus alumnos normalistas. En cualquier caso, la justificación que da es incompleta: el caso de multiplicador de una cifra dice justificarlo «sumando consigo mismo el multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador, suma breve puesto que el multiplicador es un número de una cifra»[222], lo que precisamente no supone aplicar el algoritmo para ese caso, y sobre la técnica, no demostrada, de la multiplicación con el multiplicando de varias cifras y el multiplicador de una cifra, basa la de la multiplicación general.

Al igual que ya dijimos al analizar el tratamiento que hacía Eyaralar de las operaciones, en el caso de los alumnos normalistas, los autores se centran en una reflexión *tecnológico-teórica* sobre unos algoritmos que son conocidos de antemano. Sin embargo, cuando se trata de la enseñanza primaria el énfasis está en las tareas que se proponen para construir las técnicas operatorias habituales. En este caso, los libros muestran la construcción progresiva de las técnicas, a partir de tareas cuya función es la de dar lugar a algo comparable, en cierto modo, a un *momento del primer encuentro*. A partir de aquí se van construyendo técnicas, que se van modificando y ampliando, ganando en generalidad, hasta derivar en las usuales. Este proceso se puede observar, lección a lección, en el libro de **Charentón** destinado al grado elemental[223], en el que los alumnos se enfrentan, ahora sí por primera vez, con los algoritmos.

Tomando como ejemplo el caso de la multiplicación, este autor dedica, tras la introducción de la operación y de las multiplicaciones contenidas en la

[222] Carretero Riosalido, Daniel: «Una lección de Aritmética. Multiplicación de enteros». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **27**, p. 252.

[223] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op.cit.

tabla, una lección a la multiplicación cuando el multiplicador es un número de una cifra; se justifica la técnica argumentando que sumar varias veces un número supone sumar esas mismas veces cada orden de unidades, luego solo queda ir agrupando si los productos parciales son mayores que 9. La lección siguiente, que lleva por título «Multiplicación de un número por 10, 100, 1000»[224], se dedica a la técnica de multiplicar por potencias de 10, apoyándose en conversiones en el sistema métrico decimal, que ha ido introduciendo al tiempo que la numeración y las operaciones; en particular asocia multiplicar por 10 con sumar decenas en vez de unidades. Siguen las multiplicaciones por una cifra seguida de ceros y luego el caso general, aunque las multiplicaciones en las que el multiplicador tiene ceros intermedios las trata en una última lección, como caso particular de la técnica general.

También **Comas**, en su Aritmética, trata primero las multiplicaciones contenidas en la tabla, después aquéllas en las que el multiplicador tiene una sola cifra, luego multiplicaciones por un número (no necesariamente la unidad) acabado en cero, sin pasar por la multiplicación por la unidad seguida de ceros «puesto que multiplicar por 10 es convertir las unidades en decenas, las decenas en centenas, etc.»[225] y, por último, el caso general. Hay que mencionar que, en cualquier caso, esta profesora no aborda en sus libros de metodología el aprendizaje de los algoritmos habituales de cálculo; tan solo tenemos su libro de aritmética escrito para la escuela primaria, que va dirigido al tercer ciclo, cuando se suponen conocidas estas técnicas y se trata de incidir en ellas y en su extensión a otros campos numéricos.

Eyaralar sugiere hacer multiplicaciones de un número de varias cifras por 5, 2, 3 o 4, en este orden, antes de usar las demás cifras, ya que los productos por 5 son decenas netas o tienen 5 unidades, lo que facilita las llevadas. También propone hacer ejercicios de la forma «4 x 6 + 2», antes de multiplicaciones con llevadas[226]. Para la multiplicación plantea la siguiente gradación, para que los niños obtengan ellos mismos las reglas:

> Ejercicios: ¿Cuánto valen 10 libros a 5 pesetas cada uno? ¿Y 10

[224] Ibídem, p. 207.
[225] Comas Camps, *Aritmética*, op. cit., p. 76.
[226] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 213.

> sombreros a 15 pesetas? ¿Cómo se multiplica un número por 10? ¿Cómo se multiplicará un número por 100?
>
> Efectuar 345×20, 346×200, 164×30, 164×300.
>
> Efectuar 247×5 *y* 247×30. Obtener 247×35 utilizando los productos anteriores.
>
> Efectuar 246×4; 246×30; 246×2. Obtener 246×234 utilizando los productos anteriores[227].

Vemos que, aunque parte de situaciones o de problemas concretos para la comprensión de las operaciones y de las diferentes definiciones o conceptos de cada una de ellas, no se mantiene de la misma manera en el plano de lo 'real' en lo que se refiere a la construcción y la justificación de las técnicas de cálculo. En este caso, aunque proponga el empleo de materiales, o su representación gráfica, para justificar los algoritmos, las *tareas* que motivan su construcción no vienen formuladas a partir de situaciones contextualizadas, sino que se plantea directamente hallar el resultado de la operación.

Si comparamos, por ejemplo, con Margarita Comas[228], ésta parte de un problema contextualizado, que motiva el cálculo del resultado de la operación de que se trate, pero una vez determinado qué operación hay que efectuar, no hay ninguna referencia a la situación de partida, hasta que finalmente se interpreta el resultado de la operación realizada. Charentón, que explica cada técnica y sus ampliaciones siempre a partir de un problema, en unos casos, sobre todo en las técnicas de multiplicar y en algunos casos en la de dividir, no deja de referirse a 'paquetes' o 'monedas', mientras que en otros casos también abandona la referencia a lo real –habla de centenas, decenas, etc.– hasta la interpretación del resultado.

Eyaralar justifica su postura, declarando que se sitúa en un terreno ecléctico entre la didáctica americana y la europea:

> Aquella, más moderna, tiende a dar mediante el juego los conceptos de las operaciones, y numéricamente, la justificación de su mecanismo, ya que la tendencia dominante parece ser que las operaciones numéricas parten de *hechos que tienen significación*, también se *interpretan*

[227] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 201.
[228] Comas Camps, *Aritmética*, op. cit.

> sus resultados, pero sin que la operación en sí la tenga. [...] La Didáctica europea, por el contrario, se aferra en cuanto puede al concepto concreto de los números, y a base de ellos estudia las definiciones y justifica los mecanismos[229].

Pone el ejemplo de multiplicaciones en las que el multiplicando y el producto no son de la misma especie, como el de un pastor que tiene 4 ovejas por cada cabra y tiene 32 cabras y el número de ovejas es el resultado de la operación $32 \times 4 = 128$, operación difícil de interpretar si nos empeñamos en no ignorar lo que representan, en el plano de la realidad, los números que intervienen. Se pone de manifiesto, una vez más, una reflexión epistemológica sobre la naturaleza de la matemática y la relación entre los objetos que maneja y aquéllos del mundo real, más profunda en Eyaralar que en otros profesores de Escuela Normal de su época.

El interés por la comprensión de los algoritmos habituales de cálculo lleva a varios de los profesores a recomendar el uso de representaciones *analógicas*[230] de las unidades de cada orden para comprender los algoritmos de suma y resta. Se utilizan los mismos símbolos inventados para representar las unidades de cada orden; un ejemplo de **Charentón**[231] está en la figura 3.31 (p. 235).

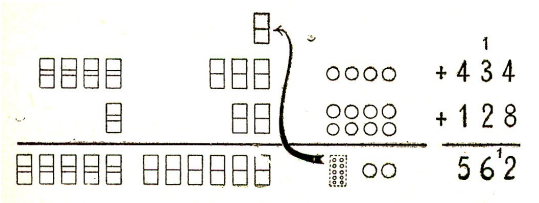


Figura 3.31: Charentón. Representación analógica para el algoritmo de la suma

Eyaralar propone algo parecido[232], aunque utilizando los mismos símbolos que había visto usar durante su estancia en Francia, y que recoge en la

[229] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 228-229.

[230] Señal analógica es «la que reproduce el valor de la magnitud que se desea transmitir». Diccionario RAE. www.rae.es. [Consulta realizada el 11/07/2015].

[231] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 123.

[232] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 204.

Memoria[233](figura 3.32, p. 236).

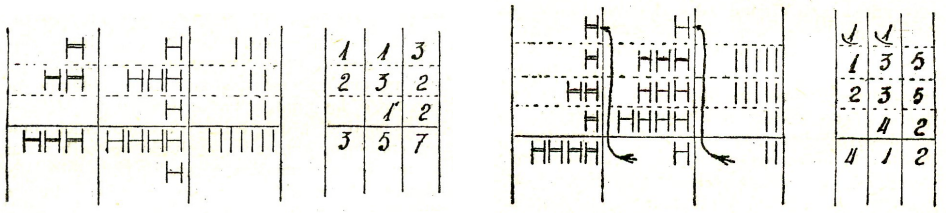


Figura 3.32: Eyaralar. Representación analógica para el algoritmo

Otras representaciones muestran los números que intervienen y el resultado final pero no el proceso. Por ejemplo, **Sáiz Salvat** representa así la suma 26+8[234] (figura 3.33, p. 236).

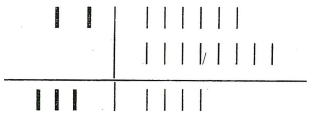


Figura 3.33: Saiz Salvat. Representación del algoritmo de la suma

Entre los profesores de Escuela Normal que abordan el problema de la introducción de los algoritmos clásicos, Charentón, Comas y Eyaralar plantean un aprendizaje de los algoritmos que permita su comprensión –en algunos casos su construcción– a partir de la estructura del sistema de numeración decimal (principio del agrupamiento y carácter posicional) y de la operación en sí.

Las variables que gestiona el profesor y que motivan la necesidad de ir ampliando progresivamente las técnicas son las cifras –cantidad, presencia de ceros– de los números implicados, que junto a la comprensión del principio posicional harán intervenir, aunque sea implícitamente, propiedades de las operaciones (como la asociativa cuando el multiplicador acaba en cero y la distributiva, en el caso de la multiplicación) y la existencia o no de llevadas.

Saiz Salvat presenta una enseñanza graduada y razonada de los algoritmos, aunque con algunas diferencias respecto de los anteriores ya que, en el caso general de productos de dos números, ambos de varias cifras, efectúa la

[233]Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 21.
[234]Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 205.

descomposición polinómica del multiplicando, en lugar del multiplicador, y para calcular cuánto es 46 considerado 23 veces, hace 23 veces 4 'haces' y 23 veces 6 'palillos'. No obstante, volvemos a observar en este profesor normalista una falta de correlación entre lo que propone en su obra de Didáctica[235] y lo que vemos en su libro para la escuela primaria, en el que el algoritmo de multiplicar, en particular, se presenta graduado desde el caso mas sencillo al caso general, pero sin razonamiento alguno. Parte de que los niños ya saben ejecutar el algoritmo y plantea la realización de varias multiplicaciones para, a continuación, enumerar las operaciones realizadas e institucionalizar el procedimiento, que no se justifica. En cualquier caso, el tratamiento de los algoritmos en la *Aritmética* de Sáiz Salvat parece responder más al intento de exponer sistemáticamente los procedimientos –tal como era costumbre entonces en los libros para bachillerato[236]– que a buscar la comprensión de los alumnos de primaria.

Podemos decir que en la Escuela Normal, en general, se plantea una enseñanza que contempla el análisis matemático de los algoritmos habituales, prestando atención a los aspectos tecnológico-teóricos, como la justificación de cada una de las técnicas y las propiedades involucradas. Esto se extiende a la prueba de las operaciones. Tras presentar la llamada 'prueba del 9', para la multiplicación, Romero aclara:

> Esta prueba [la llamada 'prueba del 9'] es más rápida que la corriente, pero no hay que olvidar que todo guarismo del sistema decimal está formado por repeticiones del 9 mas el valor absoluto de las cifras de dicho guarismo, lo que nos indica que si al operar nos equivocamos en 9 o en un múltiplo de 9, la prueba puede resultar bien y la operación estar mal[237].

Eyaralar por su parte, no solo hace la observación de que la prueba es condición necesaria pero no suficiente para que la operación esté bien hecha,

[235] Ibídem, Didáctica, cap. XII y XIII.

[236] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de aritmética*, op. cit.

Xiberta Roqueta, *Elementos de Aritmética*, op. cit. Primera edición en 1928.

Sánchez Pérez, José Augusto: *Tratado de Aritmética*. Tip. Sucesor de J. Peláez, Toledo, 1922. Primera edición en 1914.

[237] Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., p. 140.

sino que además la justifica en sus dos libros de aritmética[238]. La importancia que confiere en la formación de los maestros a las *tecnologías de las técnicas* se pone de manifiesto en ejercicios como éste: «Multiplicando 843 por 2006 se obtienen dos productos parciales. Se ha colocado el segundo como si fueran centenas. ¿Acusa este error la prueba por 9?»[239]. Es más, la prueba del 9 no aparece en el capítulo dedicado a la multiplicación, como un medio de comprobar si el resultado es correcto, sino en el dedicado a la divisibilidad, y por el tratamiento que recibe, teniendo en cuenta también los ejercicios, con una función no solo de herramienta para verificar una técnica.

La consideración de los algoritmos como objeto de aprendizaje, en contraposición a la aplicación automática de las técnicas de cálculo, lleva a algunos de estos profesores a proponer algoritmos alternativos que, aunque se presentan a veces como técnicas de cálculo rápido, se acompañan de comentarios que son signo de que su estatus va más allá de ser un procedimiento para realizar una tarea y se acerca a ser un procedimiento cuyo funcionamiento y validez son objeto de estudio en sí mismo.

En la *Revista de Escuelas Normales*, Eyaralar añade y justifica algunas técnicas de cálculo mental, a las contenidas en su *Nuevo Tratado de Aritmética*. Una de ellas, que ya aparecía en su primer libro de aritmética[240], es una técnica general para multiplicar dos números de varias cifras[241] (figura 3.34, p. 239).

Tras otro ejemplo, esta vez con dos números de tres cifras (figura 3.35, p. 239), insiste en la utilidad de esta técnica para comprender la estructura de nuestro sistema de numeración y la propiedad distributiva, a los que alude. Y añade: «Puede observarse que la explicación y la práctica de este ejercicio constituye un medio excelente para repasar la constitución de los números y las propiedades del producto de las unidades de los diferentes órdenes»[242].

[238] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., pp. 208-209, 211. *Aritmética Intuitiva*, op. cit., pp. 142-143.
[239] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 249. *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 147.
[240] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., pp. 75-76.
[241] Eyaralar Almazán, *El cálculo mental*, op. cit., p. 19.
[242] Ibídem, p. 19.

Multiplicación de números de dos cifras.- Sea 52 x 37.
Considerando el adjunto esquema veremos que las unidades del producto se obtienen multiplicando las cifras unidas por las líneas de puntos, las decenas, vienen indicadas por las líneas de trazos y las centenas por la línea llena. El grado inmediato es prescindir de las líneas; y el siguiente multiplicar los dos números colocados uno a continuación del otro

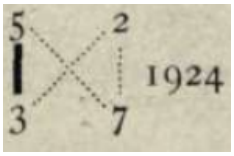


Figura 3.34: Eyaralar. Procedimiento de multiplicación mental (1)

Considerando el adjunto esquema, notaremos que las unidades de los tres primeros órdenes vienen dados [sic] por el mismo convenio que en el caso anterior; los millares vienen indicados por las líneas de trazo y punto, y las decenas de millar por la línea gruesa

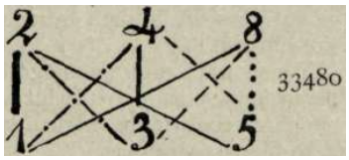


Figura 3.35: Eyaralar. Procedimiento de multiplicación mental (2)

Se trata de la técnica de la 'multiplicación condensada', descrita más tarde por **Francisco Romero**, quien recomienda que los alumnos se ejerciten en este tipo de multiplicación con factores de pocas cifras como gimnasia intelectual, aunque la disposición esquemática de Eyaralar la hace más *económica*. En general, puede considerarse un algoritmo alternativo (Eyaralar incluye este ejemplo en el epígrafe dedicado al cálculo rápido y señala que los productos y las sumas se hacen mentalmente), y al tratarse de números con menos cifras puede utilizarse como técnica de cálculo mental. Romero igualmente hace hincapié en «llevar al convencimiento de los alumnos que en la multiplicación lo fundamental es multiplicar todo el multiplicador por todo el multiplicando, y que el producto total no es más que la suma de los productos parciales»[243].

Otras veces los procedimientos de cálculo escrito distintos a los habituales que presenta este último autor, tienen por único objeto facilitar el cálculo. Como ejemplo podemos citar el de los 'complementos aritméticos' para efectuar sumas y resta combinadas: la operación 432 – 85 – 124 + 27 + 2615 – 259 + 16 + 452 – 67, se haría colocando los números así y sumando normalmente, salvo los unos con la raya –corresponden a los números que son

[243] Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., pp. 135.

complemento aritmético de los que van restando–, que se restan[244]:

$$\begin{array}{r} 432 \\ 27 \\ 2615 \\ 16 \\ 452 \\ \bar{1}15 \\ \bar{1}876 \\ \bar{1}471 \\ \bar{1}33 \\ \hline 2737 \end{array}$$

Este algoritmo permite transformar una cadena de operaciones en la que hay sumas y restas en una suma de varios sumandos. En este caso se presenta sin justificar ni proponer al lector su justificación.

En el caso de la multiplicación, propone dos técnicas alternativas: la que llama 'procedimiento condensado'[245], o multiplicación condensada, y la que denomina 'multiplicación desordenada'[246]. El siguiente ejemplo corresponde a ésta última (figura 3.36, p. 242).

Romero los considera procedimientos complementarios del habitual e indica que conviene enseñarlos una vez que el algoritmo tradicional se domine con agilidad.

La razón de ser de estos procedimientos alternativos de cálculo es doble. Por un lado les asigna fines utilitarios y, en general, educativos (rapidez y facilidad, gimnasia intelectual y seguridad); pero junto a esta finalidad o interés intrínseco de los algoritmos alternativos, está el fin declarado de que los alumnos entiendan *la tecnología de la técnica* habitual. Refiriéndose en concreto a la multiplicación desordenada, técnica que desde el punto de vista de la 'eficacia' o 'rapidez' no sería recomendable –por su falta de *economía*–, aclara:

[244]Ibídem, p. 79.
[245]Ibídem, pp. 135-138.
[246]Ibídem, pp. 138-139.

> Conviene dar a los alumnos esta nueva forma de multiplicar, *no porque en la práctica tenga ventaja alguna sobre las anteriores*, sino como una prueba más de que lo esencial en la multiplicación es multiplicar todo el multiplicador por todo el multiplicando y que el producto total es igual a la suma de los productillos[247].

En este comentario, como en los que hemos reproducido de Eyaralar, se muestran elementos de la *tecnología didáctica* de la técnica didáctica consistente en utilizar en la enseñanza elemental estas técnicas con fines tecnológicos respecto de las técnicas matemáticas habituales[248]. El análisis matemático tiene así una finalidad didáctica, en tanto que permite realizar algunas reflexiones sobre la planificación de la enseñanza de los algoritmos de cálculo en los niveles elementales, y por ello era relevante –y lo es hoy día[249]– que se tuviera en cuenta en la formación de futuros maestros.

[247] Ibídem, p. 139. La cursiva es nuestra.

[248] Basta comparar con Sáiz Salvat, quien recoge la técnica árabe para multiplicar, la que conocemos habitualmente como «de la celosía», en el apartado sobre la historia de la matemática, pero en ningún caso propone su posible utilización con fines didácticos. Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., pp. 98-99.

[249] Sánchez Jiménez, Encarna; Olivares Carrillo, Pilar y Cantero Tomás, Ángel: «Comparación de algoritmos para multiplicar y dividir: Análisis tecnológico-teórico». En: Javier Maquilón y Noelia Orcajada (Eds.), *Investigación e innovación en formación del profesorado*, pp. 381–392. Universidad de Murcia, Murcia, 2014.

Sierra Delgado, Bosch Casabó y Gascón Pérez, *El cuestionamiento...*, op. cit.

Procedimiento desordenado

5432 ×
234 =

400
6000
80000
1000000
150000
12000
900
60
8
120
1600
20000

1271088

Proced miento ordin rio

5432 ×
234 =

21728
16296
10864

1271088

Multiplicación condensada

5432 ×
234 =

1271088

	Multiplicador	Multiplicando	Productillos
1.°)	2 unidades de 3.° orden	× 2 de 1.° orden	dan 4 de 3.° orden
2.°)	2 — — 3.° —	× 3 — 2.° —	— 6 — 4.° —
3.°)	2 — — 3.° —	× 4 — 3.° —	— 8 — 5.° —
4.°)	2 — — 3.° —	× 5 — 4.° —	— 10 — 6.° —
5.°)	3 — — 2.° —	× 5 — 4.° —	— 15 — 5.° —
6.°)	3 — — 2.° —	× 4 — 3.° —	— 12 — 4.° —
7.°)	3 — — 2.° —	× 3 — 2.° —	— 9 — 3.° —
8.°)	3 — — 2.° —	× 2 — 1.° —	— 6 — 2.° —
9.°)	4 — — 1.° —	× 2 — 1.° —	— 8 — 1.° —
10.°)	4 — — 1.° —	× 3 — 2.° —	— 12 — 2.° —
11.°)	4 — — 1.° —	× 4 — 3.° —	— 16 — 3.° —
12.°)	4 — — 1.° —	× 5 — 4.° —	— 20 — 4.° —

Figura 3.36: Romero. Multiplicación desordenada

Capítulo 4

Las matemáticas en el Plan de 1914. Geometría y Álgebra

4.1. La enseñanza de la Geometría

En este apartado nos proponemos determinar la orientación que tenía la enseñanza de la geometría y el papel que podía desempeñar tanto en la formación de los alumnos de educación primaria, como en la de los maestros, en especial en su formación matemática. Utilizaremos las ideas que sobre la enseñanza de la Geometría tenían los profesores de Escuela Normal que lideraban la renovación pedagógica en el ámbito de las Matemáticas. Nos referiremos a varios aspectos: los contenidos de geometría que deben formar parte del programa escolar –y de la formación de los maestros–, así como la orientación que ha de darse a esta enseñanza y el modo de organizarla, pero también la importancia que le confieren a esta disciplina en el marco de la educación matemática y la relación que ha de tener con otras partes de la matemática, con el resto de disciplinas escolares y con la vida, entre otros.

Este estudio se completará en otros capítulos; así, en el capítulo 8 se tratan algunas cuestiones relativas a la definición y a la validación de propiedades, y se comentan varios ejemplos sobre los objetos y propiedades de la Geometría. En este capítulo aludiremos, ocasionalmente, a estos temas.

4.1.1. El programa de Geometría. Relación con otras materias

Son varios los profesores que reclaman una atención más destacada a la Geometría en la enseñanza primaria, donde la Aritmética ha sido tradicionalmente la parte que ha acaparado el interés. Tal como señala Margarita Comas, «por un criterio estrechamente utilitario se halla aquélla [la geometría] un poco abandonada en gran parte de nuestras escuelas, que dedica [sic] a su compañera el mayor tiempo posible»[1]. Felipe Sáiz Salvat se lamenta de ello: «¿Por qué en las escuelas españolas se aprieta más en Aritmética que en Geometría? ¿Es que no es tan importante conocer el espacio como el tiempo?»[2]. Esta reivindicación se basa en razones de tipo práctico –aplicación al resto de las ciencias y a los oficios[3]–, pero también de tipo educativo:

> La Geometría, formada antes que la Aritmética, más intuitiva que ella, más variada y práctica, prestándose más a todas las modalidades el razonamiento y de la resolución de problemas, dando a conocer relaciones tan importantes como las espaciales, debería ser cultivada en la Escuela Primaria por lo menos en pie de igualdad con la Aritmética[4].

José María Eyaralar cree que la relación entre la geometría y la aritmética «debe ser tan íntima que sólo constituya una sola ciencia, como ya se hace en los mejores centros de enseñanza secundaria del extranjero»[5]. Igualmente Aurelio Rodríguez Charentón propone que la aritmética y la geometría no se traten como disciplinas separadas, sino conjuntamente, y así lo recoge en las *Lecciones de Cálculo*, al afirmar:

[1] Comas Camps, Margarita: *Metodología de la Aritmética y la Geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1932, p. 6.

[2] Sáiz Salvat, Felipe: «Programas escolares. Aritmética, Geometría y Trabajo manual, por Félix Martí Alpera». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **27**, pp. 259–260, p. 260.

[3] Eyaralar Almazán, José María: *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría. Normas para su planteo y resolución*. Sardá, Guadalajara, 1936, p. 85.

[4] Eyaralar Almazán, José María: *Metodología de la Matemática*. Reus, Madrid, 1933, p. 231.

[5] Eyaralar Almazán, José María: *Conferencia sobre Aritmética Objetiva, dada en el Museo del Pedagógico Provincial de Baleares, el 10 de mayo de 1925*. Imp. de Guasp, Palma de Mallorca, 1925.

> Cantidades y formas son para él [niño] cosas familiares que se le aparecen fundidas íntimamente en la experiencia vivida.
>
> Hay otro hecho cierto: la escuela tradicional se encarga de romper la unidad de su cultura. Desde que el niño pise la escuela (...) aquella maravillosa fusión de números y líneas (...) se resolverá en direcciones cada día más divergentes: Aritmética, Geometría, dibujo, trabajo manual...[6]

En coherencia con este principio, organiza los dos libros para la enseñanza del cálculo intercalando lecciones de aritmética con otras de geometría.

Para Margarita Comas, en la escuela primaria es mejor elegir un problema práctico interesante para los alumnos y en torno a él agrupar unas cuantas cuestiones; de ahí el interés de estudiar la geometría íntimamente ligada al dibujo y los trabajos manuales, y a otras materias como la geografía, la historia, el arte, la física, etc.:

> Siempre que se pueda, es útil aplicar las ideas de Geometría al levantamiento de planos, cálculo de distancias inaccesibles, etc., aun a expensas de la adquisición de otros conocimientos teóricos; las clases de Geografía y de Ciencias saldrán ganando, y también, sobre todo, la mente del alumno[7].

Nos ocuparemos al final de este apartado de la relación entre la geometría y el dibujo; en cuanto al trabajo manual y el uso de materiales, la referencia al material es incidental y en la medida en que sea necesario para aclarar aspectos sobre la cuestión; otros aspectos generales se tratarán en un apartado específico sobre material, la sección 7.2 (pp. 453 y sig.).

Se insiste en la época en la relación entre la geometría y la geografía, en particular el trabajo con planos y mapas, al que Eyaralar le asigna un valor práctico por su utilidad en la vida corriente, el valor que llama 'de relación', ya que es un conocimiento necesario para la geografía, y un valor educativo, puesto que permite utilizar conocimientos aritméticos y geométricos para resolver cuestiones que sobre la realidad sería mucho más complejo

[6] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado elemental. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?, pp. 7-8.

[7] Comas Camps, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría.* Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 5.ª edición, 1932, p. 23.

resolver[8]. Incluso propone varios problemas relativos a lugares geométricos a partir de un plano: «Hallar sobre el plano de una ciudad, los puntos equidistantes de dos puntos importantes [...] ¿Cómo quedan distribuidos los puntos restantes?»[9].

Precisamente el trabajo con planos y mapas es habitual en *Topografía*. El planteamiento de cuestiones y problemas relacionados con la topografía y con la agrimensura se consideraba importante por su utilidad real, ya que acercaba las matemáticas a la vida y a los oficios, sobre todo en la escuela rural. Por ello es normal que, en los libros de geometría, se le prestase atención[10]. Paunero afirma que el estudio de la geometría debe ir en íntima conexión con el de la aritmética y enfocado hacia la agrimensura[11]. Se valoraba también que fomentara el trabajo en equipo, al que confiere carácter de necesidad, y que la enseñanza tuviese una orientación más espacial. Incluso hay ciertos conocimientos geométricos que encuentran en la agrimensura su razón de ser, puesto que en el terreno es habitual que algunas longitudes no puedan medirse directamente; por ejemplo, puede ser más interesante la *fórmula de Herón*[12] que las típicas de área del triángulo, y cobran más sentido los problemas que plantean el cálculo de distancias inaccesibles[13].

En definitiva, el cambio de contexto –real o no– va a influir en los conocimientos enseñados (*tipos de tareas, técnicas matemáticas*): pero también en el material utilizado en geometría (sección 7.2.2, pp. 460 y sig.). Eyaralar plantea problemas de agrimensura en el *Nuevo Tratado de Geometría* («problemas sobre el terreno») y en *Didáctica de los Problemas de Aritmética y Geometría*.

[8] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 391.

[9] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 128.

[10] Xiberta escribió una obra en la que dedica una parte a la agrimensura, pero en unos apartados desligados del estudio de la Geometría en general. Xiberta Roqueta, Manuel: *Trigonometría Rectilínea y Nociones de Agrimensura*. Tall. Gráficos de Solomón Marqués, Gerona, 1932.

[11] Paunero Ruiz, Luis: *Ensayo. Las matemáticas en la educación*. Tipografía Helióopolis, Sevilla, 1935, op. cit., p. 94.

[12] Permite calcular el área de un triángulo en función de sus lados, sin hacer intervenir otras longitudes.

[13] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 389-391.

Sáiz Salvat vincula los problemas de topografía en especial a un *dispositivo didáctico*, las *excursiones*, tan ligadas a la Escuela Nueva. Resalta su aspecto activo y colaborativo y lamenta que se relacionen siempre con otras disciplinas, normalmente las ciencias sociales o experimentales, y casi nunca con las matemáticas. Resultan interesantes los dos artículos que dedica a la topografía, ya que en el segundo de ellos proporciona, entre otras cosas, una relación de actividades matemáticas de interés:

> a) Formación del presupuesto.
> b) Uso del mapa y escala. Construcción del croquis.
> c) Diseño geométrico del ambiente (esquematización)[14].
> d) Prácticas topográficas (mediciones accesibles e inaccesibles, alineaciones perpendiculares, uso del teodolito escolar «Sa» [casa de material Salvatella]).
> c) Orientación del mapa o croquis[15].

En el primer artículo precisa las actividades topográficas que son las que, según recomienda Sáiz, han de constituir el cuerpo de la excursión: «a) aprendizaje de uso instrumental; b) medición de distancias inaccesibles; c) triangulación de terrenos y construcción de croquis o planos; d) uso de la escala e interpretación de mapas: empleo del curvímetro»[16] (los tres primeros apartados en el segundo grado y el último solo para el tercero). Ligado a este tipo de actividades están el uso y la construcción de los materiales necesarios.

En relación con los mapas, se refiere a cuestiones *espaciales*, necesarias para el estudio geométrico, como la observación de que el mapa –hecho en proyección horizontal– debe estar sobre el suelo y no sobre una pared, para desarrollar el sentido de la orientación.

Estos profesores, en general, se cuestionan los contenidos geométricos que han de formar parte de un programa para esta materia y, como consecuencia, la orientación que ha de tener esta enseñanza en los niveles elementales y los

[14]Hace referencia al dibujo que llama 'esquemático', el que representa un objeto del ambiente mediante figuras puramente geométricas.

[15]Sáiz Salvat, Felipe: «La Topografía escolar». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **97 y 103**, pp. 101–103 y 105–107, p. 107.

[16]Ibídem, p. 102.

métodos de enseñanza. Eyaralar considera absurdo no extender conceptos estudiados en el plano al espacio, así como que los alumnos no estudien en la escuela muchas de las formas que encuentran en el entorno, por ejemplo, los polígonos estrellados, usuales en ornamentación y en enlosados («Combinaciones de polígonos se emplean en pavimento y zócalos de azulejos, en los que ha sobresalido notablemente la industria española»[17]), o las cónicas, necesarias para comprender simples cuestiones de Astronomía y Mecánica. Eso llevaría al conocimiento del elipsoide y el paraboloide de revolución, «no más difíciles de percibir que la propia esfera»[18].

A cambio, propone reducir el estudio de fórmulas de áreas o volúmenes a las más básicas y acostumbrar al alumno a deducir el resto. Pero hay más voces, como la de Sáiz Salvat, que critican el énfasis que se pone en las cuestiones de medida, conscientes de que los aspectos geométricos del problema quedan ocultos: «Tal como se expone esta fórmula [área del cono en función del radio de la base y la altura] en los textos no tiene gran interés, ya que en los problemas de aplicación *se dan dichas dos dimensiones* con lo cual reducen aquel tema geométrico a un simple cálculo»[19]; precisamente opina que el aspecto interesante del problema es la medición, que en la práctica es el «quid» de la cuestión y propone que se mida realmente (las magnitudes que en la práctica son factibles de medir), y luego se emplee la semejanza como en Geodesia o en Topografía.

De hecho, Eyaralar recomienda comenzar el estudio de las áreas y los volúmenes mediante actividades de medida directa como la descomposición en unidades de superficie (volumen), y luego recurrir a la equivalencia entre figuras (cuerpos) o a la comprobación experimental. Es decir, no sustituir desde el principio las cuestiones relativas a la medida geométrica, en la práctica, por simples cálculos[20].

[17] Eyaralar Almazán, José María y Cebrián, Francisco: *Nuevo Tratado de Geometría*. Reus, Madrid, 1924, p. 135.

[18] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 227.

[19] Sáiz Salvat, Felipe: «Volumen del cono». *Revista de Escuelas Normales*, 1931, **85**, pp. 45–46, p. 45.

[20] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 359.

4.1.2. El cálculo de áreas y volúmenes

El tratamiento dado al cálculo de áreas y volúmenes es un indicador del modo en que se concibe el trabajo geométrico en el aula y de la función que se le asigna. En general los profesores que se ocupan del tema del cálculo de áreas de figuras planas, justifican las expresiones o fórmulas que permiten calcularlas una vez definido qué es el área, normalmente a partir de la del rectángulo, y desde ésta obtienen las del resto de polígonos –triángulos, diferentes clases de cuadriláteros, polígonos regulares– mediante la equivalencia de figuras, y la del resto de los polígonos por descomposición en otras figuras de área conocida.

Sin embargo, hay diferencias cualitativas en la forma en que se justifica, por ejemplo, la equivalencia de figuras, así como en el tratamiento que tienen las fórmulas.

Como ejemplo son interesantes los artículos que publica **Federico Landrove** en la *Revista de Escuela Normales*. Landrove señala, en el primero de ellos, algo en lo que más tarde, refiriéndose precisamente a este artículo, insistirá Eyaralar[21], la importancia de descomponer y componer (del recortado y acoplado) figuras para obtener figuras equivalentes y el concepto de 'congruencia', como base para la *invención* de relaciones geométricas:

> En la Geometría, una vez conocidos los elementos geométricos sobre los cuales ha de trabajar el alumno, la tendencia general ha de consistir en que el alumno *invente* las relaciones geométricas. El papel del profesor ha de reducirse, cuanto sea posible, a dos cosas: a proponerle las cuestiones sobre las cuales debe trabajar y a proporcionarle las ideas fundamentales que, para cada caso, sean precisas[22].

La técnica que propone es el recortado de figuras y lo ejemplifica con las respuestas de varios de sus alumnos normalistas al problema de transformar un dodecágono regular en un rectángulo equivalente y obtener así una expresión para el cálculo del área. Muestra dos soluciones distintas, una de las

[21] Incluimos la cita en p. 479.

[22] Landrove Moiño, Federico: «La enseñanza de la geometría. La comprensión de la forma. La invención y el recortado de figuras». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **19**, pp. 269–271, p. 270.

cuales es un rectángulo de base tres veces el radio y de altura el radio, y otra, en un rectángulo de base tres veces y media el radio y cuya altura resulta ser $\frac{6}{7}$ del radio[23].

En otro artículo que publica, a instancias de Modesto Bargalló, entonces director de la Revista, propone transformar un octógono regular en un rectángulo equivalente y aporta dos soluciones, una en función del radio y otra en función del lado y de la apotema.

Este *tipo de tarea* que Landrove proponía a sus alumnos contenía una restricción: «Se renunció desde luego –éste es siempre el postulado de nuestro trabajo– a utilizar cualquiera de las soluciones que pudieran ser ya conocidas por nuestros alumnos o que pudieran deducirse del contenido habitual de los tratados de Geometría»[24]. Vemos así una dinámica de trabajo geométrico en la que se pueden observar dialécticas relativas a varios de los *momentos didácticos*[25]: los alumnos *exploran* soluciones, las *validan* (el propio procedimiento solo requiere que se compruebe que la figura formada es un rectángulo y cuáles son sus dimensiones), las comparan (*evalúan* su interés y aplicabilidad) y *amplían la técnica a nuevos problemas*: Relación entre un hexágono regular y el rectángulo inscrito, de vértices los puntos medios de cuatro lados contiguos dos a dos.

José María Eyaralar señala varias dificultades en las demostraciones habituales de las fórmulas para los volúmenes: pérdida de la noción de volumen, descomposiciones de figuras difíciles de visualizar, cálculos penosos y «algo que no es propiamente un escollo, sino más bien un vacío, la imposibilidad en que, después de tanto estudio, se encuentra el alumno para calcular volúmenes tan usuales como el de un terraplén o el de una artesa»[26]. Para salvar estas dificultades emplea varias *técnicas didácticas*.

Hace construir a los alumnos un paralelepípedo rectángulo en papel transparente y llenarlo de cubitos –unidades de volumen–; pero a la hora de con-

[23]En realidad la segunda construcción podría dar lugar a un trabajo algebraico, que Landrove no explota.

[24]Landrove Moiño, Federico: «La enseñanza de la Geometría». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **29**, pp. 12–13, p. 12.

[25]Los *momentos didácticos* están descritos en pp. 13 y sig.

[26]Eyaralar Almazán, José María: «La explicación de los volúmenes». *Revista de Escuelas Normales*, 1928, **53 y 56**, pp. 137–138 y 202–203, p. 137.

tarlos les invita a emplear un procedimiento que abrevie el conteo, mirando cuántas unidades hay de largo, ancho y alto. Emplea el material primero para comprender el concepto de volumen, y a la vez para una *validación pragmática*, a partir de la cual el profesor, a través del *gesto* de solicitar una técnica abreviada, mediante un razonamiento les lleva a descubrir una fórmula general, actuando aquí el material de *modelo geométrico*.

Para desarrollar la visualización, hace construir prismas divididos por secciones elegidas de cierta forma, para establecer relaciones entre los volúmenes. Y también material para hacer intuitivo el principio de Cavalieri[27] (figura 4.1, p. 251).

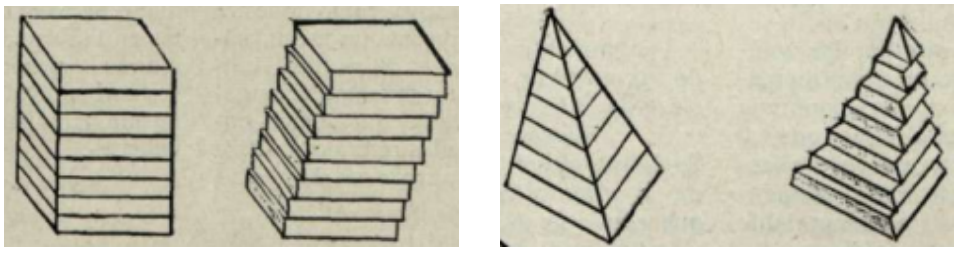


Figura 4.1: Eyaralar. Principio de Cavalieri

Ante el problema de la falta de recursos matemáticos de los alumnos para calcular volúmenes de objetos habituales –importante si se quiere relacionar la Matemática con la vida diaria–, decide estudiar el 'prismatoide', «cuerpo limitado por dos planos paralelos, bases (B y B') enlazados por trapecios y triángulos (caras laterales)»[28], un poliedro cuyo estudio no se solía considerar en los tratados clásicos, pero que había visto que estaba presente en un tratado alemán. Justifica su estudio por hallarse en muchos cuerpos: tronco de pirámide, cuña, obelisco, terraplén, artesa y hasta en los montones de grava que se forman a las orillas de las carreteras (las bases pueden ser una línea o un punto). Obtiene la fórmula del volumen del prismatoide en función de las áreas de ambas bases y de la sección media.

En *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría* incluye el estudio más detallado de este objeto matemático y la obtención, a partir de él, del volumen del tronco de pirámide y de un terraplén. En particular, permite

[27] Ibídem.

[28] Ibídem, p. 202. El prismatoide ya aparece en el *Nuevo Tratado de Geometría*.

calcular el volumen de algunos cuerpos con superficies curvas, aunque esto supone ceder en rigor y hacer un 'paso al límite', que no menciona en el libro (sí lo hacía en el artículo de la revista que citamos; ver p. 562 de esta Memoria), pero del que es muy consciente cuando delimita las condiciones que han de cumplirse para poder usar esta técnica, «condiciones que definiremos *grosso modo* diciendo que ha de ser continua, es decir, sin cambios bruscos de curvatura»[29], lo que abarca los cuerpos redondos habituales: cono, tronco de cono, esfera, segmento esférico, elipsoide, etc.

Ahora la *técnica didáctica* que Eyaralar pone en funcionamiento consiste en proporcionar a los alumnos un conocimiento matemático que, con respecto al cálculo de ciertos volúmenes, va a desempeñar una *función tecnológica*. La *razón de ser* del estudio del prismatoide está en «un sin número de problemas prácticos que resuelven los alumnos, no sin satisfacción, mediante una sola *fecundísima fórmula*»[30].

Vemos pues, un tratamiento del cálculo de áreas y volúmenes muy diferente al de los libros clásicos, incluidos los escritos en aquella misma época por profesores no renovadores y, quizá precisamente por ello, menos informados sobre la matemática. Basta compararlo con los enunciados y los métodos de resolución de Manuel Xiberta[31].

En cualquier caso, la Geometría ya es algo más que la «ciencia de la extensión», tal como figura en el Prólogo de la obra de Eyaralar:

> La forma de un cuerpo depende de la posición relativa de sus elementos; a su vez la posición depende de la extensión; pero no es reducible solo a ella; [...] Por esto no puede decirse con pleno rigor que la Geometría sea la ciencia de la extensión; por el contrario, puede hacerse un estudio geométrico independiente de toda magnitud[32].

[29] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 117.

[30] Eyaralar Almazán, *La explicación de los volúmenes*, op. cit., p. 202. La cursiva es nuestra.

[31] Xiberta Roqueta, Manuel: *Matemáticas. Metodología y Prácticas.* Gerona: Talleres Gráficos de Solomón Marqués, 1934, cap. IX, pp. 180-198.

Xiberta Roqueta, Manuel: *Geometría elemental.* Imp. y Lib. de Antonio Franquet y Gusiñé, Gerona, 3.ª edición, 1926.

[32] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 1.

4.1.3. La Geometría del movimiento

Uno de los puntos fuertes de la renovación en la enseñanza de la Geometría en aquel momento es el abandono de una geometría 'estática' en favor de una geometría 'dinámica', la importancia que se concede a los «movimientos». En esto coinciden la mayoría de los profesores renovadores, aunque no con la misma intensidad. Algunos de los que habían viajado al extranjero conocieron las nuevas orientaciones, como escribe **Luis Paunero** desde Bruselas:

> Se empezó con el uso de modelos construidos con hilos para representar las construcciones en el espacio, y con el empleo al mismo tiempo de sólidos transparentes que podrían llevar una más próxima idea de inmaterialidad, y se perfeccionó este sistema *haciendo introducir de forma mecánica el movimiento para los teoremas que puedan demostrarse por giros en la geometría plana...*[33]

Felipe Sáiz alaba las geometrías de Méray y de Mahler y añade: «Toda la geometría del movimiento con sus transformaciones y traslaciones o giros, son [sic] muy útiles para las demostraciones experimentales o intuitivas en especial para simetrías, ángulos y áreas»[34]. En la parte de *Metodología* de su libro considera entre los procedimientos de investigación y exposición geométricos la 'simetría' (axial o central, en el plano y en el espacio) y la 'superposición' (por traslación, rebatimiento o giro), y pone ejemplos de demostraciones de la igualdad de figuras usando cada uno de estos movimientos[35].

Eyaralar destaca la importancia que tiene en geometría el estudio de los movimientos «que da animación y vida una ciencia demasiado estática», y el de la simetría, «que desenvuelve la atención, facilita el conocimiento de múltiples propiedades, familiariza con un elemento estético, siquiera sea elemental, y prepara para el estudio de las formas de la Naturaleza que son las que han de incitarlo en los primeros grados»[36]. Y sugiere emplear en los

[33] Paunero Ruiz, Luis: «La enseñanza de la Geometría en la Escuela primaria dirigida hacia la orientación profesional». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE. P-17. R 123-020, Bruxelles, 1933. Cita en p. 8. La cursiva es nuestra.

[34] Sáiz Salvat, Felipe: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental*. Imp, Mercé, Castellón, 1931, p. 175.

[35] Ibídem, pp. 65-70.

[36] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 44.

primeros niveles la Naturaleza como proveedora de ejemplos (mariposas o estrellas de mar, para la simetría axial y la central, respectivamente). Considera importante que el programa escolar incluya los movimientos (en el plano y en el espacio) por su valor educativo y por la oportunidad que ofrecen de enlazar los conocimientos geométricos[37].

La insistencia en presentar los movimientos –también los lugares geométricos– como elementos que 'unifican' la enseñanza de la geometría, que hacen la enseñanza *asociativa*[38], es una visión moderna, en aquel momento, de la geometría. Rey Pastor y Puig Adam se explican así en el prólogo de sus *Elementos de Geometría*, en 1928, y de nuevo al reeditar el libro en 1933:

> La Geometría estudia las propiedades intrínsecas de las figuras, es decir, las que no se alteran con el movimiento de las mismas. A cada clase de movimientos corresponde una clase de propiedades [...]
>
> este humilde ensayo [...] se aparta algo de la sólida y admirable arquitectura euclídea (a la que estamos habituados). No es el primero que se hace desde que Klein lanzó la idea de grupo en su famoso programa de Erlangen, e indicó la conveniencia de tomarlo como base, aún en la enseñanza elemental[39].

Eyaralar se lamenta, en la *Memoria* que escribió tras su estancia en Francia[40], del carácter estático de la geometría en la enseñanza primaria en aquel país, a pesar de ser el de Méray, y de que no haya figuras con movimiento

[37]Ibídem, p. 229.

[38]Ibídem, p. 189.

[39]Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Elementos y Complementos de Geometría. Colección Elemental Intuitiva*. Imprenta de A. Marzo, Madrid, 1933. Prólogo a la primera edición (1928). Klein formuló su *Programa de Erlangen* en 1872.

[40]En la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio no había visto esa orientación. No figura en el libro de Galán, G.: *Nociones y ejercicios de Matemáticas*. Lib. de Suc. de Hernando, Madrid, 1920. En cuanto al libro de Llardent Esmet, aunque sí insiste en la noción de congruencia, y es basándose en ella como define la igualdad de figuras, además de dedicar un apartado a la simetría, axial y central, no utiliza después los movimientos para justificar propiedades, en particular de los polígonos.

Llardent Esmet, Antonio: *Curso de Geometría*. Imp. y enc. de Julio Cosano, Madrid, 3.ª edición, 1921.

Llardent Esmet, Antonio: *Nociones y Ejercicios de Aritmética y Geometría*. Imp. y enc. de Julio Cosano, Madrid, 3.ª edición, 1921.

que se puedan mover y ensamblar[41]. En cambio, en la enseñanza primaria superior alaba una de las diferencias principales con la enseñanza en España, la adopción del movimiento, «que simplifica muchos razonamientos y coordina multitud de propiedades dispersas»[42]. Y se interesa por el origen de esta orientación:

> Hemos hallado el origen de este método en una obra del insigne geómetra monsieur Méray, [...] titulada *Nouveaux éléments de Géometrie*, publicada en 1874, seguida por Borel y elogiada por Poincaré, que cambiaba por completo los fundamentos de la Geometría de acuerdo con su frase de que «es tan absurdo estudiar ahora la Geometría por Euclides, como lo sería reducir el Álgebra a la de Diofanto». [...] toda la Geometría tiene por base los movimientos ya dichos, [...] El estudio de la obra de este autor, que sería interesatísima por constituir su método el llamado *moderno*, cae fuera de nuestro trabajo, por no ser todavía seguido en las Escuelas Normales[43].

De hecho, en las Geometrías escolares más manejadas en la época –las recomienda o las cita en la bibliografía de sus libros Eyaralar[44]–, como la de Palau Vera[45] o la de Juan B. Puig[46], no observamos esta orientación. En cambio, Eyaralar, como unos años después Puig Adam y Rey Pastor en la enseñanza secundaria, emplea las isometrías en los razonamientos o demostraciones geométricos[47].

[41] Eyaralar Almazán, José María: «La enseñanza de las Matemáticas en las escuelas francesas». En: *Anales de la JAE*, tomo XIX, pp. 1–96, 1924, p. 26.

[42] Ibídem, p. 56.

[43] Ibídem. M. Charles Méray había estudiado en la École Normale Supérieure de París y había sido profesor del Liceo de San Quentin, de la Universidad de Lyon y, finalmente, profesor de Matemáticas en Dijon.

[44] Los libros de Charentón, Sáiz o Xiberta no incluyen bibliografía y el de Paunero no contiene libros escolares 'de texto'. Comas cita la *Aritmética* de Palau Vera, pero no la *Geomatría*.

[45] Palau Vera, J.: *Geometría. Estudio de las formas*. Seix Barral, Barcelona, 1914 .

[46] Puig, J.B.: *Geometría y nociones de agrimensura y arquitectura*. Dalmau Carles, Gerona, 1914.

[47] En el *Nuevo Tratado de Geometría*, de 1924, para obtener las fórmulas de las áreas de algunos cuadriláteros, Eyaralar usa los giros, lo mismo que Rey Pastor y Puig Adam en 1928 en sus *Elementos de Geometría. Colección elemental intuitiva*. En este último libro también se emplean giros para demostrar propiedades de las paralelas medias.

Como ejemplo, mostramos en las figuras 4.2 (Eyaralar[48]) y 4.3 (Rey Pastor y Puig Adam[49]) demostraciones de una propiedad muy conocida, la que establece que las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.

202. Experimento.—1.º Si en papel transparente calcamos (Figura 157) el triángulo AOD y le hacemos girar 180° alrededor de O, vendrá a coincidir con COB, y podemos decir:

En un romboide los lados opuestos son iguales. Las diagonales se cortan en partes también iguales.

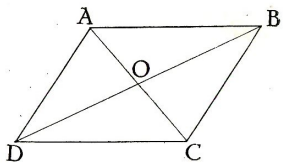
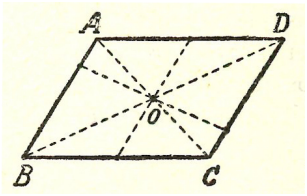


Fig. 157

Figura 4.2: Eyaralar. Demostración dinámica sobre cuadriláteros



101. Simetría del paralelógramo.

Podemos hacer coincidir los dos triángulos iguales en que acabamos de descomproner el paralelógramo, girando uno cualquiera de ellos 180 grados alrededor del punto medio O de la diagonal AC. Es decir:

El paralelógramo es simétrico respecto del punto O.

Como los vértices B y D son puntos simétricos, O es también punto medio de la otra diagonal BD. De otro modo:

Las diagonales de un paralelógramo se cortan en su punto medio. Dicho punto se llama *centro* del paralelógramo por serlo de simetría de la figura.

Figura 4.3: Rey Pastor y Puig Adam. Demostración dinámica sobre cuadriláteros

Otro de los libros que Eyaralar recomienda y cita en la bibliografía del *Nuevo Tratado de Geometría* es el de Mahler, *Ebene Geometrie*, que presenta una geometría dinámica. La figura 4.4 (p. 257) recoge la justificación de la propiedad anterior[50]:

[48] Eyaralar Almazán, José María: *Nociones de Aritmética y Geometría. Primer curso.* Sardá, Guadalajara, 1936, p. 124.

[49] Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Bachillerato. Matemáticas. Primer curso.* Unión Tipográfica S.A., Madrid, 1934, pp. 98-99.

[50] Mahler, Gottfried: *Geometría del plano.* Traducido por Federico Alicart. Labor, Barcelona, 1927, p. 47.

6. Trazando (fig. 37) las diagonales, vemos que los triángulos BCE y AED son congruentes, y por tanto es $BE = DE$ y $CE = AE$. Luego,

Cada diagonal de un paralelogramo biseca a la otra.

Pregunta: ¿Qué movimiento conduce a la coincidencia de ambos triángulos?

7. Todo paralelogramo es simétrico respecto al punto de intersección de sus diagonales.

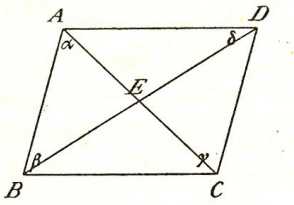


FIG. 37

8. Por el punto medio E de la diagonal AC (fig. 38) del paralelogramo $ABCD$, tracemos la paralela a BC que cortará a AB en F y a CO en G; mediante un giro, en torno de E el segmento AF coincidirá con el CG, de modo que es $AF = CG$; y como según el teorema 2 de este párrafo se tiene $AF = DG$, resulta de esto $CG = GD$ y análogamente $BF = FA$.

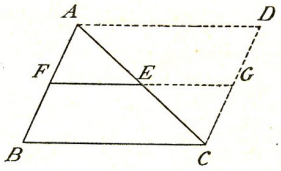


FIG. 38

Figura 4.4: Mahler. Demostración dinámica sobre cuadriláteros

En cambio, **Manuel Xiberta** nos proporciona un ejemplo claro de cómo el *modelo epistemológico de las matemáticas* del profesor influye en la forma de plantear su enseñanza. Este profesor, cuyas publicaciones muestran que no comparte las ideas de la Escuela Nueva ni se ve influido por los aires renovadores propios de la época, propone estas demostraciones[51] (figura 4.5, p. 258).

Es cierto que estos libros son de 1926 y 1928, pero tampoco para justificar las fórmulas de área de polígonos como el triángulo o el trapecio usa los movimientos, mientras que Eyaralar lo había hecho en 1924 y Rey Pastor y Puig Adam en 1928.

En la reseña que hace Sáiz Salvat del libro de Xiberta, *Geometría elemental*, precisamente critica la orientación clásica que da a la geometría:

> Se nota el vacío de la simetría central y su aplicación cristalográfica. El *método dinámico* para demostraciones de equivalencias y áreas queda casi omitido; seguramente nuestro culto compañero dará en otra edición más importancia a esa orientación meyarana que tiende a salvar la pesadez del razonamiento excesivamente abstracto[52].

[51] XIBERTA ROQUETA, *Geometría elemental*, op. cit., p. 79. Y XIBERTA ROQUETA, MANUEL: *Elementos de Geometría*. Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, Madrid, 1928, p. 59.

[52] SÁIZ SALVAT, FELIPE: «"Geometría elemental", por Manuel Xiberta Roqueta». *Re-*

3.º Los triángulos t y t' (fig. 131), son iguales por tener un lado igual A B = C D, e iguales los ángulos adyacentes por alternos entre paralelas; luego, A O = O C y B O = O D.

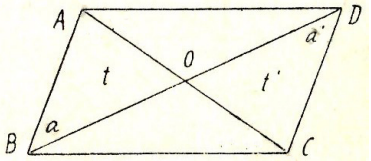


Fig. 131

3.° ***Las diagonales se cortan mutuamente en dos partes iguales*** **(figura 116).**

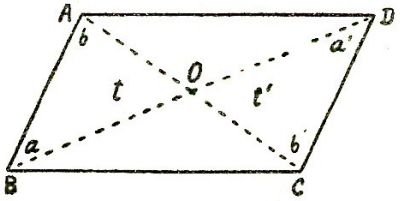


Fig. 116

Los triángulos t y t' son iguales por tener un lado igual, A B y C D, e iguales los ángulos adyacentes $a = a'$ y $b = b'$ por alternos entre paralelas; luego O A = O C y O B = O D.

Figura 4.5: Xiberta. Demostraciones geométricas

El *Nuevo Tratado de Geometría*, de Eyaralar, publicado en 1924, dedica tres apartados a las isometrías: «Rebatimiento de figuras y simetría con relación a un eje», «Traslación paralela» e «Igualdad de figuras» y, además, pide demostrar, mediante una traslación paralela, las propiedades de los ángulos que se forman en un sistema de rectas paralelas cortadas por una secante. En el libro *Geometría elemental*, cuya tercera edición «corregida y aumentada» publicó Xiberta en 1926, no hay ni un solo apartado en el que se estudien los movimientos.

Además de su aportación a la educación matemática, la simetría contribuye a hacer realidad uno de los principios de la Escuela Nueva, el que afirma que la enseñanza ha de ser bella –hay que realizar cosas bellas– para cultivar el sentido estético. A la consecución de este principio, en el que Eyaralar insiste en varias ocasiones, señalando el papel de las simetrías, se trabaja en todas las lecciones de geometría de **Aurelio Rodríguez Charentón**, en la parte dedicada al dibujo[53]. En efecto, en todas las lecciones de dibujo el niño

vista de Escuelas Normales, 1927, **48**, p. 311.

[53]Cada noción o figura geométrica se estudia en tres lecciones consecutivas, las dos últimas dedicadas al dibujo y al trabajo manual.

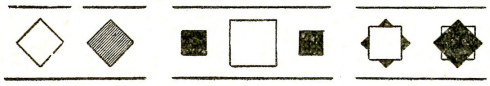


Figura 4.6: Charentón. Frisos (1)

ha de construir frisos; por supuesto, los hay de varios tipos –en cuanto a la clasificación matemática en función de la clase de isometrías que intervienen– pero en el Grado Preparatorio apenas interviene otro movimiento que no sea la traslación (figura 4.6, p. 259), además de que los motivos base pueden ser un polígono conocido y el mismo girado[54], normalmente 45º.

Estos frisos son más bien actividades de seriar siguiendo una pauta[55], aunque con figuras geométricas. En el Grado Elemental intervienen además diferentes tipos de simetrías (figura 4.7, p. 259)[56].

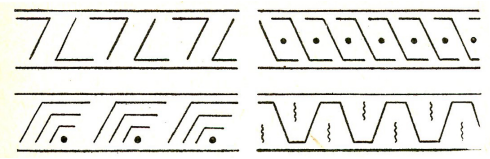


Figura 4.7: Charentón. Frisos (2)

Sin embargo, no hay ninguna lección dedicada a la simetría axial. Tampoco se estudian las propiedades de las figuras resaltando las simetrías; por ejemplo, el diámetro se define como «la recta que pasa por el centro y tiene sus extremos en la circunferencia»[57]. En las preguntas que formula después para reflexionar ninguna lleva a ver el diámetro como un eje de simetría; cuando se pide que se doblen polígonos por una diagonal o una paralela media se hace hincapié en la equivalencia de las figuras resultantes, no en la coincidencia de ambas mitades al doblar.

[54]Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?, p. 69.

[55]Van alternando figuras según uno o varios descriptores (color, posición, tamaño...), de manera cíclica. Ver Saá Rojo, María Dolores: *Las matemáticas de los cuentos y las canciones.* EOS, Madrid, 2002.

[56]Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 107.

[57]Ibídem, p. 266.

Margarita Comas, a pesar de que en su *Metodología* destaca el valor educativo de la geometría por contribuir más que ninguna otra ciencia a aclarar el concepto de espacio, tanto en sentido estático como dinámico, lo cierto es que no hace referencias a las isometrías en su propuesta. Por ejemplo: implícitamente reproduce polígonos iguales a otros usando alguno como plantilla, pero en ningún momento está presente de manera consciente la definición de igualdad por congruencia; hace 'dobleces' en polígonos, pero solo para formar figuras equivalentes y trabajar las áreas; los dobleces en el círculo apenas sugieren que el diámetro es un eje de simetría[58]. En los programas que había publicado antes para la escuela primaria –y que siguió reeditando en los años treinta– solo se menciona la simetría en el de Geometría para segundo grado: «6.º Imágenes en espejos.– Figuras simétricas.– Ejercicios»[59]. Lo cierto es que cuando enumera el material, que incluye una relación detallada de objetos y materiales de uso común (como linternas), no aparecen espejos ni papel translúcido[60], nada para trabajar de manera intuitiva la simetría axial[61].

En estos casos, visto el afán de estos profesores por renovar la enseñanza y hacerla más intuitiva y vital, más parece que la poca atención a los movimientos se deba a una reflexión insuficiente o a una falta de actualización de sus conocimientos matemáticos.

4.1.4. Algunas orientaciones para la enseñanza de la Geometría

Una de las cuestiones que se plantean en la enseñanza de la geometría, para hacerla intuitiva y, sobre todo, más próxima a la vida del niño, es si en su estudio hay que comenzar por la geometría en tres dimensiones e ir

[58]Menciona que el diámetro la divide por la mitad, pero no está claro si se refiere a partes equivalentes o congruentes, no hace ningún hincapié en esto último.

[59]Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., p. 34.

[60]En aquel momento, para calcar patrones de costura se usaba a veces papel fino no opaco del todo.

[61]Tan solo papel cuadriculado, que limita los ejes a dos direcciones posibles. Este material es lógico que esté ya que se trabajan en este nivel los cuadriláteros y las áreas de figuras planas en general.

descendiendo hasta el punto (como ya defendía Froebel) o si, por el contrario, se debe seguir la secuencia clásica y avanzar desde los elementos más 'simples' a la geometría en dos y luego en tres dimensiones.

Sobre esto, la mayoría de las propuestas renovadoras abogan, en aras de la intuición, por emplear «el procedimiento natural partiendo de los elementos de observación (sólidos geométricos), para estudiar sobre ellos todos los elementos geométricos»[62].

Comas, en los programas graduados que propone para la enseñanza primaria[63], comienza en cada grado por la geometría plana y luego vienen los cuerpos en tres dimensiones; lo que varía es el tipo de cuestiones que plantea, en cada uno de los grados. En la parte dedicada a la geometría en su *Metodología*[64] la propuesta es distinta. Para los dos primeros grados se trata de un *proyecto* de construcción de un pueblo; comienza pues con cuerpos (cubo, pirámide, cilindro, cono, esfera, en este orden) y va intercalando el estudio de las figuras planas y otros elementos geométricos: a partir del cubo (en realidad parte de cubos y ortoedros) el cuadrado, el rectángulo, la idea de vertical, el ángulo recto y el resto de ángulos, la perpendicularidad; la pirámide da lugar al estudio del triángulo, etc. Luego propone actividades 'de afianzamiento' para las nociones estudiadas e indica la conveniencia de algún otro proyecto para ello.

En realidad hay que señalar que esta propuesta, más que constituir una planificación detallada de toda la actividad geométrica en un aula de primaria, proporciona ideas acerca de posibles actividades. Podría considerarse una colección interesante de *praxeologías puntuales*, aunque vayan secuenciadas, que sirven sobre todo para proporcionar una idea de cómo trabajar la geometría y a la vez un repertorio de tareas y técnicas.

En el tercer grado la propuesta ya no está formulada como un proyecto; empieza por diferenciar punto, línea, superficie y sólido, y va estudiando, en

[62] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 137. Tras recomendar el comienzo de la geometría por los sólidos, al estilo Froebel, advierte de los peligros de utilizar el cono y el cilindro, por considerar que pueden entorpecer el conocimiento de la circunferencia, al presentar otras secciones (las llamada cónicas).

[63] Comas Camps, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría.* Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 5.ª edición, 1932, op. cit.

[64] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit, pp. 44-76.

este orden, línea, ángulo, triángulo, teorema de Pitágoras, áreas de figuras planas (aquí diferencia el primer grado del segundo y tercero) y volúmenes.

En definitiva, en los primeros grados, mientras apenas se ocupa de cuestiones de medida, comienza por los objeto del entorno, los que son familiares al niño y va planteando el estudio de otros elementos u objetos geométricos a partir de ellos. Pero cuando intervienen áreas y volúmenes, y en general propiedades y relaciones más complejas, opta por avanzar desde lo más simple hasta lo menos; en este caso la dependencia de unos conocimientos matemáticos respecto de otros guía la secuencia.

Eyaralar se refiere a ambas propuestas. Por un lado afirma que «el estudio de las formas debería empezar por los objetos de uso corriente, pasando al estudio de los cuerpos geométricos, para llegar al de los elementos, superficies y líneas que presentan»[65], y proporciona un programa para la escuela primaria dividido en tres grados (informa de que algunos libros escolares, citados en la bibliografía, organizan de este modo la geometría). Pero a continuación presenta otro programa, también dividido en tres grados, como alternativa, para quienes piensen que la enseñanza ha de pasar de lo sencillo a lo compuesto. Consciente de que adoptar uno u otro criterio no es una cuestión trivial, y que de ello depende el plan, reconoce que «sólo un estudio comparativo experimental pudiera determinar la preferencia por uno cualquiera de los dos predominantes»[66].

Queremos resaltar que en 1924 Eyaralar demanda, en cuestiones relativas a la enseñanza de la matemática, la necesidad de «*un estudio comparativo experimental*», lo cual supone admitir la necesidad de investigación en este campo; y eso en un momento en que la *Didáctica de la Matemática* no estaba aún configurada como disciplina, aunque algunas personas ciertamente estaban contribuyendo a su nacimiento.

Sáiz[67] se limita, fundamentalmente, a reproducir las propuestas de Eyaralar, cuya obra de geometría califica de magistral y, lo mismo que su admirado compañero, recomienda para la escuela los libros de varios de los maestros-

[65] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 7.
[66] Ibídem.
[67] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 169-171.

directores vinculados a centros de referencia en la renovación pedagógica, los llamados *mediadores*[68]: Martí Alpera, Llorca, Xandrí.

Charentón también organiza en las *Lecciones de cálculo* los contenidos geométricos de diferente forma en el grado preparatorio y en el grado elemental. En el primero, las lecciones sobre cada uno de los cuerpos geométricos preceden a las de las figuras planas que contiene, mientras que en el segundo la secuencia se invierte. En cualquier caso, va alternando la geometría plana y la espacial en ambos textos.

Respecto al carácter experimental que ha de tener la geometría –toda la matemática– en los primeros grados, son varios los profesores que abogan por una geometría más intuitiva. **Comas**[69] aconseja seguir una orientación inspirada en el «método Perry». Perry, editor en 1901 del libro *Discussion on the Teaching of Mathematics*, defendía una geometría experimental con énfasis en las aplicaciones útiles. Llegó a decir: «Los métodos experimentales en medida y geometría deberían preceder a la geometría deductiva, aunque incluso en las edades más tempranas debería introducirse algún razonamiento deductivo»[70]. Y **Eyaralar**, a propósito de la enseñanza de la geometría en Francia, se lamenta de que a pesar de su alto nivel en las escuelas primarias superiores, falte una orientación más experimental; una de las cosas que echa de menos es justamente el método Perry[71].

En cuanto al método, en el *Nuevo Tratado de Geometría*, Eyaralar marca cuatro tiempos para su enseñanza:

> 1.º Ejercicios de observación, trabajo manual o presentación de un problema, que sirvan de base a las propiedades que se van a estudiar.

[68] Viñao Frago, Antonio: «Pedagogía y experiencias educativas en la JAE: Revisión historiográfica y nuevos enfoques». En: J.M. Sánchez Ron y J. García Velasco (Eds.), *100 JAE. La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas en su centenario*, tomo II, pp. 597–635. Fundación Francisco Giner de los Ríos y Publicaciones de la Residencia de Estudiantes, Madrid, 2010.

[69] Comas Camps, Margarita: «La enseñanza de las Matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1922, **6**, pp. 215–220.

[70] Citado en: Cajori, Florián: *A History of Elementary Mathematics*. Cosimo, New York, 2007, p. 292. La traducción es nuestra.

[71] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 60.

> 2.º Paso al enunciado de definiciones, reglas o propiedades, que habrán de aprenderse de memoria.
>
> 3.º Ejercicios de comprensión, que muestran si los alumnos han entendido bien lo anterior.
>
> 4.º Ejercicios de aplicación, que afirmen los conocimientos adquiridos y los amplíen.
>
> Estos ejercicios habrán de ser de tres clases: *teóricos*, que versen sobre relaciones de posición o forma; *numéricos*, sobre la extensión; *de dibujo*, generalmente, de carácter ornamental[72].

Estos tiempos recuerdan las fases generales para el desarrollo de una lección que propondría más tarde en su *Metodología*[73]. En esta obra especifica que, en la escuela primaria, la enseñanza no puede pasar de las fases de *observación* (caracterizada por el estudio intuitivo de la forma, la posición y el movimiento) y *experimentación* (en el que se estudian experimentalmente las propiedades de las figuras y las áreas y volúmenes); la formación lógica, aunque la cree propia de la secundaria, reclama que no se pierda de vista en ningún nivel[74].

Es interesante comparar esta propuesta con la estructura de las lecciones de geometría en los libros de **Charentón**. En ellas hay una primera parte que podríamos calificar de *observación* y *experimentación* (buscar formas en el entorno, interrogarse acerca de algunas propiedades o elementos, recortar, doblar, medir...), que da lugar a la *definición* del objeto geométrico, seguida de lo que el autor denomina «ejercicios de reflexión», que profundizan en la comprensión y la caracterización del objeto geométrico; por último, solo en el grado elemental, incluye una última sección de «ejercicios prácticos» que suelen incidir en las relaciones con otros objetos geométricos y pueden considerarse de ampliación. Tras ello, dos lecciones con actividades de trabajo manual y de dibujo, respectivamente (en el grado elemental se invierte el orden de estas dos lecciones).

El paralelismo con el esquema que propone Eyaralar para la escuela primaria es evidente.

[72] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 9.

[73] Se comentará el el apartado 6.1.1, pp. 363 y sig.

[74] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 357-359.

4.1.5. Las construcciones geométricas. El dibujo geométrico

El principio de actividad de la Escuela Nueva supuso la formulación de propuestas en las que el dibujo y la experimentación con materiales concretos constituía la base intuitiva de la geometría. Ligadas al estudio de la geometría elemental están unas *tareas* –las construcciones geométricas y ciertos tipos de problemas–, una *técnica* principal –el dibujo– con sus variantes, y los instrumentos materiales asociados a ella.

Para analizar la utilización de estas técnicas, nos vamos a basar en libros de texto de geometría, algunos escritos para bachillerato, pero que nos informan del papel que podía desempeñar el dibujo geométrico en la enseñanza de la geometría y en la formación de los alumnos y la de los maestros. Rey Pastor y Puig Adam no eran profesores normalistas, pero escribieron una obra para enseñar geometría –de la que ya hemos mostrado ejemplos en este apartado– en la que conceden gran importancia al uso de métodos intuitivos, que coincide en el año de publicación con la de Xiberta para este mismo nivel de enseñanza; la obra para la enseñanza secundaria de Eyaralar pertenece ya al periodo republicano. Se trata de profesores en cuya visión de la enseñanza-aprendizaje de la matemática hallamos similitudes pero también diferencias, por la propia concepción de la matemática que tiene cada autor, pero también por la influencia de la *institución*, o sea, por el nivel al que se dirige, enseñanza primaria, secundaria o formación de maestros.

Vamos a contrastar las propuestas con las consideraciones que algunos autores plasman en obras sobre metodología de la Matemática, en las que exponen sus ideas sobre la enseñanza de la geometría y, en particular, del dibujo.

4.1.5.1. La relación entre Dibujo y Geometría: El dibujo geométrico

La Geometría y el Dibujo han sido disciplinas tradicionalmente relacionadas entre sí. En la época en la que nos situamos, los expertos en la enseñanza del dibujo en los niveles elementales, plantean un dibujo que no sea una prolongación de la Geometría y que atienda a otros aspectos de la forma-

ción, como pueden ser los estéticos, los artísticos o los profesionales, frente al dibujo lineal clásico, sin perjuicio de que el dibujo de determinados elementos comporte el empleo de técnicas del llamado dibujo lineal o geométrico[75]. Luis Paunero, en esta línea, establece «orientaciones prácticas [sobre el dibujo geométrico] que pueden darse a la geometría con vistas a las aplicaciones prácticas en todas las actividades de la función social del individuo»[76]. El dibujo es pues una disciplina, pero el dibujo geométrico actúa a la vez como *técnica* para abordar problemas geométricos:

> La enseñanza del dibujo geométrico no puede, naturalmente, desligarse de la geometría. Una y otro se completan para formar una unidad. A medida que van aprendiendo proposiciones y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos, pueden ir resolviéndose problemas de construcciones diversas[77].

En el caso del dibujo geométrico, la relación entre dibujo y geometría no se ha cuestionado, pero según Eyaralar, incluso «el dibujo no geométrico que atiende a la forma, a la extensión, a la posición relativa, a la percepción de la perspectiva, está íntimamente ligado a la Geometría que trata de las mismas cuestiones, aun cuando sin el matiz artístico aquí predominante»[78]. Y en cuanto al dibujo geométrico, lo caracteriza como una de las tres partes de las que se ocupa la Geometría elemental: la reproducción de los objetos geométricos –las otras son el estudio de la forma y la medida–. Además en los libros de Geometría se alude al denominado dibujo lineal y se reclaman algunas de sus reglas para el trabajo geométrico: «Todas las reglas del dibujo lineal deben observarse en la construcción de las figuras geométricas, trazando los datos de línea llena y fina, las líneas auxiliares de trazos, y los resultados de línea gruesa»[79].

El Dibujo ayuda a conectar el espacio sensible con la Geometría. El dibujo –una traza sobre un papel– de un objeto geométrico constituye ya una cierta

[75] López Velasco, Elisa: *La práctica del Dibujo en la Escuela Primaria. Tomo IV*. Espasa-Calpe, 1933.

[76] Paunero Ruiz, *La enseñanza de la Geometría...*, op. cit., p. 6.

[77] Ibídem.

[78] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 234.

[79] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., pp. 286-287. El mismo autor vuelve a insistir en ello en *Didáctica de...*, op. cit., p. 111.

modelización de dicho objeto, es decir, algunas de sus características se representan mediante elementos geométricos, como segmentos, puntos, etc. En cierta medida el dibujo, en tanto que representación gráfica de un problema, constituye un esquema geométrico del mismo, ya sea del enunciado o de la resolución.

Pero un dibujo geométrico puede tener funciones bien distintas. Hay que diferenciar entre lo que es un problema *práctico*, un problema de *modelización* y un problema *geométrico*[80]. Los primeros se sitúan en el espacio sensible y se resuelven con técnicas motrices sobre las que se efectúa un control perceptivo. Para abordar los segundos, se modelizan geométricamente los objetos del espacio sensible, y es esta modelización geométrica la que dicta las acciones, aunque éstas pertenezcan al mundo sensible. Si, por el contrario, lo que se pone en juego son las propiedades geométricas y las técnicas de demostración deductivas características de la matemática, hablamos de un problema geométrico.

En función de los destinatarios de los libros, y de cómo conciben la enseñanza de la geometría sus autores, estos tres tipos de problemas estarán más o menos presentes, y ligados a ellos estarán las *funciones*[81] que puede tener el dibujo y con ello las de los instrumentos asociados. Así, en los textos analizados los dibujos:

- Apoyan la definición de objetos geométricos, el enunciado de propiedades o el planteo de problemas para ayudar a visualizarlos y facilitar así su comprensión (función *representativa*[82] del dibujo). En este caso, el

[80] Noirfalise, Annie y Matheron, Yves: *Enseigner les Mathématiques a l'École Primaire. Géométrie, Grandeurs et Mesures*. Vuibert, Munich, 2009.

[81] Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «Propuestas de uso de los instrumentos de dibujo para la enseñanza de la Geometría en la edad de plata». En: Ana María Badanelli Rubio; María Poveda Sanz y Carmen Rodríguez Guerrero (Eds.), *Pedagogía museística. Prácticas, usos didácticos e investigación del patrimonio educativo*, pp. 391–400. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Educación, Madrid, 2014.

[82] Font, Vicenç; Díaz Godino, Juan y D'Amore, Bruno: «An onto-semiotic approach to representations in mathematics education». *For the learning of mathematics*, 2007, **27(2)**, pp. 2–7.

Esta doble función ha sido estudiada, con relación al material de enseñanza diseñado por Eyaralar, en Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «En-

dibujo sirve de apoyo a la intuición, tal como reconoce Eyaralar: «Parece que en los problemas gráficos, la intuición es constante, porque el niño tiene el problema delante de los ojos. Sin embargo, convendría que tuviese el problema completo, no los datos solamente»[83]; y aconseja por ello hacer un 'croquis' o dibujo del problema.

En las *Lecciones de Cálculo*, de Charentón, el dibujo cumple esa función, sobre todo en el grado preparatorio, en el que no se utilizan apenas instrumentos clásicos de dibujo, salvo la regla, y muchos de los dibujos se hacen 'a ojo'; en el grado elemental, en algunas ocasiones, el dibujo desempeña alguna de las funciones que especificamos a continuación, por ejemplo: «Dibujar de memoria objetos de forma cuadrada»[84]; «Con el compás y la regla traza perpendiculares a una recta: A), en su punto medio; B), por un punto fuera de la recta; C), por un punto situado en la recta»[85].

- Sirven de herramienta para investigar propiedades geométricas o resolver problemas. Aquí la función del dibujo, en tanto que ligada a las prácticas que permite o facilita, la podemos calificar de *instrumental*, y está acorde con el principio de actividad de la Escuela Nueva.

  En este caso nos referimos tanto a los dibujos realizados con mayor o menor precisión gracias al uso de instrumentos en su mayoría convencionales, como a los dibujos a mano alzada, para realizar lo que se denomina 'figuras de análisis' (las que se hacen para explorar, conjeturar, en general, hallar relaciones...; estas figuras no suelen respetar las relaciones métricas entre sus elementos, que a veces constituyen la solución del problema)[86]. En el caso de un dibujo preciso será posible una validación pragmática (por ejemplo, comprobar que dos segmentos son iguales transportando uno sobre otro con un transportador), mientras

señanza intuitiva y representaciones gráficas en Eyaralar». En: Víctor Juan (Ed.), *Museos Pedagógicos. La memoria recuperada*, pp. 175–183. Museo Pedagógico de Aragón, Huesca, 2008

[83] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 92.

[84] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio...*, op. cit., p. 69.

[85] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 86.

[86] Hitzcovich, Horacio: *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2005.

que las figuras de análisis son como modelos geométricos sobre los que no es posible ese tipo de validación.

Estas dos funciones que hemos citado (representativa e instrumental, sobre todo ésta última) se observan cuando se plantean *proyecciones* de un objeto sobre uno o varios planos. Son actividades citadas por la mayoría de los profesores, que aluden a su importancia para la geografía, la agrimensura, las artes, los trabajos manuales y los oficios[87], así como una *técnica* que ayuda a resolver ciertos problemas[88]. La importancia de esta clase de dibujos es tal que Paunero diseña un aparato para facilitar la realización de las tres proyecciones según planos ortogonales entre sí[89], con la intención de «señalar un camino que permita poner al alcance de los niños de los últimos grados de las escuelas primarias las nociones de dibujo de proyección que puedan serles útiles, y de aplicación inmediata en los trabajos de la industria»[90].

- Comunican una demostración o un procedimiento para construir un cierto objeto geométrico, es decir, los pasos del programa de construcción. Aquí se hace presente la función instrumental –en tanto que la construcción se realiza mediante el dibujo–, y la representativa, en tanto que muestra el proceso a seguir y, en ocasiones, elementos justificativos.

Estas funciones no son excluyentes; el dibujo tiene un papel en la construcción de los conocimientos pero también en las aplicaciones: «El dibujo geométrico debe ser considerado como una destreza correspondiente a los conocimientos matemáticos que prepara y cuya aplicación es, teniendo además en cuenta que cuando sea posible debe ser *razonado*»[91].

Precisamente uno los consejos que enumera Eyaralar sobre una lección de matemáticas (sección 6.3.2, p. 403), en el que está considerando el dibujo como *técnica didáctica*, hace referencia a este *gesto*: «Es preferible hacer los dibujos en la pizarra a tenerlos preparados (interés del movimiento)»[92].

[87] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 13.
[88] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., pp. 106-107.
[89] Ver p.458 del apartado 7.2.1. Paunero Ruiz, *Una lección sobre...*, op. cit., p. 10.
[90] Paunero Ruiz, *La enseñanza de la Geometría...*, op. cit.
[91] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 13.
[92] Ibídem, p. 399.

4.1.5.2. Los instrumentos de dibujo

En los libros de geometría analizados no solo destaca la cantidad de ilustraciones, sino que muchos de ellos muestran imágenes de útiles de dibujo, ya sea para apoyar su descripción o dando indicaciones sobre su uso. Son una constante en los temas o 'lecciones' los apartados cuyo título se refiere a algún instrumento de dibujo. En el caso del libro de Rey Pastor y Puig Adam, es frecuente que las lecciones tras el título lleven por subtítulo el nombre del instrumento asociado a ellas:

«Lección 9.ª.- La traslación y el paralelismo (ángulos). (Instrumentos: La regla y la escuadra)»[93].

Los instrumentos de dibujo, además de para facilitar el trazado de objetos geométricos y ayudar así a resolver problemas, en las obras estudiadas se emplean con varios propósitos:

- Por un lado apoyan la comprensión de propiedades, como cuando se ejemplifica la propiedad de que si una recta tiene dos puntos en un plano, entonces está contenida en dicho plano, apoyando una regla en dos mesas juntas, en cualquier dirección[94]. O cuando se propone el uso de la escuadra para comprobar que la recta perpendicular a un plano forma un ángulo recto con todas las rectas que pasan por su pie en dicho plano[95].

- Pero los propios instrumentos de dibujo también son usados para plantear problemas, como cuando se pide la 'comprobación' del instrumento. Por ejemplo, para comprobar la escuadra, Eyaralar propone trazar la perpendicular en el mismo punto de una recta, en dos posiciones diferentes, con lo que debe obtenerse la misma recta. Además pregunta: «¿Por qué?»[96].

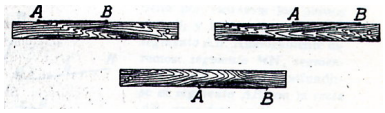
Eyaralar propone un problema que consiste en demostrar que si en un triángulo rectángulo un ángulo agudo es el doble del otro, el lado también

[93] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos y Compementos de Geo...*, op. cit., p. 48.
[94] Ibídem, pp. 7-8.
[95] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 83.
[96] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 42.

mide el doble. Y entonces recuerda que los cartabones[97] se construyen con esas condiciones[98].

Aunque también en esto podemos percibir diferentes grados de intuición y de rigor. Así, Rey Pastor y Puig Adam[99] proponen, como aplicación de la propiedad de que por dos puntos pasa una única recta, la comprobación de una regla (figura 4.8, p. 271)

Dados dos puntos, el dibujante puede apoyar en ellos el borde de la regla de muchos modos. Si la regla es recta todas las líneas que así pueden trazarse coincidirán.



Si se obtiene alguna línea no coincidente debe desecharse la regla.

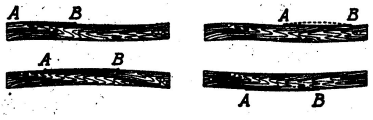
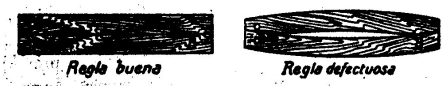


Figura 4.8: Rey Pastor y Puig Adam. Comprobación de una regla

Y más adelante, una vez estudiada la simetría axial y como aplicación, esta otra manera[100]:

> Como los únicos puntos que no se mueven en el rebatimiento son los del eje, podemos comprobar si el borde de una regla es recto rebatiéndola alrededor de dos puntos A y B de dicho borde, como indica la figura, lo cual es más preciso y breve que lo indicado en el párrafo 6.º



Manuel Xiberta[101], en cambio, propone directamente este último procedimiento para comprobar la regla, más fiable matemáticamente, pero que hace intervenir otros conocimientos menos elementales, como los relativos a las isometrías, además de la mera definición de recta.

[97] En el texto dice 'escuadras'.

[98] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 87.

[99] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos y Compementos de Geo...*, op. cit., p. 7.

[100] Ibídem, p. 43.

[101] Xiberta Roqueta, Manuel: *Elementos de Geometría.* Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, Madrid, 1928, p. 13.

Por su parte José María Eyaralar, tras plantear igualmente comprobar la regla «adaptándola a dos puntos fijos, trazando el segmento, invirtiendo la regla y trazando de nuevo el segmento», añade: «Si los dos trazados no coinciden, la regla no es útil *(¿Por qué?)*»[102]. Traspasando con ello al alumno la responsabilidad de justificar la técnica y forzándole a que movilice ciertas propiedades, valiéndose de este instrumento material.

- En ocasiones las cuestiones surgen a partir de la propia construcción del instrumento, regla, escuadra, compás, limbo graduado... Un punto sobre el que se insiste en los libros es la construcción de instrumentos de dibujo o de otros alternativos que pueden usarse como sustitutos. Pero la intención varía según la epistemología del profesor y el grado de asunción de los principios pedagógicos que se estaban difundiendo en ese momento. En efecto, la construcción de los instrumentos de dibujo con papel u otro material tiene un doble propósito. Por un lado, paliar la no disponibilidad de instrumentos de dibujo, algo que había que tener presente, en el caso sobre todo de la escuela primaria donde la situación económica de muchos alumnos podía ser precaria. Pero no solo por eso.

La construcción de instrumentos proporciona la ocasión para poner en juego los conocimientos geométricos, por ejemplo, sobre el ángulo recto: «Puede improvisarse una escuadra plegando dos veces un papel de modo que el primer doblez se pliegue sobre sí mismo en un segundo plegado»[103]. Este mismo procedimiento lo vemos en las obras de geometría de Comas y de Eyaralar, pero no en las de Xiberta.

Incluso hay diferencias significativas en la misma manera de describir el utensilio. En el caso de la escuadra, Xiberta la describe como «un *instrumento de madera, metal, cristal, etc.*, con dos aristas AO y OP en ángulo recto [remite a un dibujo]»[104], descripción que alude a *cómo* es la escuadra; otros autores, que hemos señalado como partidarios de una enseñanza de la matemática mucho más guiada por la intuición, ponen la atención en su

[102] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 15. La cursiva es nuestra.

[103] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos y Compementos de Geo...*, op. cit., p. 44.

[104] Xiberta Roqueta, *Elementos de Geometría*, op. cit., p. 21. La cursiva es nuestra.

funcionalidad: «Puesto que todos los ángulos rectos son iguales basta tener uno que sirva de plantilla. La escuadra es *una plantilla* triangular que tiene un ángulo recto»[105].

El uso no transparente de los instrumentos de dibujo es otra muestra de la atención que se les brindaba. Es frecuente hallar no solo descripciones precisas, sino también instrucciones sobre cómo colocar los instrumentos para hacer los trazados y, en general, no se mencionan nuevos instrumentos sin que figuren estas indicaciones. Los instrumentos de agrimensor o los de los oficios en general, se comentan de forma paralela a los de dibujo, para dar sentido a los problemas planteados con éstos últimos, vinculándose así la geometría con la vida cotidiana.

Asimismo incluyen comentarios sobre la existencia de diferentes diseños de los instrumentos –destacando con ello qué es lo realmente relevante y qué debe permanecer invariable–, y comentan la conveniencia de uno u otro diseño. Por ejemplo, sobre el transportador y medidor de ángulos, aunque ambos señalan que la forma de su borde no es importante, Eyaralar opina que es mejor que tenga una forma rectangular[106], mientras que Rey Pastor y Puig Adam abogan por que sea semicircular, por la mayor facilidad para percibir a simple vista la igualdad de arcos que la de ángulos[107].

Y se aprovecha el cuestionamiento sobre el diseño del instrumento para proponer problemas interesantes: «¿Cómo podrían utilizarse los transportadores de que tratamos si no tuviesen más que una graduación [en lugar de graduación doble, para medir un ángulo y su suplementario]? ¿Cómo podría obtenerse con ellos la medida de un ángulo convexo?»[108].

4.1.5.3. Instrumentos alternativos a los clásicos

La influencia de las ideas de la Escuela Nueva en los autores analizados se manifiesta no solo en la importancia que conceden al dibujo y al uso de los instrumentos característicos del dibujo geométrico, sino también en la

[105] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos y Compementos de Geo...*, op. cit., p. 44. La cursiva es nuestra.
[106] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., pp. 30-31.
[107] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos y Compementos de Geo...*, op. cit., p. 64.
[108] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 31.

consideración que otorgan al empleo de otros materiales que podemos llamar de uso común, como el papel, el hilo, etc., usados también a veces como auxiliares para el dibujo[109] y más ligados a la intuición.

Así, el prólogo del libro de **Puig Adam** y **Rey Pastor**, comienza con una enumeración de los materiales para el curso: «Unas tijeras, un ovillo de hilo, una regla, un par de escuadras, un compás, un rollo de papel de calco, unos cartones, un paquete de lápices y un montón muy grande de hojas de papel»[110]. **Eyaralar**, por su parte, considera indispensable en geometría

> la plomada, el nivel, una escuadra en el espacio, es decir, tres varillas perpendiculares entre sí. El loto de formas. La falsa escuadra con agujeros equidistantes por los que pasa un hilo para relaciones entre lados y ángulos. Una regla y una escuadra inexactas.
>
> Un círculo dividido en 3, 6, 4, 8, 5, 10 partes iguales[111].
>
> Paralelogramo transformable [...]
>
> La cinta pantógrafo [...]
>
> Cadena de agrimensor. Cinta métrica. Varillas de hierro marcadoras. Jalones. Grafómetro construido por los alumnos[112].

Los libros de **Xiberta** revelan una visión de la matemática, y de la geometría en particular, más formalista, en la que se concede menos importancia a la intuición. Afirma que «las construcciones gráficas con la regla y el compás son las únicas que merecen el nombre de *construcciones geométricas*»[113], y aunque propone utilizar en alguna ocasión el hilo o el papel, predominan casi exclusivamente los instrumentos de dibujo, sean los dos de la geometría clásica –regla y compás– u otros habituales como la escuadra o el limbo graduado. Solo en alguna ocasión cita algunos menos típicos como el compás de punta fija (para trasladar distancias) o el pantógrafo.

[109] En este apartado nos interesa la técnica del dibujo geométrico y nos ocupamos de otros materiales en cuanto a instrumentos o auxiliares del dibujo, sin referirnos al resto de acciones en las que intervienen.

[110] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos y Compementos de Geo...*, op. cit., Prólogo.

[111] Esto recuerda al Disco EYA, material para el dibujo diseñado por Eyaralar, que describimos en 7.2.4.2, p. 470 y que está en la figura 7.10.

[112] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 223.

[113] Xiberta Roqueta, *Elementos de Geometría*, op. cit., p. 40.

La *epistemología de la matemática* de cada profesor influye en sus prácticas docentes, en particular en las relativas al uso de instrumentos o materiales concretos. Quienes propugnan una enseñanza más intuitiva limitan o retrasan el uso de algunos instrumentos típicos como el compás, a favor de otros útiles de dibujo más elementales o incluso de otros materiales, y justifican además con argumentos matemáticos esta opinión. Como cuando se aconseja empezar con el papel de calco, que «permite efectuar de una vez ciertos tipos de movimiento, mientras que con la regla y el compás es preciso efectuar para cada punto una construcción especial y no aparece en ella el concepto de grupo»[114], y aplazar el uso del compás hasta estudiar los movimientos o isometrías. Igualmente **Eyaralar** sugiere la siguiente progresión en el uso de este instrumento: «En el primer grado se recurrirá, principalmente, al plegado del papel [...] en el segundo grado, el dibujo, con regla y escuadra, proporciona todas las figuras; y en el tercero se utilizarán, casi exclusivamente, la regla y el compás»[115]. Y años después afirma que «los medios auxiliares pueden ser en un principio las figuras recortadas, el "Disco EYA" y la regla, y a lo más, la escuadra y el cartabón. Sólo más adelante podrá utilizarse el compás, y solo más tarde aun con exclusión»[116].

Este profesor insiste en no limitarse a la regla y el compás de la geometría clásica:

> En la Didáctica de esta ciencia en las clases elementales, hemos de suprimir toda clase de limitaciones. El transportador de segmentos (simple tira de papel), el de ángulos (semicírculo graduado), las escuadras, que tanto simplifican las construcciones, deben utilizarse ampliamente[117].

Por otra parte, las acciones realizadas con esos instrumentos alternativos –como una tarjeta de cartulina para transportar un ángulo– son un punto de partida para entender después el fundamento de las acciones llevadas a cabo con los instrumentos de dibujo convencionales.

[114] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos y Compementos de Geo...*, op. cit., Prólogo.
[115] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 10.
[116] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 101. El disco EYA está en la figura 7.10, p. 471.
[117] Ibídem, p. 103.

4.1.5.4. Tareas que involucran técnicas de dibujo

La utilización del dibujo y de los instrumentos de dibujo en el estudio de la geometría condiciona las tareas que es posible abordar y las técnicas utilizadas para su resolución, así como las propiedades geométricas que se estudian y la justificación de las mismas. Ya hemos mencionado varias tareas que conllevan dibujar al enumerar las funciones del dibujo. Ahora nos referimos a algunos tipos de *tareas* que se plantean en las obras estudiadas, en relación con el dibujo geométrico y las *técnicas* indicadas para realizarlas, como también las *justificaciones* de las técnicas empleadas. En particular analizaremos la relación entre las técnicas y los útiles de dibujo asociadas a ellas, vinculándola con el tipo de justificaciones que promueven.

Veamos cómo una misma *tarea* puede conllevar un uso diferente de los instrumentos de dibujo en función de la *técnica* usada para abordarla, y cómo esto a su vez determina el tipo de validación posible, según los elementos justificativos que intervienen. Concretamente, ante la tarea de demostrar que el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos cuyos lados pasan por dos puntos fijos A y B es la circunferencia de diámetro AB, se proponen dos técnicas.

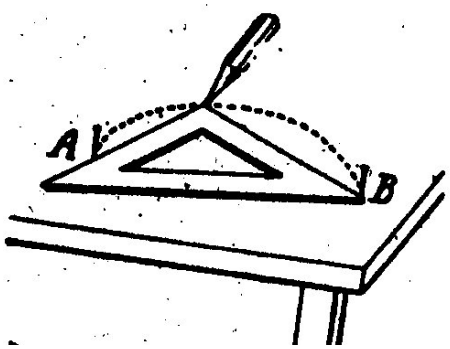


Figura 4.9: Rey Pastor y Puig Adam. La circunferencia como lugar geométrico (1)

La primera (figura 4.9, p. 276) alude a una comprobación experimental y para el dibujo se emplea una escuadra y dos alfileres: «Deslícense los bordes del ángulo recto de una escuadra contra dos finos alfileres clavados en los puntos A y B del papel. El vértice del ángulo recto irá describiendo la

circunferencia de diámetro AB»[118]. La segunda técnica (figura 4.10, p. 277), propuesta a continuación en el mismo libro, es una demostración deductiva, basada en la descomposición del triángulo rectángulo en dos triángulos isósceles y en la circunferencia como lugar geométrico de puntos que equidistan del centro, para luego razonar sobre la medida de los ángulos.

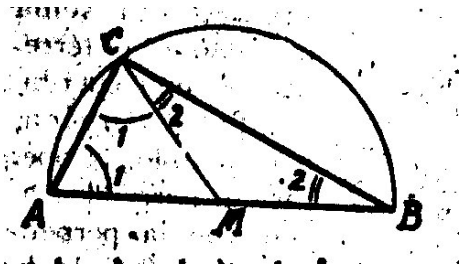


Figura 4.10: Rey Pastor y Puig Adam. La circunferencia como lugar geométrico (2)

La primera técnica va asociada a un problema de los que definimos como prácticos y la validación, para la que la escuadra es necesaria –no basta con aludir a ella–, es empírica, mientras que la segunda da lugar a un problema geométrico, teórico, que puede resolverse sin la manipulación física de ningún instrumento de dibujo[119]

Del mismo modo que distintas técnicas llevan asociados distintos instrumentos, también los instrumentos de los que se dispone o no, van a favorecer unas técnicas y a dificultar, incluso impedir, que puedan emplearse otras.

Las restricciones impuestas sobre los instrumentos de dibujo permitidos constituyen lo que se denomina *variables didácticas* de la situación o problema, es decir, condiciones que pueden variar a voluntad del docente y que determinan las estrategias o los procedimientos posibles y el conocimiento que se habrá de poner en juego para resolver la tarea[120]. Los autores estudiados, al prohibir el uso de ciertos instrumentos o imponer la utilización

[118]Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos y Compementos de Geo...*, op. cit., p. 91.

[119]Aunque para realizar el dibujo con exactitud se necesitarían instrumentos, podría recurrirse a lo que se denomina una 'figura de análisis', suficiente para servir de soporte al razonamiento matemático.

[120]Fregona, Dilma y Orús Báguena, Pilar: *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2011.

de alguno concreto en ciertos enunciados, determinan así las técnicas susceptibles de ser empleadas. *Técnicas* que, por otra parte, van asociadas a su vez a los conocimientos que es preciso hacer funcionar, por ejemplo, ciertas propiedades geométricas:

> Trazar un ángulo igual a otro:
> a) con el papel de calco,
> b) con una hoja rectangular, sobre cuyos bordes se marcan el vértice y un punto correspondiente a cada lado,
> c) con el transportador,
> d) con la regla y el compás[121].

Pasamos de un problema práctico (la verificación es perceptiva, superponiendo una figura a otra) a uno de modelización (precisa el uso de algunas propiedades geométricas), y de éste a uno geométrico en el último apartado en el que, al exigir el uso exclusivo de la regla y el compás, es necesario no solo movilizar determinados conocimientos geométricos, sino el uso de métodos de razonamiento propios de la matemática.

Los instrumentos pertenecen al espacio físico, mientras que los dibujos representan un espacio conceptualizado. En los autores estudiados, algunas veces permiten llegar a la respuesta por una constatación sensorial, en el nivel elemental, pero, en todo caso, la intención es poner en juego propiedades de los objetos geométricos y promover la argumentación y el razonamiento a partir de ellos. Los instrumentos son el medio para hacer construcciones y para manipularlas, y así explorar, hacer conjeturas y justificar sus propiedades.

Pero si existe una clase privilegiada de problemas geométricos en los que Geometría y Dibujo son inseparables es la de las llamadas «Construcciones con regla y compás». De ellas, y del papel que tenían, vamos a ocuparnos.

Los problemas *de construcción* se caracterizan porque en ellos se pide cómo obtener una figura que satisfaga ciertas condiciones[122]. Por ejemplo, hallar el centro de un arco de circunferencia dado, o construir un triángulo

[121] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 105.

[122] El término 'figura' está usado en sentido amplio, puede ser un punto, una recta, una circunferencia, etc.

isósceles cuyo lado desigual sea un segmento dado[123]. En particular, en los llamados 'de regla y compás', éstos son los únicos instrumentos permitidos.

La técnica para resolverlos se identifica con el 'programa de construcción', o secuencia de acciones que hay que llevar a cabo para construir el objeto geométrico solicitado. En este caso, la limitación de instrumentos da lugar a un razonamiento teórico, por el método clásico de análisis-síntesis que consta de cuatro fases o momentos: análisis (partiendo de los objetos dados, se analizan sus propiedades y se eligen las compatibles con la regla y el compás, hasta deducir la relación con la figura que queremos obtener, que hemos supuesto construida), construcción (un programa de construcción de la figura paso a paso), demostración (asegurarse de que la figura cumple las condiciones requeridas) y discusión (normalmente cuestiones de unicidad o número de soluciones).

Es interesante analizar el lugar de este tipo de problemas en los autores estudiados.

Manuel Xiberta caracteriza los problemas con regla y compás, delimitando cuáles pueden resolverse sin usar más que estos dos instrumentos, y explicita las únicas operaciones posibles con ellos: trazar la recta que pasa por dos puntos previamente construidos, trazar la circunferencia dados el centro y el radio, y construir el punto intersección de dos circunferencias o de una circunferencia y una recta. En cualquier caso, aclara que permitiendo además el uso de la escuadra y el semicírculo graduado se simplifican bastante las construcciones. Defiende el método de análisis-síntesis con todas sus etapas, por cuanto reducirlo al de síntesis prescindiendo del análisis no permite al alumno enfrentarse a construcciones desconocidas de antemano: «Otra consecuencia es que en lugar de ser los alumnos sujetos activos de la enseñanza, [...] aquéllos actúan de meros receptores, quedando así poco menos que anulado el valor educativo de la enseñanza de las matemáticas»[124]. Además muestra con ejemplos los diferentes procedimientos para resolver un problema de este tipo (transformación de figuras, semejanza, superficies equivalentes...), en particular el de los *lugares geométricos*[125].

[123] En el primer caso la solución es única y en el segundo hay infinitas soluciones.

[124] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit., pp. 53-54.

[125] Ibídem. Un lugar geométrico es el conjunto de los puntos (ninguno, uno, un conjunto finito o infinito, una figura en general) que satisfacen una determinada condición.

José María Eyaralar describe igualmente las cuatro fases citadas para un problema de construcción, pero al mismo tiempo hace algunas observaciones interesantes. Una de ellas se refiere a la construcción de la figura que se supone construida en el momento del análisis: «Es preciso trazar figuras diferentes para evitar casualidades que inducirían a error, y no adoptar posiciones o formas particulares, como por ejemplo, dibujar triángulos isósceles, o rectas que sean perpendiculares cuando no hayan de ser así necesariamente»[126]. Es decir, da consejos sobre cómo ha de ser una figura de análisis para que pueda cumplir este papel. Pero, sobre todo, es consciente de que las limitaciones impuestas por la restricción de los instrumentos, buenas para «desarrollar el ingenio de los matemáticos», no son aconsejables en la enseñanza, ya que «el utilizar el mayor número posible de instrumentos permite resolver problemas, que sólo con la regla y el compás no pueden resolverse, o facilitar extraordinariamente las construcciones»[127], y proporciona ejemplos de construcciones en las que interviene la escuadra, etc.

En su obra *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría*, escrita en el periodo en el que Xiberta publica su *Metodología*, y a diferencia de éste, anima a prescindir en la enseñanza de todos los métodos de construcción, salvo el de los lugares geométricos, al permitir un razonamiento por análisis-síntesis elemental, pero que considera de alto valor educativo.

El texto de **Rey Pastor** y **Puig Adam**, cuya intención declarada es presentar una geometría elemental e intuitiva, también utiliza la noción de lugar geométrico, pero no contiene ejemplos en los que se detallen las cuatro fases diferenciadas en un problema de construcción geométrica. La fase del análisis aparece implícita y es evocada parcialmente en las justificaciones.

Un aspecto en el que coinciden todos los profesores estudiados es la gran importancia de la justificación de las técnicas; en los textos de Rey Pastor y Puig Adam y de Eyaralar a veces la justificación viene demandada a partir de una construcción o solución a un problema con utensilios o materiales de dibujo diferentes a los instrumentos clásicos, solución en cuya justificación intervienen propiedades similares a las manejadas en el análisis previo, como

[126] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 286.
[127] Ibídem, p. 298.

sucede en el siguiente ejemplo, que aparece propuesto tras la solución al problema de dividir un segmento en (cinco) partes iguales únicamente con regla y compás. En él se da la solución al problema utilizando papel rayado y un transportador de segmentos[128] (figura 4.11, p. 281). De nuevo vemos cómo el material disponible influye en la técnica posible.

Si se dispone de papel rayado con rayas equidistantes [...], pues bastará transportar el segmento AB de modo que un extremo esté sobre una raya, y moverlo luego hasta que el otro extremo se sitúe cinco rayas más allá. Las rayas intermedias darán los puntos de división buscados. ¿Por qué?

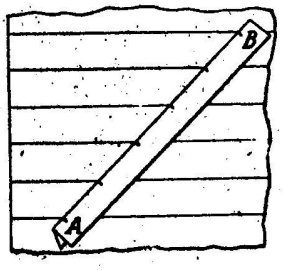


Figura 4.11: Rey Pastor y Puig Adam. División de un segmento en partes iguales

Este mismo procedimiento aparecía en el libro de geometría de Juan B. Puig para el grado medio. Y, como aplicación, la manera de dividir un segmento en dos partes según una razón dada[129] (figura 4.12, p. 281).

Si se quisiera dividir la misma recta AB, en dos partes proporcionales, por ejemplo, 2:5, tómese la longitud de las 2 primeras intersecciones y la de las 5 restantes, y quedaría resuelto el problema

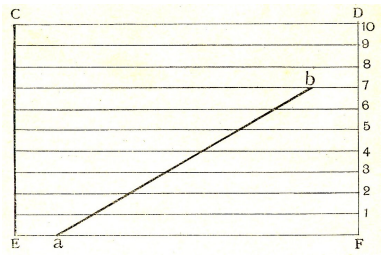


Figura 4.12: Puig. División de un segmento en partes proporcionales

En todo caso, estos profesores explican la necesidad de construcciones teóricas, ligadas al uso de instrumentos de dibujo a los que evocan, pero sin su presencia ni las acciones reales con ellos: «Con aparatos teóricamente perfectos, las construcciones por tanteo no sirven, y por ello los sabios han ideado construcciones exactas»[130].

[128] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos y Compementos de Geo...*, p. 107.
[129] Puig, *Geometría...*, op. cit, p. 9.
[130] Ibídem, p. 113.

No obstante, resaltan la importancia de la justificación para fomentar el razonamiento matemático. En ese caso comienzan siendo validaciones ligadas a la comprobación experimental, o en las que no se limitan tanto los instrumentos, lo que amplía no solo las técnicas de solución, sino también las de demostración, ligadas a la construcción.

4.2. El Álgebra

El Álgebra es una de las asignaturas del Plan de 1914. Se impartía solamente en tercer curso. En la educación normalista hay testimonios de que en muchas ocasiones las horas que el plan de estudios destinaba al álgebra no se dedicaban solo a la enseñanza de esta materia. Eyaralar, por ejemplo, reconocía que acababa las clases dedicadas al álgebra a principios de febrero, y después se dedicaba a actividades relacionadas con la metodología didáctica y la práctica[131]. La aritmética y la geometría, por ser materias básicas y con presencia en todos los programas de todos los cursos de la enseñanza primaria, acaparaban más tiempo; los contenidos algebraicos eran pues bastante limitados.

La documentación de la que disponemos nos permite hacernos una idea de cómo concebía la enseñanza del álgebra cada profesor y qué visión tenía de ella y de sus relaciones con otras partes de la matemática. Para ello nos basaremos en los libros de metodología de Charentón, Eyaralar, Sáiz y Xiberta, principalmente, y en ciertos artículos publicados en la *Revista de Escuelas Normales* por alguno de ellos. Ocasionalmente también haremos referencia a algunas publicaciones de otros autores, que solo de manera puntual y esporádica hacen comentarios relativos a la enseñanza del álgebra. En cualquier caso, solo disponemos de un libro dedicado al álgebra escrito por un profesor normalista (Xiberta) en los años que estudiamos[132]. Eyaralar se refiere a su *Nuevo Tratado de Álgebra* en 1924, en una nota a pie en el *Nuevo Tratado*

[131] Eyaralar Almazán, José María: «Lo profesional en la enseñanza de las matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **14**, pp. 115–116.

[132] Xiberta Roqueta, Manuel: *Elementos de Álgebra*. La editorial gerundense, Gerona, 1920. Sáiz Salvat había publicado un libro, pero solo de ejercicios. Sáiz Salvat, Felipe: *Ejercicios y problemas de álgebra*. Librería Bastinos de José Bosch, Barcelona, 1930.

de Geometría; pero, en 1927[133] escribe que tiene casi ultimado su libro de Álgebra para las clases; lo cierto es que no hay evidencia alguna de que dicho libro fuera publicado. Es más, en el libro *Didáctica de los Problemas de Aritmética y Geometría*, de 1936, en el que estudia problemas de ecuaciones y de álgebra, no cita ninguna obra suya de esta materia[134].

Según Pilar Bolea[135], para estudiar la manera de considerar el álgebra en una institución, hemos de tener en cuenta indicadores relacionados con sus razones de ser, los conocimientos previos sobre los que se construye, los elementos más significativos de las actividades que se proponen y las principales dificultades en relación con las actividades algebraicas. Estos indicadores permiten determinar la epistemología en relación al álgebra.

Esta autora ha descrito dos modelos específicos del álgebra escolar. Uno de ellos, que coincide con el modelo epistemológico comúnmente aceptado, incluso en la actualidad, considera el álgebra como una 'aritmética generalizada', que prolonga los métodos aritméticos, consiguiendo así una mayor generalidad y eficacia en la resolución de problemas. El álgebra escolar se confunde con el lenguaje simbólico, que generaliza el aritmético, y las prácticas y actividades algebraicas se interpretan como extensión de las aritméticas, que sirven para caracterizarlas y describirlas. El modelo alternativo de álgebra escolar la considera como instrumento de modelización matemática:

> Desde este punto de vista, una actividad matemática será "algebraica" en la medida que: permita la manipulación global de la estructura de los problemas; incluya la problemática relativa a la descripción, justificación y alcance de las técnicas que se utilizan; unifique los tipos de problemas, técnicas y tecnologías; y provoque la emergencia de nuevos tipos de problemas con la consiguiente ampliación de los mismos[136].

[133] Eyaralar Almazán, José María: «Una clase de Matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1927, **41, 44 y 45**, pp. 11–12, 143–145 y 181–183.

[134] Ver el apartado 2.5.1.1, pp. 112 y sig.

[135] Bolea Catalán, Pilar; Bosch Casabó, Marianna y Gascón Pérez, Josep: «La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2001, **21(3)**, pp. 247–304.

[136] Bolea Catalán, Pilar: *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2002, p. 91.

Veremos en qué medida la epistemología de los profesores que estudiamos responde al primero de los modelos mencionados. En algún caso hallamos indicios de que, en ciertos aspectos, su visión del álgebra compartía algunos elementos del modelo de álgebra como un instrumento para la modelización matemática.

Estudiaremos cuál es la relación que establecen estos profesores normalistas entre aritmética, álgebra y funciones; en particular del tratamiento dado a las ecuaciones y a la proporcionalidad.

Daniel Carretero declara utilizar la asignatura de Álgebra para poder tratar con más generalidad cuestiones aritméticas que no se han podido estudiar suficientemente los dos cursos anteriores; los ejemplos que pone son las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación.

> Y nuestro procedimiento consiste en hacer el estudio general de la operación con la consideración y demostración de las leyes que la caracterizan: la ley de uniformidad, la ley conmutativa, la asociativa, la distributiva; y como consecuencia de estas leyes llegamos a deducir los modos operatorios empleados en Aritmética y en Álgebra[137].

Para el producto de polinomios considera dos números expresados como sumas de unidades de diferentes órdenes y, operando como en aritmética, deduce las reglas operatorias algebraicas. Pero ni siquiera se refiere a la descomposición polinómica de un número, sino tan solo a una suma de números. Es decir, lo que realmente hace es una operación que se sitúa en el campo de la aritmética y apenas hay un proceder algebraico, salvo por el hecho de que 'conserva la traza' de las operaciones realizadas en la expresión final del cálculo. De lo que no hay duda es del modelo epistemológico del álgebra –una *Aritmética Universal*– que subyace:

> La razón de nuestro modo de realizar la enseñanza del Álgebra es que preferimos al mero hecho de recordar principios estudiados en cursos anteriores, demostrarlos nuevamente y, al hacerlo, darles el con-

[137] Carretero Riosalido, Daniel: «Una lección de Álgebra». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **20**, pp. 315–316. Cita en p. 315.

> cepto amplio y general con que se tratan las cuestiones en la Aritmética Universal[138].

Manuel Xiberta define al Álgebra elemental como la que trata del cálculo algebraico y de su aplicación a la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado. La resolución de ecuaciones de grado superior a dos, la combinatoria y la clasificación y estudio de las funciones en general sería el objetivo del Álgebra superior.

Su obra *Elementos de Álgebra*[139] está dividida en tres partes: cálculo algebraico (la sintaxis algebraica, regla de los signos, operaciones con polinomios, racionalización, cantidades imaginarias y operaciones con ellas, progresiones, logaritmos); «aplicaciones del cálculo algebraico» (ecuaciones y sistemas de primero y segundo grado, ecuaciones exponenciales, aplicación a problemas de interés compuesto y anualidades, inecuaciones); y análisis combinatorio (combinatoria y binomio de Newton).

El énfasis se pone en las reglas para efectuar las manipulaciones algebraicas y en la resolución de ecuaciones. Plantear el problema es «traducir al lenguaje algebraico el enunciado» o «ponerlo en ecuación»; una ecuación es «la expresión algebraica del enunciado de un problema». La diferencia con una fórmula es que ésta última es «la traducción algebraica de una ley matemática o enunciado de un teorema»[140]. Y señala igualmente como fines del álgebra, además de resolver problemas mediante ecuaciones, la investigación de fórmulas, o sea, «resolución de problemas generales cuyas soluciones son leyes o reglas aplicables a la resolución de todos los problemas particulares análogos»[141]. Esto lo aplican diferentes autores a la obtención de fórmulas que intervienen en los problemas de interés.

El tratamiento que Xiberta hace de los números negativos (números en los que se añade la 'cualidad' –hay dos cualidades opuestas– a su valor aritmético), le lleva a afirmar que cuando se obtiene alguna solución negativa, se obtendría una positiva de igual valor absoluto, con tal de reformar convenientemente el enunciado y el planteo: *«Las soluciones negativas son, en general,*

[138]Ibídem, p. 316.
[139]Xiberta Roqueta, *Elementos de Álgebra*, op. cit.
[140]Ibídem, pp. 196-197.
[141]Ibídem, p. 10.

verdaderas soluciones de los problemas; pero considerando su valor absoluto como de cualidad opuesta a la que se les atribuye en los enunciados»[142].

Margarita Comas apenas se ocupa del álgebra; no obstante cuando lo hace es para referirse al uso de letras para generalizar expresiones aritméticas: «¿Hasta que punto es conveniente el uso de letras en la aritmética elemental?»[143]. Relaciona la escritura algebraica con la abstracción, y la generalización con la expresión de una propiedad aritmética de la forma $ma + na = (m + n)a$.

Felipe Sáiz asocia el álgebra a las ecuaciones y éstas a la existencia de valores desconocidos en una igualdad. En otro momento se refiere a la importancia, en el álgebra, de dejar indicadas las operaciones. Emplea las técnicas algebraicas aprendidas para obtener, a partir de una fórmula, otras derivadas que «pueden obtenerse por vía de cálculo aritmético»[144]. Pone como ejemplos la relación entre los tres lados de un triángulo rectángulo, y las fórmulas para calcular el valor de cada una de las cantidades que aparecen en los problemas de interés simple. Sin embargo, pone el énfasis en la obtención de todas las 'reglas de cálculo' necesarias; más que en expresar la relación entre las magnitudes que intervienen y en cómo afecta la variación de una de ellas a las otras. Una fórmula es para él una regla de cálculo, no una relación de equivalencia en la que participan varias variables.

También para **José María Eyaralar** el lenguaje algebraico expresa de manera general leyes o procedimientos aritméticos:

> Cuadrado de un número.–Es una curiosa aplicación del teorema que permite formar el cuadrado de un polinomio con la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos, y el duplo de cada uno de ellos por todos los que le siguen.
>
> Constituye un buen ejemplo del carácter que creemos ha de tener la enseñanza del Álgebra en las Escuelas Normales, que es el de ser

[142] Ibídem, p. 271.
[143] Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., p. 21.
[144] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 40.

ampliación y repaso de la Aritmética, mostrando sus aplicaciones a ella[145] (figura 4.13, p. 287).

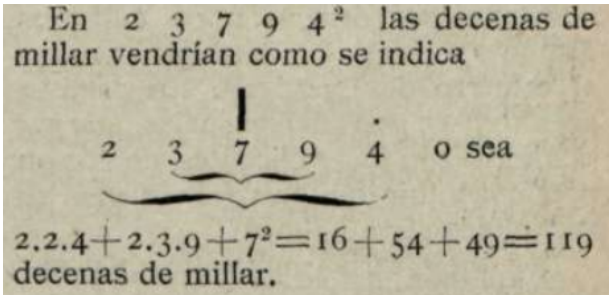


Figura 4.13: Eyaralar, José María. El cálculo mental. Revista de Escuelas Normales

E igualmente destaca la posibilidad de obtener fórmulas como una de las características del álgebra[146]. Pero ya en esto se manifiestan diferencias, en cuanto a la relación entre la aritmética y el álgebra, con los otros profesores mencionados. Respecto al ejemplo que estudia, el «problema de los móviles», comienza por aclarar:

> Su *importancia* consiste en ser un centro de asociación, por darse en él todas las continuaciones [sic, combinaciones] de magnitud y signo en los datos y de valores particulares en el resultado, con una significación que fácilmente se corresponde con la realidad. Se manifiesta así el verdadero valor del álgebra como instrumento de generalización que, a base de resolver un problema en un caso particular, obtiene una fórmula de generalidad tal, de tal flexibilidad pudiéramos decir, que comprende en sí todos los casos particulares posibles. Este valor puede ponerse aún más de manifiesto si previamente se ha tratado en Aritmética el mismo problema con todos sus variantes, por procedimientos puramente aritméticos[147].

[145] Eyaralar Almazán, José María: «El cálculo mental». *Revista de Escuelas Normales*, 1928, **50**, pp. 18–19. Cita en p. 19. La cursiva es nuestra.

[146] Ver p. 593, del apartado 8.3.2.2.

[147] Eyaralar Almazán, José María: «El problema de los móviles en la Escuela Normal». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **27 y 30**, pp. 249–250 y 330–331. Cita en p. 249.

La *técnica didáctica* empleada para revelar la necesidad del álgebra, o su potencia respecto a los procedimientos aritméticos, consiste en hacer resolver a los alumnos los mismos problemas en Aritmética y en Álgebra. Para Eyaralar «la resolución paralela de problemas por artificios aritméticos y por procedimientos algebraicos evidenciará las ventajas de estos últimos»[148].

Esa técnica solía llevar asociado en muchas ocasiones un *gesto* que había de presentar el álgebra como una generalización de la aritmética. **Francisco Romero** resuelve aritméticamente un problema: «En un bolsa hay 100 pesetas en monedas de 5 y 2 pesetas. En total, 32 monedas. ¿Cuántas hay de cada clase?». Y luego lo generaliza algebraicamente:

> *Generalización:*
> Sea X el número de monedas de 5 ptas.; el numero de monedas de 2 ptas. será (32 – X).
> Y tendremos:
>
> $5x + 2\ (32 - x) = 100$ ptas.
> $5x + 64 - 2x = 100$ ptas.
> $5x - 2x = 100$ ptas. - 64 ptas.
> $3x = 36$ ptas.; de donde
> $x = \frac{36}{3} = 12$
> $x = 12$ monedas de 5 ptas.
> $32 - 12 = 20$ monedas de 2 ptas[149].

Este ejemplo es una muestra clara de la visión del álgebra, y en particular de las ecuaciones, de este profesor. Simboliza las dos cantidades de monedas, pero tanto al plantear la ecuación –una mera 'traducción' del enunciado al lenguaje simbólico– como durante todo el trabajo hasta resolverla, no se desliga del contexto concreto; sin embargo, una de las cosas que caracterizan la modelización algebraica es que, una vez construido el modelo, se trabaja en un plano matemático –abstracto– con el modelo y solo se retorna al plano de lo real para interpretar las soluciones. Una expresión del tipo $2x - 5x$ no

[148] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 395.

[149] Romero Carrasco, Francisco: *Metodología de las Matemáticas. Procedimientos de cálculo mental y de cálculo escrito rápido*. Tip. y Lib. de A. Arqueros, Badajoz, 1933, pp. 36-37.

tendría sentido manejarla, lo que haría perder su valor a los procedimientos algebraicos. Es una muestra de que el modelo epistemológico del álgebra que subyace es el de una aritmética generalizada.

Xiberta dedica todo un capítulo de su libro de metodología[150], catorce años después de escribir el de *Álgebra*, a resolver problemas por los dos métodos, el reductivo y el algebraico. La única «norma general» que da para la resolución algebraica es: *«Indíquense con los datos y las incógnitas las mismas operaciones que se efectuarían para comprobar la verdad del enunciado»*:

> *Hallar un número tal, que sus $\frac{4}{7}$ más sus $\frac{3}{5}$ menos sus $\frac{2}{3}$ sea igual a 106.*
>
> *Método reductivo.*- Los $\frac{4}{7}$ + los $\frac{3}{5} = \frac{41}{35}$ – los $\frac{2}{3} = \frac{53}{105}$. Si los $\frac{53}{105}$ del número equivalen a 106, $\frac{1}{105}$ será igual a $\frac{106}{105}$,[151] y todo el número, o sea sus $\frac{105}{105}$ será
>
> $\frac{106x105}{53} = 210$
>
> *Método algebraico.*- Sea x el número propuesto. Se tiene la ecuación
>
> $\frac{4x}{7} + \frac{8x}{5} + \frac{2x}{3} = 106$
>
> que da: $x = 210$[152].

Otra de las funciones que atribuye **Sáiz** al álgebra es la de ser un medio de comprobación de problemas resueltos aritméticamente, y lo ejemplifica con un problema, que resuelve por ambos métodos[153].

Eyaralar tampoco se libera en un principio de esta interpretación; así destaca como principal escollo para plantear la ecuación que resuelve el problema, *«dar nombre a la incógnita que nos interese* (que no suele ser la que se pide) *y efectuar con ella y los datos las mismas operaciones que se harían para comprobar su valor»*[154]. Unos años después, la relación que propone entre ambas soluciones, la aritmética y la algebraica, ya no es la misma. Para el tercer grado de la escuela primaria propone resolver problemas, agrupados no por el contexto al que se refieran, sino por la estructura algebraica del

[150] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit., pp. 139-165.
[151] Debe decir: $\frac{106}{53}$
[152] Ibídem, p. 110.
[153] Ibídem., pp. 131—132.
[154] Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, op. cit., cita en p. 144.

problema (pone distintos ejemplos de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, según el valor de los coeficientes sea 0, 1, -1 u otro número de signo positivo o negativo), aunque se resuelvan aritméticamente. Por ejemplo, el problema *«Un padre quiere comprar a cada uno de sus hijos, zapatos de 9,50 ptas.; pero le faltan 2 ptas. Se los compra de 7,90 y entonces le sobran 4,40 ptas. ¿Cuántos hijos y cuánto dinero tenía?»*, lo resuelve primero mediante técnicas aritméticas:

> La diferencia de coste por cada par es 9,50 – 7,90 = 1,60.
> La diferencia total es 2 + 4,40 = 6,40 ptas.
> El número de pares o número de hijos = 6,40 : 1,60 = 4.
> Cantidad que posee, según el proyecto de compra,
> 9,50 x 4 – 2 = 38 – 2 = 36 ptas.
> *Respuesta: 4 hijos y 36 ptas.*

Ahora comprueba la solución y a continuación hace este comentario:

> *Observación*: este problema corresponde a la forma algebraica
> a x – y = c
> - a' x + y = c'

Y una observación que califica de general: «Nótese cómo el artificio empleado para resolver el problema aritméticamente, es la traducción de las operaciones necesarias para resolver, algebraicamente, el sistema de ecuaciones respectivo». Entonces resuelve el mismo problema en el campo del álgebra:

> Llamando x al número de hijos e y al dinero que lleva el padre, la condiciones del problema dan las ecuaciones siguientes:
> 9,50 x – y = 2
> y – 7,90 x = 4,40
> sumando las dos ecuaciones se obtiene:
> (9,50 – 7,90) x = 2 + 4,40
> en donde 9,50 – 7,90 es la diferencia de coste de un par y
> 2 + 4,40 la diferencia total.
> Por tanto, el número de hijos = x = 2 + 4,40 / 9,50 – 7,90 = 4

> corresponde a la forma que hemos dado para resolverlo aritméticamente[155].

Y concluye con una regla que califica de muy útil para el maestro: *«plantear y resolver el problema algebraicamente, y traducir la solución al lenguaje aritmético»*[156]. Así pues, ya no se trata de que la solución aritmética sea previa y dicte la algebraica, sino más bien al contrario. Recomienda que se establezca la estructura algebraica del problema; es decir, que se plantee en términos algebraicos, y sea esta solución algebraica la que se traduzca al lenguaje aritmético.

Algo parecido apunta **Sáiz**:

> Este procedimiento algebraico es muy socorrido para resolver problemas aritméticos cuya solución no se alcance de momento; en este caso, se resuelve algebraicamente y la serie de operaciones indicadas en la solución, determinan el camino para obtener la solución aritmética»[157].

Sáiz se refiere a *problemas particulares*, no a *clases de problemas*; Eyaralar en cambio trata clases de problemas y el criterio para agruparlos no es otro que el hecho de que pueden *modelizarse* con un mismo modelo algebraico y, como consecuencia, la secuencia de operaciones para llegar a la solución sea común. Tres años antes, en la *Metodología*, ya se muestra partidario de agrupar problemas aritméticos según el esquema (modelo) que se les pueda asociar; considera imprescindible estudiar estos tipos de problemas y su resolución –en lenguaje común– mientras no se estudiaran en la escuela primaria las ecuaciones; los declara provechosos como gimnasia intelectual, sobre todo cuando el álgebra no fuese necesaria o no supusiese una ventaja sobre la resolución aritmética. He aquí un ejemplo:

> *Fundamento:*
>
> $$\left.\begin{array}{c} a+b=S \\ \frac{a}{b}=n \end{array}\right\} \qquad \frac{S}{b}=\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=n+1, \qquad \frac{S}{n+1}=b$$

[155] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., pp. 52-53.
[156] Ibídem, p. 54.
[157] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 85.

> Ejemplo: *Un oficial y un aprendiz han cobrado 48 ptas. por una semana de trabajo. Sabiendo que el oficial cobra 3 veces más que el aprendiz, hallar la parte de cada uno.*
>
> El problema se traduce en lenguaje vulgar diciendo:
>
> Por *una* parte del aprendiz tiene 3 el oficial, y entre los dos 3 + 1 = 4 partes. Valor de una parte 48 : 4 = 12 ptas. Valor de 3 partes 12 x 3 = 36 pesetas, que representan lo cobrado semanalmente por uno y otro[158].

Lo significativo es que Eyaralar afirma: «El esquema sirve, además de para aclarar la resolución, para la invención de problemas de este tipo»[159]. Tenemos aquí problemas resueltos de manera aritmética, con un discurso explicativo propio de la lengua vulgar, pero que no se traduce en términos algebraicos con posterioridad. Al contrario, un modelo algebraico representa toda una clase de problemas, que admiten una solución aritmética, aplicación de la solución algebraica general a un caso particular, y permite generar problemas similares que respondan al mismo modelo. Recordemos que el álgebra no formaba parte de las materias de la escuela primaria, únicos estudios generalizados en la época en la que se sitúan las propuestas que analizamos.

4.2.1. Las técnicas para resolver ecuaciones

Para la resolución de ecuaciones de primer grado o de sistemas de varias ecuaciones, Xiberta proporciona procedimientos prácticamente algoritmizados, que se presentan al alumno como técnicas que ha de aprender y aplicar. Incluye una detallada discusión de las soluciones (existencia, unicidad, validez según el contexto del problema), incluso para las ecuaciones más triviales. Ambos hechos le llevan a obtener para la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} + 10 = 2(\frac{2x}{6} + 3)$ la solución $x = \frac{24}{0} = \infty$ y para la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} + 10 = 2(\frac{2x}{6} + 5)$ la solución $\frac{0}{0}$, de lo que deduce que la primera ecuación no tiene solución y cualquier número es solución de la segunda[160].

Esta resolución se relaciona con el tratamiento que hace de las cuestiones de Análisis Matemático:

[158] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 89-90.
[159] Ibídem, p. 89.
[160] Xiberta Roqueta, *Elementos de Álgebra*, op. cit., pp. 274-275.

> Concretándonos al objeto del Álgebra, hemos de manifestar que una de las propiedades de la cantidad es poder *aumentar* o *disminuir*. Ahora, bien [...] el infinito matemático, como el metafísico, no admite aumento ni disminución ni puede ser *límite* de cantidad alguna[161] [...]
>
> Ejemplo:
>
> Si se hace $x = 3$ en la fracción $\frac{x^2-9}{2x-6}$, ésta toma la forma $0/0$, lo cual indica que ambos términos son divisibles por $x - 3$; y dividiéndolos por ese factor común, se convierte en $\frac{x+3}{2}$ lo que da $6/2 = 3$; y éste es el verdadero valor de la fracción primitiva[162].

Es manifiesta la falta de formación matemática de Xiberta, para todo lo que no sea la matemática elemental y, en general, las técnicas estandarizadas, esto es, problemas aritméticos y de geometría clásica –muy abundantes en obras que contienen recopilaciones de problemas– y técnicas algebraicas prácticamente algorítmicas. Conceptos como el de infinito o el de límite llevan a poner en evidencia, más que su falta de 'finura matemática', una auténtica incomprensión[163].

En el capítulo sobre los «Procedimientos para hallar valores incógnitos en una igualdad o en un problema que presente varios»[164], de su libro de *Metodología*, Sáiz expone con ejemplos los procedimientos para resolver ecuaciones de primer y segundo grado y los sistemas de ecuaciones. Al igual que Xiberta, comienza con un procedimiento sistemático para resolver ecuaciones de primer grado: quitar paréntesis (Xiberta no alude a este paso), eliminar denominadores y transponer (siempre los términos con incógnita en el primer miembro, igual que Xiberta).

4.2.1.1. Técnicas aritméticas para sustituir a las algebraicas en la escuela primaria

Eyaralar parte de una expresión matemática simple, como «a + b = c» y «a = b · n», que expresa una relación matemática entre las cantidades que intervienen y, a partir del sentido de las expresiones más simples

[161] Ibídem, p. 93.
[162] Ibídem, p. 94. El subrayado es nuestro.
[163] Veremos otros ejemplos de ello en p. 551.
[164] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., pp. 33-40.

(pone ejemplos de situaciones aditivas y multiplicativas, respectivamente), deduce las que se derivan de ellas; su papel es el de expresiones aritméticas generalizadas.

Para los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no se limita a describir las técnicas habituales, sino que las va construyendo a partir de una serie de problemas –más bien de las sucesivas variaciones de un mismo problema que va evolucionando–, eso sí, desde la aritmética:

> Ejemplos graduados.- *a) Una mujer adquiere 2 kg. de pan y un l. de vino por 1,80 ptas., y otra 2 kg. de pan y 2 l. de vino de igual clase por 2,20 pesetas. ¿Cuál es el precio de 1 kg. de pan y de 1 l. de vino?*
>
> Exposición de los datos:
>
> 2 kg. de pan + 1 l. vino = 1,80 ptas.
> 2 íd. + 2 íd. = 2,20 "
>
> La diferencia de coste, que es 40 cts., proviene de la diferencia en la compra, que es 1 l. de vino. Luego la solución es casi inmediata.

El siguiente problema es muy parecido:

> b) Se adquieren 3 kg. de carne de ternera y 4 kilogramos de carne de cordero por 34 ptas., y 3 kg. de de carne de ternera y 1 kg. de carne de cordero por 22 ptas. ¿Cuál es el precio de cada clase de carne?

Para resolver el siguiente ya hay que duplicar la segunda ecuación, para reducirlo al caso anterior:

> c) Se adquieren dos bombillas de 1/2 vatio y 6 bombillas corrientes, por 18 ptas., y posteriormente 1 bombilla de la primera clase y 5 de la segunda por 13 pesetas. ¿Cuál es el importe de cada una?[165]

Por último, pone un ejemplo en el que hay que multiplicar ambas ecuaciones por números convenientes, para resolverlo como el caso b). Y precisa que lo que ha hecho es traducir aritméticamente la resolución algebraica de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, en el caso general, por el método llamado 'de reducción':

[165] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., pp. 38-39.

> Notaremos que este procedimiento es una *aritmetización del método de reducción* del álgebra al cual prepara [...], y al cual sin dificultad ninguna sustituye. Su exposición debe hacerse gradualmente, empezando con un problema en el cual las dos cantidades de una misma sustancia sean iguales[166].
>
> Esto nos lleva a considerar las grandes ventajas que tendría la introducción en la escuela primaria del estudio de las ecuaciones y sistemas de primer grado (¡nombres que no deben espantarnos!) que tanto simplifican, al mecanizarlas, la solución de estas cuestiones[167].

Hay que tener en cuenta que los dos libros de este autor que analizamos son de carácter didáctico; ambos se refieren a la enseñanza de la matemática en la escuela primaria, donde solo se estudiaba aritmética y geometría, pero no álgebra. Las propuestas son para ese nivel de enseñanza, aunque muestra a los futuros maestros la relación con el álgebra y lo que ésta puede aportar.

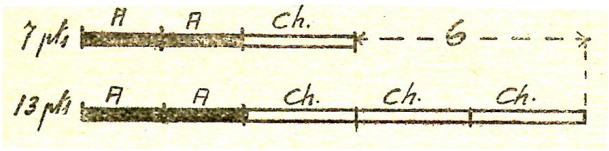
En cualquier caso, su propuesta para enseñar las técnicas algebraicas es ir construyendo la técnica a partir de técnicas aritméticas –conocidas–, mediante problemas que van demandando una evolución –*ampliación*– de la técnica, algo muy diferente a lo que plantean Sáiz y Xiberta.

Charentón, como Eyaralar, es consciente del poder unificador del álgebra y de las funciones para resolver problemas que requieren un tratamiento particular si han de resolverse desde la Aritmética.

Pero la ausencia del Álgebra en la escuela primaria supone una restricción institucional, que le lleva a proporcionar métodos gráficos para resolver los problemas sin recurrir al tratamiento algebraico-funcional [168]; esos métodos no obstante recuerdan a las técnicas de resolución algebraicas:

> En la tienda hemos visto pagar 7 pesetas por 2 kilogramos de azúcar y 1 libra de chocolate; más tarde se han pagado 13 pesetas por 2 kilogramos de azúcar y 8 libras de chocolate de la misma calidad que los anteriores. Averiguar el precio del kilogramo de azúcar y de la libra de chocolate.

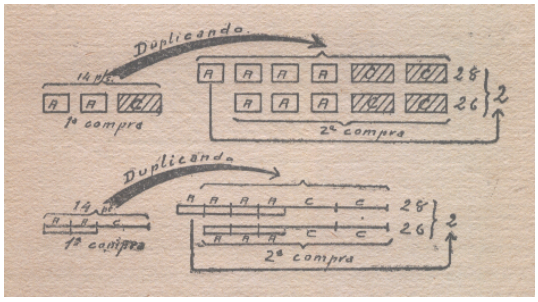
[166] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 92.
[167] Ibídem., p. 40.
[168] Se tratarán en el apartado 8.3.3.2 (pp. 605 y sig.).



El gráfico expresa que 6 pesetas es el precio de 2 libras de chocolate; el problema no ofrece ya dificultad[169].

Al comentar el siguiente ejemplo, aclara: «El maestro sabe que en este problema, para resolverlo por Aritmética, han de igualarse las cantidades compradas, bien del azúcar, bien del café»[170]. Representa de dos formas la operación necesaria:

En un comercio presenciamos que una persona paga 14 pesetas por dos kilogramos de azúcar y un kilogramo de café; otra, paga 26 pesetas por tres kilogramos de azúcar y dos kilogramos de café. ¿Cuál es el precio del kilogramo de cada género?



A continuación insiste en la necesidad de la duplicación, para igualar, y en que así el problema se reduce al anterior. No obstante, no presenta, como hace Eyaralar, estos dos problemas uno a continuación del otro, ni tampoco generaliza más en el caso de tener que multiplicar ambas compras. Aquí hay un intento de sustituir las técnicas algebraicas por otras aritméticas mientras no pueda disponerse de aquéllas, pero no hay una secuencia que haga pensar en una preparación para ellas.

Si hay una representación gráfica privilegiada, tanto para Charentón como para Eyaralar, es la basada en el concepto de *función*:

> La importancia, tanto teórica como práctica, de esta manera de resolver el problema es considerable. No solo hace un llamamiento a la intuición y a la acción del alumno, sino que inicia el procedimiento gráfico para el estudio de los fenómenos, prepara la mente para la comprensión de la resolución gráfica de los sistemas de ecuaciones[171].

[169] Charentón, *Metodología...*, op. cit., pp. 50-51.
[170] Ibídem, p. 55. La cursiva es nuestra.
[171] Eyaralar Almazán, *El problema de los móviles...*, op. cit., cita en p. 250.

4.2.2. La resolución de problemas mediante gráficas de funciones

La importancia que concede Eyaralar a los procedimientos gráficos –en el campo científico y, como consecuencia, en el educativo– se basa en tres motivos: hacen intuitiva la evolución de un fenómeno, ayudan a la resolución de problemas teóricos y prácticos, y son la base de la nomografía, método que el mismo Rey Pastor describe en el *Curso cíclico de Matemáticas*.

Un problema estudiado por prácticamente todos los profesores en aquel momento es el problema de los móviles[172]. El enunciado sería como éste:

> 1.º *Dos trenes parten simultáneamente de dos puntos A y B distantes d km. marchando a encontrarse. ¿A qué distancia del punto A se verificará el encuentro?* Investíguese al cabo de cuánto tiempo (cambio de incógnita).
>
> 2.º *El mismo problema suponiendo $v > v'$ y que los trenes marchan en el sentido AB.*
>
> 3.º *Los dos trenes proceden de la izquierda de A y llegan simultáneamente a los puntos A y B. Siendo $v < v'$ ¿a qué distancia de A se habrán cruzado?*
>
> Una ligera alusión a los casos v = v' y d = 0 bastará para completar el estudio de la cuestión[173].

En realidad se trata de un tipo de problemas que presenta variantes, según el valor de las *variables didácticas*[174]: simultaneidad o no en la partida, mismo sentido de la marcha o sentidos opuestos, salida desde el mismo punto o no. En ocasiones los datos (ejemplo, las velocidades) son números concretos y otras son parámetros.

Xiberta propone el primero de los problema anteriores, con datos particulares y luego en general; después el problema segundo, considerando que el tren más lento parte antes y, por último, el problema tercero[175].

[172] Eyaralar menciona que Rey Pastor estudia un problema de dos corredores que parten de un mismo punto, con infinitas soluciones para el punto de cruce.

[173] Eyaralar Almazán, *El problema de los móviles...*, cita en p. 249.

[174] Las variables didácticas se han comentado en p. 8.

[175] Xiberta Roqueta, *Elementos de Álgebra*, op. cit., pp. 209, 211, 270, 275. Los enunciados no son exactamente iguales, aunque las situaciones que plantean sí lo son.

Charentón presenta un problema de móviles, con este enunciado:

> Un tren sale de Madrid a razón de 50 kilómetros por hora; en su trayecto encuentra a un motorista que marcha en sentido contrario a la velocidad de 30 kilómetros por hora. Habiendo llegado el motorista a Madrid a las cuatro horas de haber salido el tren, ¿a qué distancia de esta población tuvo lugar el encuentro?[176]

Y, finalmente, Sáiz formula un problema de trenes que parten del mismo punto en la misma dirección, a diferente hora y con distinta velocidad. Las incógnitas son la distancia del punto de partida a la que se encuentran y la hora:

> Saliendo un tren a las 9 con velocidad de 40 kms. desde Barcelona a Zaragoza y otro a las 10'75 en la misma dirección; a una velocidad de 70 kms. ¿a qué distancia de Barcelona se encontrarán y a qué hora?[177]

Xiberta lo resuelve, en todos los casos, planteando una proporción en la que llama x a la incógnita, es decir, mediante una ecuación. Los datos en el primer caso y en el tercero son numéricos y en los otros dos son datos generales, representados por letras. La fórmula obtenida en el segundo problema se aplica después al problema concreto resuelto antes. El papel de esas letras como parámetros solo se pone de manifiesto en la «discusión» del último problema, según los tamaños relativos de v y v' y según sea d igual o mayor que cero. La única representación gráfica es un esquema para ayudar a comprender el enunciado –no para la resolución– y solo en los problemas con datos generales.

El resto resuelve el problema utilizando una representación funcional, en ejes cartesianos. Hemos recogido un ejemplo de resolución de Charentón[178] (figura 4.14, p. 299) y otro de Sáiz Salvat[179] (figura 4.15, p. 300).

[176] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 82.

[177] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 61.

[178] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 82. Charentón comienza suponiendo que se encuentran a la hora de salir el tren. Así determina la inclinación (pendiente) de la recta y luego no tiene más que trasladarla teniendo en cuenta que el motorista tarda 4 horas en llegar a Madrid. Después aclara que se podía haber obtenido directamente la recta que corta a la que representa el movimiento del tren.

[179] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 61.

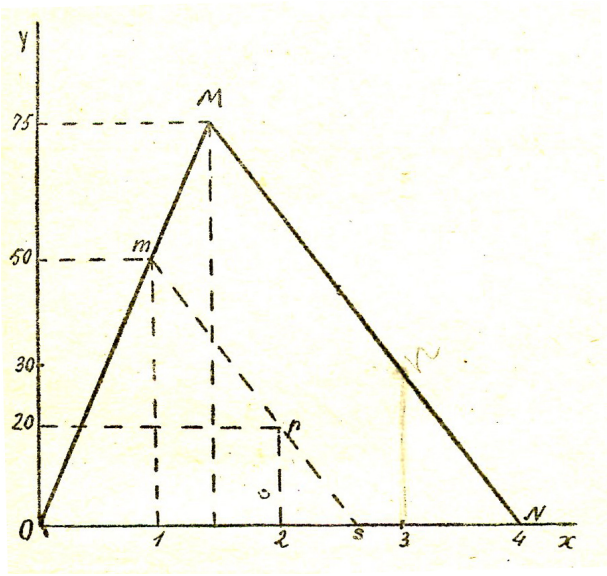


Figura 4.14: Charentón. Representación funcional de un problema.

Vemos que la representación de Sáiz –comienza por dibujar «un rectángulo» para hacer el «gráfico de ferrocarriles»– está más anclada en lo concreto.

Eyaralar comienza mostrando la resolución que consiste en utilizar la proporcionalidad para obtener la ecuación; sugiere volver sobre estos mismos problemas al tratar la proporcionalidad, para estudiar cuestiones relativas a dicho tema.

En cuanto a la resolución gráfica o geométrica, en primer lugar indica que puede hacerse por un 'procedimiento particular', esto es, asignando valores concretos a las incógnitas y haciendo dibujos a escala (los segmentos que representan las velocidades son proporcionales a éstas), de modo que midiendo sobre el dibujo se obtenga la solución. Esta solución se encuentra en la figura 4.16; el primer dibujo corresponde a trenes circulando en sentido contrario, y el segundo a trenes circulando en el mismo sentido. El tercer dibujo muestra la solución cuando los trenes circulan a la misma velocidad y en sentido contrario.

Destaca la importancia del procedimiento, no solo porque permite relacionar Aritmética y Geometría, sino porque es susceptible de extensión a otros problemas de Física.

En segundo lugar, plantea el 'procedimiento general', representando tiem-

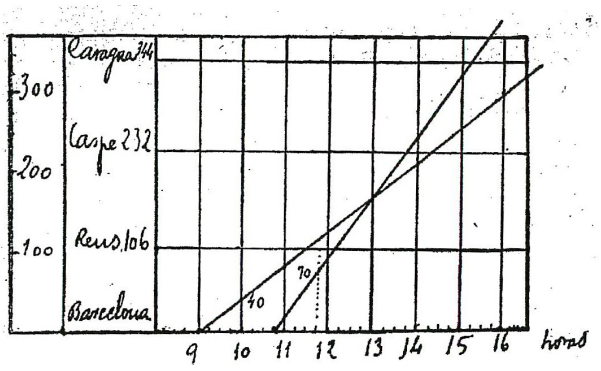


Figura 4.15: Sáiz Salvat. Representación funcional de un problema.

pos y distancias en ejes cartesianos y, de manera funcional, la relación entre el tiempo y la distancia recorrida (cuarto caso de la figura 4.16). Subraya las ventajas de esta resolución como preparación para la resolución gráfica de ecuaciones, haciendo ver que además permite obtener a la vez tanto las distancias como los tiempos empleados.

Unos meses después publica una ampliación del problema anterior al caso de una superficie esférica[180], como la de la Tierra, para el que primero propone una resolución experimental, aprovechando el trabajo realizado anteriormente sobre dos móviles que se desplazan sobre una superficie plana; posteriormente esta resolución ha de servir para enunciar el teorema general, sobre la llamada 'circunferencia de Apolonio', para cuya demostración remite a su libro *Nuevo Tratado de Geometría*. Nuevamente señala la importancia de estos resultados para tratar problemas matemáticos y de otras disciplinas, como la Física. Asimismo hace notar que el problema puede extenderse al espacio y que en su resolución intervienen conocimientos que pertenecen al cuestionario de oposiciones, como los números complejos, o bien resolverse mediante la Geometría Analítica, que considera que da tiempo a tratar, al menos a iniciar, durante el curso de Álgebra.

Explícitamente señala que hay que rehacer la manera en la que se enseña el álgebra en todos los manuales, y considera el problema citado como un ejemplo de la forma en la que hay que plantear su enseñanza. Nuevamente percibimos trazas del modelo epistemológico y didáctico de las matemáticas

[180]Eyaralar Almazán, *El problema de los móviles...*, op. cit., pp. 330-331.

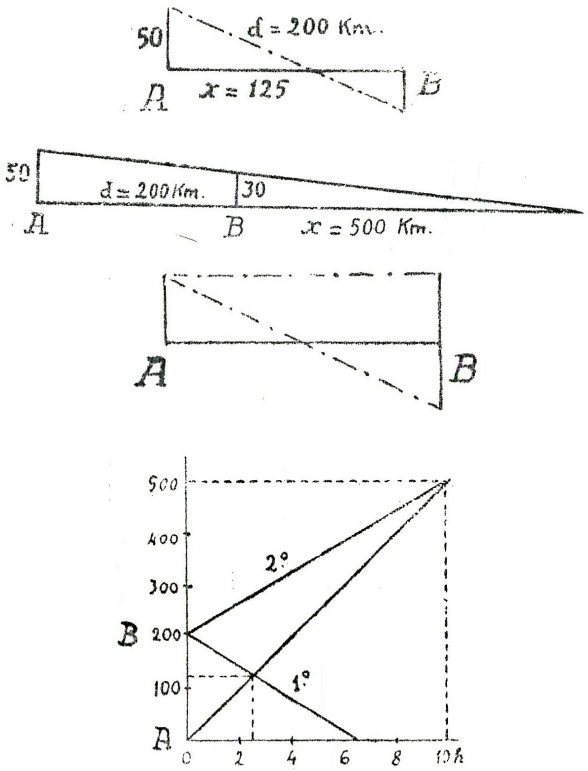


Figura 4.16: Eyaralar. Ejercicio resuelto en diferentes marcos

(*logos*) que guía la praxis didáctica de Eyaralar.

En el libro *Didáctica de los Problemas de Aritmética y Geometría*, retomando y ampliando el artículo anterior, vuelve a tratar la resolución gráfica mediante el gráfico de una función, «porque hace intuitivas las relaciones entre magnitudes, sobre todo en su aspecto funcional (cómo varía una magnitud por variación de otra) y porque resuelve con gran sencillez y elegancia, problemas cuya resolución aritmética suele ser un tanto artificiosa»[181].

Precisamente ejemplifica esta resolución funcional con el movimiento uniforme, cuya fórmula indica que «el espacio recorrido está ligado con el tiempo por la relación $e = v \cdot t$». No hace hincapié en la fórmula solamente como una expresión que nos permite calcular el espacio recorrido, sino en la fórmula como relación entre variables. Alude a la proporcionalidad geométrica (semejanza de triángulos) para justificar que los puntos que representan la relación

[181] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., pp. 45-46.

entre el espacio y el tiempo (obtenidos a partir de una tabla de valores) están situados sobre una recta –representación geométrica– y, como consecuencia, la representación en ejes cartesianos –representación funcional– (figura 4.17, p. 302)[182].

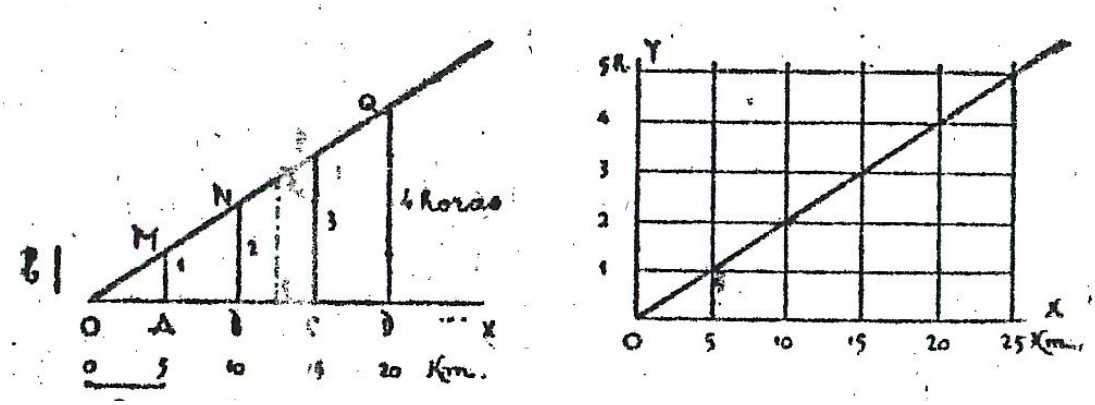


Figura 4.17: Eyaralar. Representación de la marcha de un peatón que recorre 5 km por hora

Observa que pueden representarse de esta manera todas las relaciones entre magnitudes de la forma «$y = ax$» y de manera análoga las de la forma «$y = ax + b$». Pero no solo:

> Se aplica también esta representación a magnitudes regidas por cualquier forma matemática, y aun cuando lo estén arbitrariamente, si bien fuera de los casos antes citados, la representación no es una línea recta, y es preciso determinar sus puntos por medio de la tabla correspondiente[183].

Charentón habla de representación gráfica como 'método' (de resolución) para diferenciarla de la representación gráfica como 'procedimiento'[184]. Le dedica al método gráfico bastante atención en su *Metodología*. Comienza por hablar de variaciones de magnitud, relaciones de dependencia entre variables, conceptos de función y de variable, expresión algebraica –*ecuación*– y

[182]Ibídem, p. 47.

[183]Ibídem, p. 48. Antes ya aclaró que, como una recta queda determinada por dos puntos, basta determinar dos valores de la tabla.

[184]Ver pp. 606 y sig.

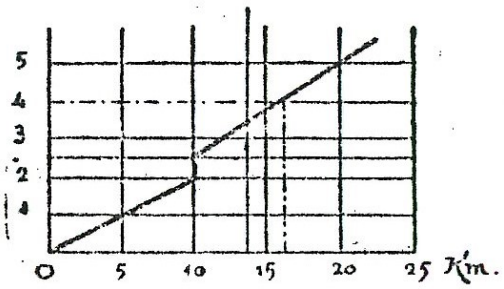


Figura 4.18: Eyaralar. Representación de la marcha de un peatón que recorre 5 km por hora. La porción vertical indica un descanso en el recorrido

representación gráfica de una función (ejemplos de funciones lineales), coordenadas, trazado de la *curva* de una función (especifica que las de primer grado se representan por una recta y lo justifica), y extensión a funciones de primer grado de la forma «$y = ax + b$».

El concepto de *función*, tan «importante en matemáticas por su significado, por su alcance y por su utilidad, que sorprende cómo no está aún incorporado al lenguaje escolar»[185] va ligado al de *ecuación*:

> Ecuación y gráfico, he aquí dos maneras de expresar con idéntica exactitud los mismos hechos; caso de simbiosis matemática que funde en una misma realidad y prestándose mutuamente vida, las dos expresiones numérica y geométrica; con la particularidad de que cada una de ellas da los medios para encontrar la otra. Versión de un lenguaje a otro, que fertilizando nuestra capacidad de razonar, excita la atención y toda nuestra energía mental, constituyendo un ejercicio formidablemente educativo[186].

Aunque reconoce la utilidad de manejar las ecuaciones (expresión algebraica de una función) o partir de ellas para construir la gráfica de una función, insiste en que se puede construir también a partir de una tabla de valores (solo se ocupa de funciones de primer grado) y en dejar al niño que prescinda del álgebra, «que cuando él sienta la necesidad de expresar sus resultados de una forma más precisa y breve que la empírica [...] ya encontrará la notación algebraica»[187].

[185] Charentón, *Metodología...*, op. cit., pp. 60-61.
[186] Ibídem, pp. 62-63.
[187] Ibídem., p. 69.

Entre las ventajas de representar gráficamente la relación funcional que contiene un enunciado, señala la generalización del problema y la posibilidad de plantear y resolver el problema inverso (esto también lo advierte Eyaralar) pero las razones no son solo utilitarias: reconoce la potencia de la Geometría Analítica y su papel unificador del cálculo y la geometría, que ya hemos comentado que forma parte de la epistemología de Charentón.

Para los sistemas de ecuaciones, hace ver que las coordenadas del punto de corte de dos rectas transforman ambas ecuaciones en identidades y son por tanto soluciones de un sistema. Lo muestra con un ejemplo no contextualizado, y luego va aplicando el método a la resolución de tipos de problemas: de proporcionalidad directa e inversa, aritmética comercial, mezclas, acciones combinadas, móviles, etc.

El método gráfico también es empleado por **Eyaralar** para la obtención de soluciones de la ecuación de segundo grado. En la *Revista de Escuelas Normales*[188] expone varias técnicas, en diferentes *marcos*[189], técnicas que dice utilizar en sus clase de Álgebra en la Normal:

- Representación gráfica –en papel milimetrado– de la función de segundo grado, a partir de una tabla de valores. Destaca que esta representación le permite no solo resolver la ecuación, sino estudiar propiedades de la función: simetría, extremos, crecimiento, puntos de corte con el eje horizontal (soluciones de la ecuación).

- Resolución nomográfica. Consiste en obtener las soluciones de la ecuación como intersección de la función $y = x^2$ y otra de primer grado. Pone el ejemplo de la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$; primero la escribe en

[188] Eyaralar Almazán, José María: «Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **34**, pp. 122–123.

[189] «Cambiar de marco permite formular un problema de modo no exactamente equivalente, y con ello hacer intervenir técnicas que no eran obligadas en la otra formulación [...] El cambio de marcos es un medio de obtener formulaciones diferentes de un problema que, sin ser totalmente equivalentes, permiten implementar herramientas técnicas que no eran obligadas en la primera formulación» Douady, Regine: «Jeux de cadres et dialectique outil-objet». *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 1986, **7(2)**, pp. 5–31. Cita en p. 7. La traducción es nuestra.

la forma $x^2 = 2x + 15$ y representa las funciones $y = x^2$ e $y = 2x + 15$ (la recta puede no dibujarse y apoyar una regla una vez determinados los puntos de corte con los ejes). Los puntos donde se intersequen dan las soluciones de la ecuación inicial. Aquí comenta un *gesto didáctico*[190] consistente en tener confeccionada por los alumnos una tabla de cuadrados, desde -100 hasta + 100, con lo que basta una regla o hilo tirante para representar la función de primer grado, para hallar gráficamente las soluciones de la ecuación cuadrática.

- Resolución geométrica, ya recogida en el libro *Nuevo Tratado de Geometría*[191]. De esta técnica destaca que relaciona el dominio numérico con el geométrico, además de ser susceptible de extensión a ciertas ecuaciones de tercer grado. El dibujo (figura 4.19, p. 305), muestra el procedimiento para la ecuación $4x^2 - 20x + 24 = 0$:

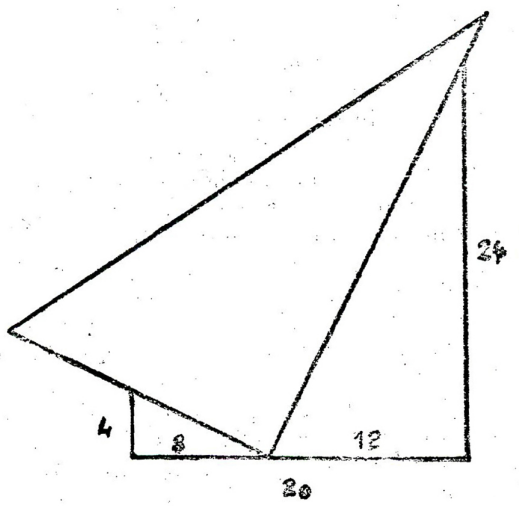


Figura 4.19: Eyaralar. Resolución geométrica de ecuaciones

> Realizando la construcción indicada en la figura [...] obtenemos $ax = 8$; luego $x = \frac{8}{4} = 2$. El otro segmento determinado sobre b es 12 , que dividido por $a = 4$, da la otra raíz 3 de la ecuación[192].

[190] Ver apartado 6.2.5, pp. 388 y sig.

[191] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., pp. 300-303.

[192] Ibídem, p. 301. También hace referencia a este procedimiento en Eyaralar Almazán, *Resolución gráfica...*, op. cit.

En el *Nuevo Tratado de Geometría* su autor justifica el procedimiento y señala que en lugar de una escuadra puede usarse regla y compás, trazando la semicircunferencia cuyo diámetro tiene por vértices los extremos de los segmentos verticales.

4.2.3. La proporcionalidad

Uno de los indicadores del modelo epistemológico de la matemática que subyace en cada profesor puede ser la mayor o menor vinculación del álgebra a las funciones en sus propuestas para la enseñanza elemental[193]. En la enseñanza primaria, casi las únicas relaciones funcionales que aparecen son las de proporcionalidad. Intentamos caracterizar las técnicas que presenta cada uno de estos profesores normalistas para resolver las situaciones de proporcionalidad y ver dónde se sitúa.

Xiberta da la siguiente regla para resolver los problemas de proporcionalidad simple directa: «La incógnita es igual al valor conocido de la misma magnitud que ella, multiplicado por la razón del nuevo al primitivo valor de la otra magnitud»[194]. No emplea el método de reducción a la unidad, ni contempla el coeficiente de proporcionalidad. El tratamiento que hace de la proporcionalidad es el que Vergnaud[195] llama 'vertical', y se corresponde con el producto en cruz o la llamada 'regla de tres'; acorde con el tratamiento clásico de la proporcionalidad, la técnica da nombre a todo un tipo de problemas, que el mismo Xiberta denomina «problemas de regla de tres simple directa». Se trata de un tratamiento de la proporcionalidad típicamente aritmético.

Sáiz Salvat reconoce que las matemáticas tienen como objetivo general el estudio de las funciones o cantidades que dependen de otras. La técnica que sugiere no es ya el método de las proporciones o regla de tres:

> Conviene, aunque no es corriente, expresar las relaciones entre

[193] Bolea Catalán, *El proceso de algebrización...*, op. cit., pp. 88-91.

[194] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit., p. 100.

[195] Vergnaud, Gérard: *L'enfant, la Mathématique et la Réalité*. Peter Lang, Berna, 1981, cap. 4.

Noirfalise y Matheron, *Enseigner les Mathématiques...*, op. cit., cap. 6: «Organisation et représentation de données numériques. Relations fonctionnelles, proportionnalité».

> aquellas cantidades de modo que aparezca el coeficiente pues de este modo se ve claro el valor total de varias unidades como resultado de multiplicar el valor de una unidad (*coeficiente*) por el número de ellas; es decir, que de este modo reducimos una cuestión de proporcionalidad a una cuestión de concretos incluida en la fórmula general v = pn[196].

Ejemplifica la técnica con problemas de interés simple. Recomienda operar de manera que destaque el valor del coeficiente y aclara que este procedimiento, llamado *de reducción a la unidad*, no exige las proporciones[197].

Sitúa la proporcionalidad incluida en la aritmética, y todos los problemas de aritmética mercantil, como un caso particular de los de proporcionalidad, e insiste en el origen aritmético de la «función de proporcionalidad». Y esto a pesar de haber declarado antes sobre este concepto que «no puede enseñarse en la forma corriente, mecánica con que se aborda. Debe hacerse intuitiva-objetiva mediante los ejercicios tipo que en el capítulo del Álgebra preconizamos para la enseñanza del concepto de *función*»[198]. Parece referirse a un origen aritmético de los problemas –era el tratamiento que recibía en la enseñanza primaria, donde se estudiaban los problemas de 'regla de tres', pero no el álgebra y las funciones–, y propone que dichos problemas se aborden de manera algebraico-funcional. Incluso apunta una secuencia: partir de un fenómeno real, natural, de origen aritmético, con el cual trabajar de manera no rutinaria la función de proporcionalidad para pasar a la expresión simbólica. Así, «al usar la fase abstracta cifrada, aparece el símbolo proporcional, como representación matemática de una ley que ha estudiado el niño experimentalmente»[199]. Entonces se puede pasar a los problemas de porcentajes, interés, prorrateos y mezclas.

Charentón y **Eyaralar** comparten y expresan la idea de trabajar las situaciones de proporcionalidad en el marco algebraico-funcional. Para el segundo, la razón entre dos cantidades es un concepto que el niño no percibe claramente, como no se trate de una razón entera, a pesar de su aparente sencillez[200].

[196] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 43.
[197] Ibídem, p. 45.
[198] Ibídem, p. 226.
[199] Ibídem, p. 226.
[200] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 386.

Charentón dice que los problemas de regla de tres son problemas de construir la recta que pasa por el origen y otro punto dado por dos valores correlativos de las magnitudes que intervienen. En su *Metodología* no utiliza en ningún momento la regla de tres.

Tampoco Eyaralar es partidario de usar la técnica de la regla de tres, y aboga por la de reducción a la unidad, por la ventaja que supone para resolver problemas análogos, una vez determinado el *coeficiente*. Pero también porque se presta a la obtención de fórmulas; y pone los ejemplos «$C = c \times p \times d$»[201] para el transporte e «$I = \frac{r}{100} \times c \times t$» para el interés[202]. Respecto a la utilización escolar de la regla de tres, afirma:

> Opinamos que no se debe hablar al alumno de la proporcionalidad numérica ni de su aplicación inmediata, la regla de tres como suele darse. Con ello se le descarga de un bagaje no sólo inútil sino perjudicial. Inútil desde el punto de vista práctico, porque el medio verdadero de resolver los problemas de reglas de tres es el empleo del *coeficiente*. (Velocidad en el movimiento uniforme; precio en los valores; densidad en los pesos, etc.). Perjudicial, porque conduce a la rutina de las reglas de tres, sacadas maquinalmente con perjuicio de la educación intelectual[203].

Esta última frase es coherente con el modelo pedagógico de este profesor. Además, advierte de que para estudiar la proporcionalidad hay que poner tanto ejemplos de magnitudes proporcionales como no proporcionales (edad y talla, arco y cuerda), e incluso magnitudes proporcionales entre ciertos límites (obreros y tiempo empleado). Y ejemplos de proporcionalidad simple, compleja (cuadrados) y compuesta.

Ambos profesores optan por tratar los problemas de aritmética comercial como casos particulares de los de proporcionalidad. Eyaralar opina que parte de los métodos para resolverlos deben sustituirse en la escuela por el estudio de las ecuaciones[204]. Por su parte Charentón ya hemos comentado que no se explica por qué no se ha introducido en la escuela el concepto de función:

[201] El coeficiente c es el coste de trasladar una tonelada un kilómetro.
[202] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 399.
[203] Ibídem, p. 387. El subrayado es nuestro.
[204] Ibídem, p. 84.

> Se puede dar un método único, en principio, para todos los problemas, si enseñamos a resolver en la escuela ecuaciones de primer grado; porque todo el programa escolar hasta la regla de tres y sus derivadas interés, descuento, aligación, etc., etc., todo ello, se presenta como un estudio de la función de primer grado y es siempre el mismo método algebraico el que se pone en vigor[205].

Podemos decir que si bien la mayoría de los profesores estudiados conciben el álgebra como una extensión de la aritmética, que generaliza las técnicas aritméticas, observamos a la vez signos de una visión menos clásica en algunos, como Charentón y Eyaralar. El tratamiento que hacen de la proporcionalidad es indicativo de ello.

El planteamiento de ambos es modelizar sistemas con una relación matemática entre las medidas, x e y, de dos magnitudes, de modo que la medida y es igual a una expresión matemática que depende de la medida x. La información sobre una magnitud a partir de la otra se obtiene a partir de la relación funcional entre las medidas x e y. Según las etapas o *niveles de algebrización* caracterizados por Bolea[206] para llegar a la modelización algebraica completa, podemos situar la propuesta de estos autores cercana al primero de los niveles, que consiste en modelizar mediante ecuaciones los diferentes tipos de relaciones de proporcionalidad. Aunque solo para el caso de la proporcionalidad simple directa, ya que, tal como señala esta autora, una fórmula de la forma *«*$xy = k$*»* supondría tener que interpretar el producto de dos cantidades de magnitud.

Los problemas de proporcionalidad compuesta se suelen resolver en varios pasos; aunque se observa algún ejemplo en el que la relación entre todas las variables que intervienen se traduce mediante una única fórmula, como en el ejemplo *«*$C = c \times p \times d$*»* para el transporte, donde el costo de trasladar una tonelada de peso a una distancia de un kilómetro, c, es el coeficiente de proporcionalidad. En cualquier caso, se trata de un ejemplo aislado, en el que la fórmula es interpretable con referencia al contexto real.

El uso de la función de proporcionalidad –y en general de la función de

[205] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 31.
[206] Bolea Catalán, *El proceso de algebrización...*, op. cit., pp. 206-207.

primer grado–, y la representación gráfica de la función, permiten igualmente unificar tipos de problemas que la mayoría de los profesores y autores de libros presentan por separado (interés, tanto por ciento, mezclas, desplazamientos, etc.), así como plantear y resolver por un mismo procedimiento –la gráfica de la función– problemas en los que se invierten datos e incógnitas.

En cualquier caso, el anclaje de la actividad algebraica en lo aritmético es innegable, por lo que no se puede hablar de una actividad netamente algebraica. Esto lo corrobora el tratamiento que dan al tema de los números negativos. Esta cuestión no es abordada, más bien se evitan los negativos cuando se puede: las gráficas casi siempre se representan solo en el primer cuadrante; los tipos de problemas resolubles por sistemas de ecuaciones se podrían unificar más si no se evitaran los coeficientes negativos. Se eligen ejemplos en los que no aparecen soluciones negativas. Cuando se emplean negativos se hace con 'naturalidad' y 'transparencia', eludiendo su posible aspecto problemático; por ejemplo, Charentón, al tratar sobre la gráfica de una función de primer grado, pone ejemplos de puntos con coordenadas negativas; en cuanto a Eyaralar, hay coeficientes negativos a veces en las ecuaciones. Pero en ningún caso se manipulan números ni parámetros negativos.

Sin embargo hay que señalar que Eyaralar es consciente, y así lo expresa, de que el tema de la inclusión de los negativos en la enseñanza primaria es un aspecto crucial en la enseñanza *del Álgebra* (actualmente en la enseñanza secundaria la introducción de los negativos se hace restringiéndolo a los enteros, en un contexto puramente aritmético, incluido precisamente en el bloque dedicado a repasar y ampliar los contenidos aritméticos estudiados[207]), y que la introducción de los negativos en la enseñanza no es una tarea ni mucho menos trivial: «La introducción de los números negativos complica de tal manera el contenido de la enseñanza, si se quiere que esa introducción se utilice, que la creemos inadecuada para la Escuela Primaria en su estado actual»[208]. Justifica la no inclusión por lo restringido de los problemas y técnicas algebraicas que pueden verse en este nivel, lo que permite evitarlos.

[207] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte: «Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato». BOE, 3 de enero de 2015, pp. 169-546, 2015.

[208] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 395.

Vemos en estos dos profesores, a pesar de todo, indicios de un tratamiento de lo algebraico-funcional que permite suponer que eran conscientes de la capacidad modelizadora de las técnicas algebraicas y de la necesidad de tenerlo en cuenta para diseñar los programas de matemáticas. Una vez más, la forma en que se concibe la matemática, el llamado *modelo epistemológico* que se tiene de ella, en particular del álgebra escolar, junto con la cultura pedagógica propia del momento histórico, influyen en la manera de entender su enseñanza:

> *En Álgebra* es donde la enseñanza puede abandonarse a los trillados caminos que siguen todos los manuales, pero creemos que este ejemplo es bastante significativo para mostrarnos hasta qué punto es preciso abandonar en principio esos caminos y cómo el profesor ha de rehacer la enseñanza si quiere cumplir en ella las normas pedagógicas[209].

Si bien pesan sobre estos profesores las restricciones procedentes de las *condiciones ecológicas* de la escuela primaria de ese momento:

> Pero la iniciación algebraica, la más abstracta de las técnicas matemáticas, no puede encajar en la escuela primaria, si no es en un grado superior. ¿Qué hacemos, entre tanto, con los niños que aún no han llegado a él? ¿Dejamos abandonada la formación matemática de los alumnos en los grados elemental y medio? [210]

[209] Eyaralar Almazán, *El problema de los móviles...*, op. cit., cita en p. 250.
[210] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 21.

Capítulo 5

La asignatura *Metodología de la Matemática*

El Plan de estudios de 1931 para las Escuelas Normales, supuso una nueva orientación en la preparación del magisterio primario, uno de cuyos rasgos fue la inclusión de asignaturas dedicadas a las 'Metodologías especiales', entre ellas la dedicada a las matemáticas

La inclusión de la asignatura *Metodología de la Matemática* en los estudios de magisterio propició la publicación de libros para la misma. En ellos, los profesores de matemáticas normalistas recogieron las reflexiones derivadas de su experiencia y reelaboraron obras que habían publicado anteriormente, tanto libros como artículos de revistas. Se percibe en ellas la formación tanto matemática como didáctica de sus autores, adquirida durante años en obras de pedagogos y de matemáticos españoles y extranjeros, así como su conocimiento de experiencias educativas de otros países.

En este capítulo se estudia cómo 'construyeron' la asignatura *Metodología de las matemáticas* los profesores que recibieron el encargo de impartirla, y se abordan los antecedentes de la misma, las propuestas de contenidos que realizaron, los procesos de coordinación entre los responsables de la impartición de la asignatura (docentes y administración educativa) y, como resultado, las obras que publicaron. De esas obras se analizan las cuestiones generales, pues las específicas se comentan en los siguientes capítulos de esta Memoria. Por último, se valora qué supuso esta asignatura para la formación matemática de los maestros.

5.1. Qué debe contener una Metodología. Propuestas

El *Decreto de 29 de septiembre de 1931*, en su artículo séptimo, establece que las disciplinas conducentes a la formación profesional del magisterio abarcan:

a) Conocimientos filosóficos, pedagógicos y sociales.

b) Metodologías especiales.

c) Materias artísticas y prácticas.

Y sitúa la metodología de la matemática en el primer curso de los tres que comprende la preparación en las escuelas normales (un cuarto año estaba destinado a realizar prácticas en escuelas primarias). En este nuevo Plan «tienen aún mayor importancia las "Metodologías especiales", del apartado b) cuyo contenido ha de ser el que imprima carácter a los alumnos-maestros, facilitándoles los medios necesarios para llegar con éxito al ejercicio de la función docente»[1].

Pero hasta la promulgación de la *Orden Ministerial del Reglamento de las Escuelas Normales del Magisterio Primario*, el 17 de abril de 1933, no se estableció un cuestionario oficial para las asignaturas de metodología, en particular para la de la matemática. Fueron varios los profesores de Escuela Normal que expresaron sus ideas acerca de lo que debía comprender el estudio de esta asignatura:

> Dejan las disposiciones oficiales un campo indeterminado acerca de cómo han de darse las enseñanza. Imprecisión acaso intencionada que permite al profesorado imprimir una orientación propia a las Escuelas [...]
>
> Las enseñanzas de la Metodología de las distintas materias han de tener por tanto dos partes [...] Una, la parte teórica, que habrá de hacerse orientándola hacia los principios generales de metodología pura

[1] Vázquez, Claudio: «Algunas ideas sobre los cursos de Metodología». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **89**, pp. 123–124. Cita en p. 123.

> [...], común a todas ellas, con el estudio particularísimo y detallado de la asignatura que nos ocupe[2].

Quedaba pendiente disponer de unas directrices comunes –y oficiales– sobre el contenido de las nuevas *Metodologías*, en particular la de la Matemática. El Director General de Primera Enseñanza, Rodolfo Llopis, profesor normalista, tras una reunión en febrero de 1932 con los directores de las Normales, organizó un *Cursillo de información Metodológica*, que se celebró del 23 de junio al 9 de julio de 1932 en Madrid, al que asistieron al menos 189 profesores numerarios de Escuela Normal, la mayoría seleccionados por la propia Dirección General. De esa reunión debían salir los Cuestionarios para cada una de las Metodologías Especiales. Hay quien califica ese Cursillo como una «ronda de consultas» con un carácter deliberativo[3]. La Junta directiva de la Asociación Nacional del Profesorado Numerario así lo valoraba tras la reunión con los directores de las Normales: «Los procedimientos van variando, como corresponde, después de todo, al despertar de la nueva democracia, a que asistimos. A la imposición de la ley sustituye la consulta amable del que puede dictarla»[4]. En cualquier caso, los Cuestionarios[5] tendrían un carácter provisional, y se irían revisando, de acuerdo con las aportaciones de los implicados: «Se nos exige una visión anticipada de lo que pueda y deba ser en cada momento el Magisterio primario; un conocimiento exacto

[2]Paunero Ruiz, Luis: «Lo que puede ser un curso de Metodología». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **86**, pp. 64–66. Cita en p. 65.

[3]Mainer Baqué, Juan: *La forja de un campo profesional: pedagogía y didáctica de las Ciencias Sociales en España (1900-1970)*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2009, p. 297.

[4]Junta Directiva: «La reunión de Directores de las Escuelas Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **87**, p. 81.

[5]Publicados en el Boletín Oficial del Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, de 10 de noviembre. En la Revista de Escuelas Normales de noviembre de 1932 se publican los de Geografía. Eyaralar afirma, en el artículo en el que comenta el Cursillo en lo relativo al grupo de Matemáticas, que se publicarán en el número siguiente los de Matemáticas. Sin embargo no aparecieron en los números siguientes. La *Metodología* de Eyaralar incluye los contenidos que contiene el cuestionario de matemáticas, según declare él mismo en el Prólogo. Eyaralar Almazán, José María: *Metodología de la Matemática*. Reus, Madrid, 1933, pp. V-VII. Prólogo.

de los problemas actuales, y sus soluciones también. Ello requiere estudio y reflexión»[6].

La importancia que desde la Administración educativa se concedía a esta reunión se hace patente si se tiene en cuenta que colaboraron como ponentes profesores universitarios y procedentes de los organismos relacionados con la Institución Libre de Enseñanza y la Junta para la Aampliación de Estudios, tales como el Museo Nacional de Ciencias Naturales, el Centro de Estudios Históricos y, en matemáticas, el Laboratorio Matemático.

Tras la celebración de ese Cursillo, profesores de Escuela Normal de distintas disciplinas escribieron artículos en la *Revista de Escuelas Normales*, en los que opinaban sobre diferentes aspectos en relación con estos cursos; a veces incluso lo que se publica es el contenido de algunas de las conferencias, como sucede con las de José Augusto Sánchez Pérez. Las opiniones destacan en general como aspectos positivos: la posibilidad de permitir un encuentro entre compañeros y los expertos (quienes a veces se conocen de la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio) así como entre éstos y los más jóvenes, y el intercambio de impresiones y experiencias entre profesores que imparten las mismas asignaturas y el aliento que supone comprobar intereses e inquietudes comunes por la enseñanza; sin olvidar la posibilidad de elevar el nivel cultural del profesorado normalista.

Aun considerando un éxito indiscutible la organización y el desarrollo del Cursillo oficial, el profesor de geografía Pedro Chico propone cambiar su denominación, con un argumento que puede verse como un adelanto de la reivindicación de que las metodologías especiales sean consideradas como un campo que caracteriza a un colectivo profesional, y esto en un momento en el que estas materias estaban en los orígenes de su proceso de disciplinarización:

> No pueden ser estos cursillos de información metodológica porque poco o mucho, *lo que se ha hecho de metodología en España, con un cierto sistematismo lo han hecho las Normales*, por lo cual en lugar de informadas, pueden ser informadoras[7].

[6] Ibídem.

[7] Chico Rello, Pedro: «Grupo de Geografía. Impresión y deducciones». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **91**, pp. 6–10. Cita en p. 6. La cursiva es nuestra.

Otras personas, como Eyaralar, valoran lo que pueden aportar los expertos venidos del mundo de la universidad o de centros de creación matemática. Ante la pregunta «¿Qué podría aportar la universidad a la metodología de una asignatura?», él mismo respondería dos años después: «La Universidad podría orientarnos, pues, acerca de los *métodos propios de la ciencia* y de sus *problemas actuales*. Y podría darnos, además, la *historia de la ciencia*»[8]. Posiblemente la dificultad que entraña para cualquier persona no matemática, incluso si posee una buena formación en esta disciplina, entender las publicaciones matemáticas –siquiera parcialmente– es lo que lleva a Eyaralar a valorar el que sean los propios investigadores matemáticos los que informen sobre temas de actualidad en esta ciencia. Las propias características de las matemáticas suponen una dificultad para la formación más o menos autónoma, lo que puede explicar las diferentes visiones de estos dos profesores.

Lo que critica de las conferencias es la elección de los temas (Topología, Probabilidad o Seguros) y la organización, que hacía que se les encargara a los conferenciantes, solo con horas de antelación, pronunciar una conferencia. Respecto a los próximos cursillos propone, además de las mejoras relativas a cuestiones organizativas, incluir sesiones para que los propios profesores normalistas traten temas de interés común, y que los temas de las ponencias sean decididos conjuntamente por los profesores normalistas y los del Laboratorio Matemático, para que los temas interesen a aquellos[9]. De hecho, solo la del catedrático del Instituto-Escuela, José Augusto Sánchez Pérez, sobre la enseñanza de la Matemática en el Instituto-Escuela de Madrid, guardaba relación con la enseñanza y aún ésta no la vio interesante el profesorado normalista debido a la finalidad propedéutica[10] de la enseñanza primaria en ese centro.

Del *Cursillo de información Metodológica* salieron los Cuestionarios para las diferentes asignaturas, que la Dirección General se comprometió a publicar, y que el propio director general, Rodolfo Llopis, reconocía que eran

[8] Eyaralar Almazán, José María: «Opiniones». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **102**, pp. 80–81. Cita en p. 80.

[9] Eyaralar Almazán, José María: «Cursillo de información metodológica. Grupo de Matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **91**, pp. 4–5.

[10] Ver p. 338.

provisionales y solo orientativos. Se daba libertad a los profesores para elaborar los correspondientes programas de las asignaturas. En la circular que dirigió a los directores de las Escuelas Normales decía:

> Necesita el Profesor recordar a sus alumnos el concepto genérico de la disciplina que profesa, definirla por sus grandes problemas actuales, deducir su didáctica del concepto de la ciencia y de la psicología infantil determinando los métodos, los procedimientos, el material y los medios auxiliares más adecuados para su enseñanza. Necesita concretar en programas escolares el contenido de su disciplina, teniendo en cuenta los intereses de cada momento de la evolución del niño. Y aplicarlo todo ello con sus alumnos en la Escuela Primaria, así graduada como unitaria. Esa aplicación debe ir precedida de conveniente discusión en orden a contenido, métodos y material, como debe ser seguida de crítica emuladora[11].

José María Eyaralar, en el articulo de la *Revista de Escuelas Normales* que publicó en octubre de ese mismo año[12], al cual ya nos hemos referido, destaca la unanimidad de los asistentes en cuanto a los objetivos generales de la Metodología de la Matemática; igualmente señala que la labor en la que el profesorado puso más entusiasmo fue en la confección del Cuestionario, tarea que motivó discusiones que califica de interesantes y fecundas. De hecho, esa misma revista había publicado en los años anteriores varios artículos en los que profesores de matemáticas normalistas con inquietudes renovadoras expresaban su opinión sobre lo que debía constituir la formación del maestro de primaria.

5.2. Las obras de Metodología publicadas durante la Segunda República

En cuanto a las asignaturas de metodología de las diferentes disciplinas en particular de las matemáticas, hay que tener en cuenta que no existía un programa oficial que estableciera el contenido de tal asignatura. Tampoco había

[11] Dirección General de Enseñanza Primaria: «Circular dirigida a los directores de las Escuelas Normales del Magisterio primario». *Gaceta de Madrid*, 1932, **302**, pp. 631–632. Cita en p. 631.

[12] Eyaralar Almazán, *Cursillo de información...*, op. cit.

existido un programa o unas directrices para la Aritmética o la Geometría, por ejemplo, en el Plan de 1914, pero la situación no era comparable. Estas últimas eran disciplinas consolidadas, con una tradición escolar, en la escuela primaria y en la enseñanza normal. La *Metodología de las Matemáticas* en cambio era una asignatura nueva, sin una tradición escolar o cultural de la que partir y en la que mirarse.

Ciertamente se puede considerar que si se dio esa orientación al Plan de 1931 fue porque durante los años anteriores los profesores normalistas habían tratado cuestiones metodológicas en sus aulas y habían reflexionado sobre la enseñanza de la matemática en la escuela primaria, y también sobre cómo debían preparar a los futuros maestros en lo relativo a la metodología de la matemática, para que pudiesen encargarse de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. En la *Revista de Escuelas Normales* se publicaron varias contribuciones en ese sentido. En esta propuestas se advierte el estudio de obras de autores españoles y extranjeros, la mayor parte obras pedagógicas o psicológicas de carácter general, no específicas de las matemáticas, y obras de matemáticos que contenían una reflexión sobre la propia ciencia y sus métodos, así como de libros para enseñar matemáticas en los que a veces se podía advertir una reflexión y alguna influencia de las ideas pedagógicas del momento.

Pero el conjunto de las reflexiones y la experiencia acumulada –en las que se integran asimismo el análisis de las obras leídas y lo observado a veces en el extranjero– no conforman un programa de estudios concreto. Esta tarea estaba por hacer y había de realizarla cada profesor. El artículo 18, capítulo IV, del Reglamento de Escuelas Normales de 1933, dice:

> Los profesores redactarán sus programas en armonía con los cuestionarios oficiales, que se revisarán periódicamente por la Dirección General de Primera Enseñanza, oyendo al profesorado de Escuelas Normales y previo informe de la Inspección Central y del Consejo Nacional de Cultura[13].

[13] «Reglamento de Escuelas Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **102 (suplemento)**, pp. 1–19. Cita en p. 4.

El programa de las metodologías específicas debía comprender el conocimiento de los problemas actuales de la disciplina, el 'concepto de la ciencia' y la psicología infantil, para elaborar una didáctica asimismo específica (métodos de enseñanza, procedimientos, material...), además de pautas u orientaciones para elaborar los programas escolares de primaria. De modo que el alumno normalista del plan profesional debía tener, por un lado, una perspectiva de la matemática actual y de sus aplicaciones, y también un conocimiento de los métodos de la propia ciencia matemática; por otro lado, conocimientos psicológicos, pedagógicos y específicos de la didáctica de la matemática, lo que engloba técnicas didácticas, así como dispositivos materiales, y elaboración de programas.

La falta de obras de referencia para un programa que incluyese lo anterior motivó la aparición de varios libros, desde 1930[14] hasta 1936, obras cuyo contenido y estructura eran variados, y que podemos clasificar –a grandes rasgos y para facilitar su análisis– en cuatro grupos:

- Tratados de metodología de la propia ciencia matemática, entre los que se encuentran la obra de Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica de la Matemática Elemental. Tomo I. Metodología*[15], así como la de Manuel Xiberta, *Matemáticas. Metodología y Prácticas.*

- Obras con un carácter más divulgativo, dirigidas a maestros, en las que la parte de metodología de la ciencia matemática se ha suprimido, así como en general las referencias a ciertas cuestiones matemáticas de nivel superior, e incluso los nombres de matemáticos que cultivan la llamada 'matemática sabia'. Aquí se sitúa el libro de Margarita Comas *Metodología de la Aritmética y la Geometría*[16].

[14]El libro de Sáiz Salvat es de 1931, es posible que fuera publicado tras del Decreto de 29 de noviembre o que se publicase antes, cuando se preveía un cambio en los planes de estudios para la formación del magisterio primario. Pero responde a este tipo de contenidos, lo mismo que el de Charentón, de 1930. Realmente desde 1929 las voces reclamando un cambio en los planes de estudio de las Normales eran una constante –se puede constatar en las revistas profesionales, sobre todo la que editaba la Asociación Nacional del Profesorado Numerario de Escuela Normal–, y muchas personas confiaban en que este cambio se produciría, considerando la situación de la dictadura de Primo de Rivera en ese momento.

[15]Sus autores declaran la intención de publicar una segunda pare, dedicada a la didáctica, pero nunca lo hicieron.

[16]El libro de la misma autora *Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría* estaría

- Obras que intentan responder a las indicaciones de la Dirección General, e incluyen los contenidos citados anteriormente. Se encuentran en este grupo las de Felipe Sáiz Salvat, *Arte de estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental*; el libro de José María Eyaralar, *Metodología de la Matemática*[17], y el de Luis Paunero, *Ensayo. Las matemáticas en la educación.*

- Libros en los que se trata la metodología didáctica de un aspecto concreto de las matemáticas. Pertenecen a este grupo las obras *Metodología de los Problemas*, de Aurelio Rodríguez Charentón, *Metodología de las Matemáticas. Procedimientos de Cálculo mental y de Cálculo escrito rápido*, de Francisco Romero, o *Didáctica de los Problemas de Aritmética y Geometría*, de Eyaralar.

Si en general se reconoce que son los libros de texto los que determinan de hecho el currículo real de una asignatura, en el caso de la *Metodología de las Matemáticas* más bien fue al contrario, como expresa Eyaralar en el Prólogo de su obra:

> No se trata de una obra improvisada, sino que recoge el fruto de largos años de estudio y experiencia, transcurridos desde la publicación de nuestro *Nuevo Tratado de Aritmética* [...] Recoge, además, *este libro el fruto de un año de trabajar en la nueva asignatura de Metodología de las Matemáticas* del grado profesional, y la opinión dominante en el cursillo de Orientación Metodológica, al que muchos compañeros aportaron interesantes datos y valiosas sugerencias[18].

incluido en este grupo, aunque no se puede considerar una obra destinada a las clases de una hipotética asignatura de metodología de la matemática en la formación inicial de los maestros, ya que fue publicado en 1923 (figura un anuncio de mayo de ese mismo año en La Escuela Moderna, y una reseña en junio en la Revista de Escuelas Normales), cuando la situación política, al comienzo de la dictadura de Primo de Rivera, hacía imposible prever el curso posterior de los acontecimientos en España. En cualquier caso, la obra de 1932 retoma y amplía esta anterior, salvo en lo referente a los programas para primaria.

[17]Esta obra fue declarada de mérito por Orden de 20 de febrero de 1934 (Gaceta del 3 de marzo). En Eyaralar Almazán, José María: «Carta al Excmo. Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Residencia de Estudiantes. Archivo JAE. Expediente JAE / 49-170, pp. 20-24, 1936, p. 24.

[18]Eyaralar Almazán, José María: *Metodología de la Matemática*. Reus, Madrid, 1933, pp. V-VI. La cursiva es nuestra.

También Paunero, que publica su libro en 1935, declara: «Este libro es el reflejo de las lecciones explicadas en mi curso de Metodología de las Matemáticas. He querido recoger aquí el trabajo de un curso»[19]. Y Francisco Romero igualmente aclara que muchos de los problemas y ejercicios de su libro son producto de su experiencia personal en la Cátedra[20].

De hecho, las aportaciones realizadas por Eyaralar en muchos de los trabajos que había ido publicando en la *Revista de Escuelas Normales* sobre todo, y en la *Revista de Pedagogía*, están incluidas después en su *Metodología*. Esto mismo se observa también en otros autores, como Sáiz Salvat o Margarita Comas.

Así pues, sobre todo teniendo en cuenta la corta duración del plan de estudios y la fecha en la que se escribieron algunos de los libros, éstos fueron, en ocasiones, no solo una propuesta sino también una *memoria* de lo que se hacía en la Normales.

Tampoco eran siempre libros de texto elaborados para una materia reglada. Por ejemplo, los destinatarios del libro de Rey Pastor y Puig Adam eran tanto los maestros como los profesores de la segunda enseñanza.

Romero y Charentón se centran solamente en una parte de la matemática escolar, por considerar que no se le presta la atención suficiente. La obra de Eyaralar de 1936 trata de los problemas y puede considerarse un complemento a su obra de metodología[21].

Paunero previene que una exposición sistemática de los contenidos que marca un Cuestionario, tal como se hace en un libro, no puede reflejar la actividad real desarrollada en la asignatura, y por ello dice que su libro es un libro de *lectura* y no para estudiar la asignatura. Califica el contenido como una colección de ideas conectadas, no necesariamente sistematizadas ni conforme a una ley genética uniforme; de ahí que lo caracterice como *ensayo*, escrito con la intención de plantear problemas de Pedagogía de las Matemáticas, aportar algunas respuestas y despertar inquietudes.

[19] Paunero Ruiz, Luis: *Ensayo. Las matemáticas en la educación.* Tipografía Heliópolis, Sevilla, 1935, p. 5.

[20] Romero Carrasco, Francisco: *Metodología de las Matemáticas. Procedimientos de cálculo mental y de cálculo escrito rápido.* Tip. y Lib. de A. Arqueros, Badajoz, 1933, Prólogo.

[21] El contenido y las orientaciones que proporcionan estos tres libros se estudian en otros capítulos de la Memoria.

La obra que publica en el año 1932 Margarita **Comas**, editada por la *Revista de Pedagogía*, en la sección «Cuadernos de Trabajo», no tenía como objetivo –al menos no único– el de servir para los alumnos de la Normal; la propia autora manifestaba su intención de que el libro «hiciera para el maestro, sobre todo para el maestro de pueblo, que es el que por su aislamiento necesita especialmente de apoyo y ayuda, más fácil y más fecunda la preparación de la clase, sugiriéndole ideas, problemas, caminos...»[22].

Ello motiva que aparezcan en el texto referencias a pedagogos y psicólogos, pero no a matemáticos, como ocurre con las de otros de sus compañeros, y que la parte de metodología de la propia ciencia se reduzca hasta casi desaparecer; el interés por las propuestas para el trabajo autónomo en el aula (que además de responder a uno de los principios de la Escuela Nueva, venía a paliar el problema de la gestión del aula en las escuelas españolas, masificadas y no graduadas) y la abundancia de ejemplos, son otros indicadores de que el libro no era solamente un libro para estudiantes de magisterio con un bachillerato cursado. No se trata el problema de la elaboración de los programas escolares –aunque las propuestas van clasificadas en grados–, contenido en el Cuestionario, que ya había sido abordado en una obra anterior[23].

De los temas que acordaron incluir los profesores de Escuela Normal en el Cursillo de Información Metodológica, trata muy brevemente algunos, a modo de capítulo introductorio, apenas unas «consideraciones generales», como reza en el título, y se centra en la didáctica de la aritmética y de la geometría, aunque hemos de decir que muchas cuestiones metodológicas están presentes en los ejemplos de actividades y de materiales que propone y comenta.

Tan solo las obras de *Metodología* de Eyaralar, de Sáiz Salvat y de Paunero, ésta última en menor medida –ya hemos comentado la intención del autor– parecen seguir las directrices que marca el Cuestionario, en cuanto a los temas que debía incluir la asignatura *Metodología de las Matemáticas* del nuevo plan de estudios. En general, en sus propuestas aparecen, entre otros

[22] Comas Camps, Margarita: *Metodología de la Aritmética y la Geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1932, p. 5.

[23] Comas Camps, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 5.ª edición, 1932. Primera edición en 1923.

aspectos: metodología de la ciencia; formación pedagógica teórica general y luego específica de la matemática: cuestiones históricas; algunas cuestiones relativas a la didáctica de la Aritmética y de la Geometría; construcción y uso de materiales; contenido de una lección.

Mención especial merece Manuel **Xiberta**, que si escribe un libro de Metodología lo hace por adaptarse al nuevo plan de estudios, y aun así, esto solo en apariencia.

En el capítulo introductorio de su libro dice: «El presente *Curso de Metodología de las Matemáticas* lo dividimos en dos partes: *Metodología General* o tratado de los métodos propios de las ciencias matemáticas elementales, y *Metodología especial o Didáctica*»[24].

Argumenta que al no existir reglas fijas para estas cuestiones, se contenta con ofrecer normas de carácter general que orienten al maestro. Y añade, refiriéndose a las fuentes para el estudio de la Didáctica: «es evidente que ha de cimentarse necesariamente en el conocimiento del niño y en la experiencia de los buenos educadores».

Resume así el contenido de la que llama Metodología especial o Didáctica:

> a) Selección de lo que conviene enseñar.
> b) Fines que se han de perseguir.
> c) Como [sic] habrá de procederse para enseñar lo conveniente y lograr los fines perseguidos[25].

No obstante el libro lo divide en dos partes[26]; la primera se titula «Metodología General», pero la segunda, la que supuestamente estaría dedicada a la Didáctica, se titula «Ejercicios de Resolución de problemas numéricos».

En realidad, la formación de los maestros que defiende Xiberta es una formación exclusivamente matemática, como declara en el Prólogo de su libro:

> *Bajo la presión del Cuestionario vigente en la actualidad*, tratamos cuestiones ajenas al espíritu de la obra; pero sin dedicar a los temas

[24] Xiberta Roqueta, Manuel: *Matemáticas. Metodología y Prácticas*. Gerona: Talleres Gráficos de Solomón Marqués, 1934, p. 8.

[25] Ibídem, p. 9.

[26] Ver índice en p. 358.

> impuestos mayor espacio del que estimamos justo y aceptable, a fin de extendernos sobre los que constituyen el fondo de una sólida cultura matemática imposible de exigir para ingresar en las Normales, y sin la cual resultarían vana literatura los preceptos pedagógicos referentes a la enseñanza de las matemáticas en las escuelas y demás centros de cultura general[27].

El título completo del libro ya da una idea de las pretensiones de su autor:

> Metodología de las Matemáticas y ejercicios de Demostración de teoremas por los métodos sintético, analítico, de recurrencia y del contrarrecíproco y Resolución de problemas particulares y generales de Aritmética, Álgebra, Geomería, Trigonometría y Física, por los métodos sintético, reductivo y algebraico[28].

El propio Xiberta se presenta como profesor de *Matemáticas y su Metodología*, mientras que la asignatura que impartía en el año de publicación del libro era *Metodología de las Matemáticas*, un cambio de denominación que no es ingenuo: él mismo habla de que era la 'presión' del momento lo que le impedía elaborar un libro que no contemplase alguna cuestión metodológica, aunque en su caso solo fuera de la metodología de la propia matemática como ciencia.

Ya en 1932, antes del Cursillo del que saldrían los Cuestionarios, cuando los profesores de Escuela Normal publicaban en las revistas profesionales sus opiniones sobre lo que debía ser la formación en metodología de la matemática de quienes habían de ser maestros, expone sus ideas al respecto, con razones que no difieren de las aducidas en el propio libro. Apela a la falta de formación matemática de quienes ingresan en la Normal, como motivo para basar su formación normalista en los contenidos matemáticos clásicos. Alega que los bachilleres han estudiado unas matemáticas de nivel más elevado, pero no las rudimentarias que necesita un maestro, por lo que habrán de estudiarlas en la Normal. En cambio los que no proceden del bachillerato tienen una mejor preparación, ya que han permanecido más tiempo en la escuela y supuestamente han estudiado unas matemáticas más cercanas a las

[27] Ibídem, p. 5. La cursiva es nuestra.
[28] Ibídem, p. 3.

que son objeto de estudio en la etapa primaria; aunque, en cualquier caso, la precipitación con la que habrían adquirido la formación en el curso Preparatorio supone un grave defecto, por lo que necesitarían un repaso completo de las materias.

> Y esa labor de perfeccionamiento y trabazón cabría realizarla, a mi juicio, durante el curso de Metodología de las Matemáticas, sin perder de vista la función que se propuso el legislador; esto es, *realizando esta labor con métodos, procedimientos y por medios aplicables a la Escuela primaria*[29].

Esta visión de los alumnos del grado profesional, y de cómo puede actuar el profesor, contrasta con la de una persona que sí aboga por el nuevo modelo de formación. Pedro Chico escribe el mismo año que Xiberta publica su Metodología:

> La mayor parte del contingente de nuestros alumnos es muy probable que esté constituida por los antiguos alumnos de las Normales que estudiaron cuatro cursos completos de Geografía; los que no sean maestros habrán con ellos sufrido de una eficaz e intensiva preparación para el ingreso, y si aun así hubiese deficiencias, el profesor inteligente y entusiasta halla pronto recursos y maneras de que esa deficiencia quede perfectamente corregida (encargo de ejercicios especiales de estudio, desarrollo de temas de palabra y por escrito, etc. etc.) en la actuación de seminario[30].

La parte del libro que no corresponde a la propia metodología de la matemática (capítulos VI al XIII) consiste en una colección de problemas resueltos, clasificados por la rama o sector de la matemática a la que pertenecen o por el método matemático de resolución empleado, precedidos de un reducido recordatorio de las nociones y fórmulas empleadas en su solución y seguidos de una colección de problemas propuestos. En alguno de los capítulos añade unos comentarios –apenas unos breves párrafos introductorios–, a modo de

[29] Xiberta Roqueta, Manuel: «Metodología de las Matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **90**, pp. 147–148. Cita en p. 148. La cursiva es nuestra.

[30] Chico Rello, Pedro: *Metodología de la Geografía*. Reus, Madrid, 1934, p. 14.

«advertencia», aconsejando que los alumnos hagan un croquis que les ayude a resolver los problemas numéricos de geometría e igualmente con fines educativos y didácticos.

Sobre esta cuestión de la formación matemática del nuevo alumnado, merece la pena efectuar algunos comentarios.

En cuanto a la supuestamente deficiente formación matemática de quienes ingresaban habiendo cursado el bachillerato, muchos de los problemas que contiene la *Metodología* de Xiberta son copia de los que figuran en sus *Elementos de Aritmética*[31] y en sus *Elementos de Geometría*[32], obras que había escrito seis años antes para el bachillerato, que era una vía de entrada a la Normal. Eso sí, en el libro para preparar en metodología de la matemática a los maestros intenta solucionar el que los bachilleres no hayan realizado problemas de construcciones con regla y compás que, según él, son propias de la enseñanza primaria. Para solucionar esto propone problemas como: «*Trazar las tangentes comunes a dos círculos exteriores*»[33] o «*Por un punto P de una circunferencia máxima P A, trazar otra circunferencia máxima P C que forme con la primera un ángulo dado A O C*»[34]. Estos ejemplos son bastante elocuentes.

Continuando con las supuestas deficiencias matemáticas de quienes ingresaban en aquel momento en los estudios de magisterio, los exámenes de ingreso-oposición contenían un problema de matemáticas, y otro de aplicación a la Física u otras ciencias, y aunque hay quien dice que en la primera convocatoria en 1931 fueron sencillos, la mayor concurrencia de opositores hizo que fueran siendo más difíciles cada año. Observando una colección de problemas aparecidos en dichos exámenes en diferentes provincias españo-

[31]Pueden verse problemas de enunciado casi idéntico o idéntico, por ejemplo en:

Xiberta Roqueta, Manuel: *Elementos de Aritmética*. Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, Madrid, 1929. Primera edición de 1928. Segunda parte, cap. IV.

Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, cap. VII.

[32]Por ejemplo, sobre volúmenes, pueden verse problemas de enunciado casi idéntico o idéntico en:

Xiberta Roqueta, Manuel: *Elementos de Geometría*. Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, Madrid, 1928. Segunda parte, Cap. IV.

Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, cap. IX.

[33]Ibídem, p.247.

[34]Íbídem., p. 254.

las[35], parece que la propuesta de formación de Xiberta repite la mayor parte de la formación exigida para el ingreso.

Todo indica que los temores expresados por Xiberta son en realidad un pretexto para continuar impartiendo un programa fundamentalmente de Matemáticas, en detrimento de los aspectos didácticos, a pesar del cambio en el plan de estudios y la denominación de la nueva asignatura.

Además, el final de la cita anterior, «realizando esta labor con métodos, procedimientos y por medios aplicables a la Escuela primaria», es un indicador de que este autor considera que la preparación profesional que necesitaría un maestro no requiere que el programa incluya contenidos relativos a la enseñanza de las matemáticas, ya que se puede obtener 'por analogía', de modo que en sus clases de primaria imite, salvando las diferencias, las clases recibidas en la Normal. Esto hace innecesaria toda metodología didáctica. Según Manuel Xiberta, para formar al maestro «son necesarios y suficientes: Profesores de Normal especializados, y buenos libros»[36].

Mientras que Xiberta considera la metodología matemática en la formación de los maestros «cuestiones ajenas al espíritu de la obra», otros profesores opinan de forma muy diferente. Comparamos con otro libro que, como el suyo, la única metodología que contiene es la de la propia ciencia.

El Prólogo de la obra de **Rey Pastor** y **Puig Adam** ya revela una diferencia con el anterior en cuanto a la finalidad atribuida al libro, pues los autores declaran que «se analizan los materiales conceptuales que utiliza la Matemática para sus construcciones y los métodos con que éstas se organizan»[37]. En el capitulo segundo se profundiza en cuestiones de metodología y los propios autores indican que puede ser evitado por aquéllos cuya preocupación sea ante todo didáctica.

En cambio el segundo tomo, dedicado a la Didáctica, debía intentar responder, según los propios autores, a cuestiones como éstas: «¿Qué partes

[35] Álvarez Díaz, E.: *El ejercicio de los problemas*. Instituto Samper, Madrid, 1936. Pueden compararse, y es solo un ejemplo, los problemas que figuran en los capítulos IV y VI con los propuestos en el capítulo VII de la obra de metodología de Xiberta.

[36] Xiberta Roqueta, *Metodología...*, op. cit., p. 148.

[37] Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Metodología y Didáctica de la Matemática elemental. Tomo I. Metodología*. Imprenta de A. Marzo, Madrid, 1933, Prólogo, p. 1.

del edificio matemático deben exhibirse y estudiarse en los diversos grados de enseñanza? ¿Qué métodos pedagógicos serán los más eficaces en cada uno?»[38], aunque aclaran que la forma de dirigir la enseñanza, en cuanto a la cantidad, la calidad y el método, dependerá de la finalidad que se le asigne a la matemática en cada etapa escolar. Además, reconocen que es preciso considerar las características psicológicas del alumno en cada edad. Aunque estaba anunciada la publicación de ese segundo tomo, no hemos encontrado noticia de su publicación.

Aunque ese primer tomo no trata de cuestiones propiamente de Didáctica de la Matemática, estos profesores, que no eran formadores de maestros, reconocen la especificidad de dichas cuestiones no pertenecientes a la Matemática propiamente dicha ni a su Metodología, pero íntimamente relacionadas con la epistemología de la matemática[39]; y consideran por tanto que los elementos de respuesta a esos interrogantes merecen un tratamiento aparte. Es más, de lo primero que advierten en el Prólogo de su libro es de la confusión habitual entre la «Metodología de la Ciencia» y la «Metodología de la enseñanza», es decir, la «Didáctica».

Se pone así de manifiesto cómo las condiciones 'ecológicas'[40] (cambios en el Plan de Estudios, en los requisitos de acceso a las Normales, en el programa y en la función que se le asignaba a la nueva asignatura) no son suficientes para determinar –ni para cambiar sustancialmente– la práctica docente, como ocurre con Xiberta. Ésta depende también de la epistemología de la matemática que posea el profesor (sus ideas sobre la matemática y la finalidad de su enseñanza), y de su grado de aceptación del modelo pedagógico de referencia en la institución, en este caso, de la aceptación de las pautas que marcan los movimientos de renovación pedagógica.

[38] Ibídem, p. 2.

[39] En la primera parte, el libro de Metodología, se refieren a ese segundo libro de Didáctica, y remiten a él para tratar cuestiones de esta índole; por ejemplo, el tránsito de la enseñanza intuitiva a la racional (p. 18).

[40] Ver pp. 16 y sig. del apartado 1.3.

5.2.1. Algunos aspectos comunes en los libros de Metodología de la Matemática

En este apartado señalamos elementos diferentes y puntos coincidentes en las diferentes obras de *Metodología* que se escribieron para la formación de los maestros a raíz del Plan de 1931. Para ello haremos referencia al contenido de los libros (cuyos índices figuran al final de este capítulo, en la sección 5.4, pp. 349 y sig.).

En los diferentes capítulos de esta Memoria se tratan aspectos específicos que figuran en las obras de carácter metodológico, por lo que aquí haremos algunos comentarios más generales.

Eyaralar señala como **fuentes** para el estudio de la Metodología de las Matemáticas, la Metodología general, la Lógica, la Paidología «y sobre todo la *materia a enseñar*, no solo en su contenido, sino fundamentalmente, en sus cualidades esenciales»[41]. Igualmente recomienda consultar libros sobre cuestiones metodológicas, así como libros y programas escolares, la *observación* de buenos maestros, la *recopilación* de datos de interés metodológico, como juegos y canciones en los que intervengan el número o la cantidad, y la *experimentación*. Respecto a ésta última, no se refiere solo a realizar prácticas en escuelas, sino a ensayar procedimientos especiales para determinar cómo mejorar la enseñanza de algún asunto de las matemáticas, o para conocer problemas de las escuelas o trabajos realizados en otros países.

Estas mismas fuentes –incluidas la observación, la recopilación y la experimentación– son retomadas por Paunero, quien a continuación las resume, para cualquier Metodología: la propia matemática, su filosofía (de la que derivan los fundamentos lógicos), la historia de la Matemática, la psicología experimental y la paidología[42].

En general, y según se desprende de sus obras, los profesores normalistas más comprometidos con la reforma de la formación de maestros y más convencidos de la necesidad de introducir en ella las didácticas especiales, acuden a estas fuentes, aunque la importancia relativa de cada una de ellas varíe de unos profesores a otros.

[41] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 4-5.
[42] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 11.

Todos los libros citados coinciden en la **finalidad** de las matemáticas. Rey Pastor y Puig Adam, respecto a la finalidad de la enseñanza en cada etapa, afirman que la matemática en la enseñanza primaria debe tener un carácter instrumental, en la etapa secundaria un valor educativo y en la superior un fin profesional. Esta consideración del carácter utilitario de las matemáticas en primaria, de preparación para desenvolverse en la vida al salir de la escuela, es declarada en todas las obras de *Metodología*. Margarita Comas en algún momento se refiere a ello como un fin *social*[43]. Uno de los presupuestos de la Escuela Nueva es precisamente su relación con la vida: los conocimientos matemáticos debían ser seleccionados y tratados de manera que sirviesen a la función de ayudar al niño –y al adulto en el futuro– a desenvolverse fuera de la escuela.

Los profesores normalistas, sin excepción, consideran importante en la etapa primaria el fin educativo de las matemáticas, aunque no lo interpretaran siempre igual ni todos coincidiesen en la manera de conseguirlo; esto, como tantas otras cosas, dependía del modelo epistemológico de las matemáticas de cada uno y del modelo pedagógico que asumía.

Ya hemos comentado algunas diferencias en cuanto al contenido de **metodología de la matemática**. La impartición de la asignatura y, sobre todo, la elaboración de libros de metodología de la matemática, ofrecía la ocasión de revisar el propio modelo epistemológico y contrastarlo con otros, ya que parte de lo que trataban las metodologías eran los fines y las características de la propia ciencia. En el capítulo 8 se analizan diversos aspectos, que proporcionan una idea bastante clarificadora de los contenidos de metodología de las obras que estudiamos. En cuanto a los autores, veremos que dejan entrever no solo el modelo epistemológico de las matemáticas y el modelo pedagógico que subyace en ellos, sino incluso la calidad de su formación matemática.

La **historia de la matemática** está presente en la mayor parte de los libros (Comas, Eyaralar, Paunero, Sáiz Salvat). Sánchez Pérez, en el Cursillo de Información Metodológica, establecía así los requerimientos de historia de la matemática de los enseñantes, según el nivel en el que enseñaran:

[43] Comas Camps, Margarita: «Algunas contribuciones modernas a la Metodología de las Matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1934, **150**, pp. 241–247.

> En cuanto al contenido científico del maestro [...] en todos los casos debe conocer la historia de la Geometría: el maestro de escuela primaria, desde los egipcios y griegos hasta Descartes; el de enseñanza media, hasta el fin del siglo XIX; el de enseñanza superior debe conocer el desarrollo de la Geometría hasta el momento actual y seguir al día la marcha de su progreso[44].

La justificación de una recomendación tan pintoresca es que el profesor ha de saber siempre matemáticas un poco por encima de las que se estudian en el nivel en el que ha de enseñar.

Eyaralar justifica la importancia de conocer el proceso histórico del desarrollo de la matemática por razones culturales, además de porque influye en la visión que se tiene de esta ciencia. Le dedica un apartado del capítulo IV, en el que después de relatar la historia de la matemática en cada periodo y cultura, hace un interesante resumen en el que pone de manifiesto cómo ha evolucionado esta ciencia hasta el surgimiento de ramas nuevas, y hacia una abstracción cada vez mayor, la cual implica a su vez una mayor generalización y aumenta sus aplicaciones. Hace también un recorrido por la enseñanza de la matemática citando, por ejemplo, las contribuciones de Pestalozzi.

Se observa claramente que Paunero lo que hace es resumir en el capítulo cuarto de su libro lo que figura en el de Eyaralar, respecto a la historia y también a las consecuencias para su enseñanza.

Sáiz Salvat considera que el interés de que los normalistas estudien historia de la matemática es para utilizarla como recurso didáctico en primaria, aunque solo en el tercer grado.

Por ello estudia separadamente la historia de las tres ramas de la matemática que se estudiaban –Aritmética, Geometría, Álgebra– y en Aritmética va haciendo 'paradas' por diferentes creaciones matemáticas (numeración entera, sistema métrico decimal, aritmética mercantil, etc.).

Margarita Comas no hace ningún recorrido por la historia de la matemática –la parte que no corresponde a la enseñanza de la Aritmética o la Geometría ocupa apenas 9 páginas–, pero sí algunos comentarios. El interés

[44] Sánchez Pérez, José Augusto: «Cursillo de información metodológica. Grupo de Matemáticas: Conferencias. Metodología matemática». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **92 y 93**, pp. 24–28, 43–47. Cita en p. 46.

de conocer la historia de la matemática lo basa en el supuesto paralelismo entre el proceso histórico de creación de la ciencia y el del desarrollo del niño, por lo que aquélla proporcionaría pautas sobre cómo enseñar, aunque sin repetir fielmente la totalidad del proceso. Incluso recomienda conocer el estado actual de la matemática en pueblos atrasados ya que, supuestamente, se corresponde con el nuestro en una etapa anterior.

Eyaralar, que dedica el apartado siguiente al de la historia de la ciencia a la aplicación de la historia a la enseñanza, puntualiza el hecho de que el criterio del paralelismo existente entre el aprendizaje matemático del individuo y el desarrollo de la matemática no es absoluto, así como la necesidad de abreviar dicho proceso. Dedica este apartado a comentar aplicaciones a la enseñanza, por ejemplo, para comprender la idea del valor relativo recomienda utilizar ábacos, aunque solo sea para sumar. Precisamente observaciones como ésta última muestran claramente que no pretende que los niños repitan los procesos históricos ni que el interés cultural sea el principal; la historia de la matemática la presenta como medio, no como fin en sí mismo (ver p. 157).

Igual que Margarita Comas, una consecuencia que destaca del conocimiento de la evolución de la propia matemática es que el rigor se va desarrollando por necesidades de la propia ciencia, y recomiendan hacerlo así en la enseñanza; es decir, trabajar con el grado de rigor que puede ser comprendido por los estudiantes.

Eyaralar incluye notas históricas pero también un capítulo dedicado expresamente a dar recomendaciones –derivadas del estudio anterior– para la enseñanza, mientras que Sáiz Salvat muestra más interés por aspectos puramente anecdóticos. Pero lo curioso, tanto de Sáiz Salvat como de Paunero, son algunos de los comentarios de tipo moral –recordemos que por medio de las matemáticas había que 'educar', no solo instruir–, a veces algo sorprendentes, que hacen[45].

[45]Refiriéndose a la existencia de diferentes unidades monetarias y de la profesión de cambista, Sáiz añade: «esta variedad de medidas dificulta extraordinariamente el intercambio de ideas y la inteligencia de razas que ha de llevar a una mayor extensión y mejor interpretación de la sublime doctrina de Cristo» (Sáiz Salvat, Felipe: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental.* Imp, Mercé, Castellón, 1931, p. 96).

Paunero, en relación con la invención de la geometría analítica, y el uso de coordenadas, escribe: «Este descubrimiento presenta todos los caracteres de la raza latina, enfrente y

Sáiz Salvat divide su texto en dos partes: «Metodología» y «Didáctica», y en la segunda incluye capítulos dedicados a los aspectos psicológicos, métodos de enseñanza de las matemáticas, etc., así como la parte dedicada a la historia de la disciplina. Eyaralar y Paunero no agrupan los capítulos de sus libros en dos partes diferenciadas. La estructura de los libros varía, igual que lo hace el contenido, sobre todo en lo que no pertenece a la *Metodología* de la propia ciencia. En esto último las diferencias en cuanto a los asuntos de los que se ocupan –no así al modo de tratarlos– es menor. Quizá la única significativa es la relativa a la historia de la matemática, que Eyaralar y Paunero insertan en esta parte, Sáiz Salvat en la parte de Didáctica, y Xiberta ni la considera siquiera.

Paunero publicó su libro dos años después que Eyaralar el suyo. Es fácil comprobar que se inspira en el de su compañero, cuyo trabajo debía valorar –incluye diez publicaciones suyas en la recopilación bibliográfica que figura en el último capítulo–; por ello incluso la estructura guarda ciertas similitudes, aunque a los aspectos más propios de la didáctica de la matemática se les presta bastante menos atención en el libro de Paunero. Además, hemos de reconocer que está peor estructurado –no divide los capítulos en apartados ni epígrafes– y mezcla comentarios referentes a cuestiones a veces diversas, en ocasiones poniendo de manifiesto que su formación matemática y la dedicación a esta materia –era director de su Escuela– no eran tan elevadas.

Entre los **aspectos psicológicos** de la enseñanza de la Matemática están, entre otras cuestiones, la génesis de los conceptos básicos de la aritmética y la geometría, como el número y la extensión, aunque también aspectos como el juego, que estudiamos en la sección 7.3 (pp. 480 y sig.).

El análisis comparativo del tratamiento dado a cuestiones más específicas de **metodología de la enseñanza** (aspectos como las propuestas sobre cómo hacer la enseñanza intuitiva y activa, el papel del material concreto en la enseñanza de la matemática, etc.) están analizados en el capítulo 7; la definición, la demostración y la resolución de problemas en la enseñanza

en pugna, con los caracteres de la raza germánica. Representa la tendencia al mínimo esfuerzo y la propensión perezosa de detenerse ante una solución suficiente, sin molestarse a analizar si es la mejor o no» (Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 86).

primaria en el capítulo 8; de lo relativo a cómo organizar una lección y los dispositivos que lleva asociados nos ocupamos en el capítulo 6; las cuestiones relativas a la enseñanza de la aritmética, la geometría y el álgebra en los capítulos 3 y 4.

Eyaralar, Paunero y Sáiz Salvat describen las características de la Escuela Nueva y comentan los principales métodos asociados a ella, como el método de proyectos[46]. Comas, dada la organización de su libro, no los trata como tales[47], aunque hay en su Metodología numerosas referencias, ya que la mayor parte de las actividades y de los materiales que plantea tienen su origen en esos métodos.

Sáiz Salvat los enfoca como un estudio histórico de estas propuestas metodológicas, sobre todo en relación con la matemática, lo que denomina un «estudio histórico de la didáctica especial»[48]. Son métodos que han sido ensayados en otros países y también en España, aunque la adaptación a las escuelas españolas fuese un tema que estaba por resolver[49]. Estos profesores avisan sobre el peligro de importar acríticamente metodologías extranjeras o genéricas[50] e insisten en la necesidad de atender a la naturaleza específica de la matemática[51].

Modesto Bargalló hace una reivindicación similar para cada una de las disciplinas específicas:

> Así el alumno tratará los problemas metodológicos y didácticos de la disciplina respectiva, ciñéndose a una manera de hacer propia, de cada caso, de cada lección; esto es, el alumno en cada lección práctica verá, aunque no le sea advertido, las distintas maneras de poner en

[46] A la Escuela Nueva y las matemáticas hemos dedicado el apartado 2.1 (p. 38 y sig.), y al método de proyectos, el apartado 7.1 (p. 409 y sig.).

[47] Tiene obras dedicadas especialmente a algunos de los métodos de la Escuela Nueva, como el método Mackinder o el de proyectos, y también a la Escuela Nueva, que ya hemos citado anteriormente.

[48] Sáiz Salvat, Felipe: «La enseñanza de las Matemáticas. Al margen de la Reforma de Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1931, **83**, pp. 3–5, cit. en p. 4.

[49] Esta cuestión la hemos comentado en pp. 54 y sig.

[50] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit. Sáiz Salvat, Felipe: «De la organización didáctica». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **94**, pp. 4–6.

[51] Comas Camps, Margarita: «Cómo se enseña la aritmética y la geometría». *Revista de Pedagogía*, 1923, **16**, pp. 142–147.

> práctica los métodos de enseñanza, seleccionando el más adecuado a los objetos a enseñar, camino precisamente inverso al que selecciona lecciones para adaptarlas a los métodos enunciados a priori[52].

El problema de su generalidad no solo afecta a los métodos didácticos. Comas menciona algo parecido en relación con los principios psicológicos, que casi todos los educadores conocen, pero «de ellos hay muy pocos que en la actualidad puedan aplicarse en detalle a la enseñanza de una determinada materia como la aritmética, por ejemplo, porque falta la necesaria conexión con el contenido de la misma»[53].

La confección de un **programa** para la escuela primaria y los criterios para hacerlo eran uno de los contenidos que se demandaba que fueran objeto de estudio en la Normal. Solo Eyaralar y Sáiz Salvat incluyen ejemplos para la aritmética y para la geometría. Comas ya había publicado en su obra anterior –también de carácter metodológico– una propuesta de programas, basados en escuelas modernas pero adaptados a la situación real de las escuelas primarias españolas. Van divididos en tres grados y en cada grado, además de los programas se detalla el material y un ejemplo de desarrollo de una lección[54].

Sáiz se basa para sus propuestas de programa de geometría precisamente en «la magistral Geometría de J.M. Eyaralar, Profesor de Normal»[55], aunque también recomienda los de los directores de escuelas en las que se estaban ensayando los métodos más modernos, como Félix Martí Alpera, Ángel Llorca y José Xandrí Pich, así como los de las publicaciones del Museo Pedagógico Nacional. En cualquier caso, él detalla los de la República Argentina; para la Aritmética solo ofrece estos últimos. En ningún momento da razones de por qué elige precisamente los de este país. De todas formas no cree necesario ofrecer un programa elaborado, ya que «en rigor basta para desarrollar la

[52] Bargalló Ardevol, Modesto: «Las metodologías del profesional». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **88**, pp. 106–108. Cita en p. 107.

[53] Comas Camps, *Algunas contribuciones...*, op. cit., p. 245.

[54] Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit. Para el tercer grado incluye una lección de aritmética pero no de geometría.

[55] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 171.

materia: conocer el nivel de cada alumno con el fin de graduar la enseñanza y las directrices didácticas basadas en la Psicología Infantil»[56].

Eyaralar plasma los programas de Aritmética y de Geometría de varios países europeos, concretamente de Francia, Italia, Suiza y Bélgica, pero en este caso sí se justifica la elección: Francia por su carácter intelectualista, Italia por haber sufrido recientemente una reforma y por las coincidencias con España, y Bélgica y Suiza porque se consideran adelantados respecto a la renovación metodológica; en el caso de Francia conoció su sistema educativo y sus escuelas cuando disfrutó de la beca de la JAE.

La intención es que esos programas sean «base de juicio, término de comparación, y sobre todo, dada nuestra situación en la enseñanza, considerable estímulo»[57]. Por ello no se limita a mostrar ejemplos de programas sino que para facilitar la reflexión inserta, casi después de cada programa para cada curso, comentarios críticos que a veces son observaciones y con frecuencia van formulados como preguntas para el lector; incluso se le solicitan como ejercicio[58]:

> ¿Cree el lector suficiente el conocimiento de las formas que habrá adquirido el niño en relación con lo propuesto sobre todo por Froebel y la Montessori?
>
> Señálese la graduación en el conjunto del programa. Idem la separación del cálculo geométrico de la Geometría. [...] Nótense las reglas suprimidas. ¿Conviene que desaparezca la regla de tres compuesta? ¿Cómo puede ser sustituida?

Reconoce que sería más interesante ofrecer un programa español, pero no existía programa oficial en nuestro país y los que seguían las obras publicadas para la enseñanza primaria podían consultarse directamente. Como muestra de un programa español elige el del Instituto-Escuela, en su parte de infantil (niños menores de 8 años) y primaria (los tres grados). La única objeción era que se trataba de un programa preparatorio para la enseñanza secundaria (a la que no accedían la inmensa mayoría de los niños españoles en aquel

[56]Ibídem.

[57]Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 257.

[58]Ibídem, pp. 258, 261.

momento), y por ello algunos de los contenidos deberían sustituirse por otros que en ese centro se estudiaban en la etapa siguiente.

En general, los profesores que contribuyeron a renovar la enseñanza de la matemática en el bachillerato, aunque esta etapa y la primaria compartían «la doble misión de dar, por una parte, las nociones fundamentales de las Ciencias, Letras y Artes, y, por otra parte, fomentar en los alumnos la atención, la reflexión, el razonamiento y la memoria», asignan a la enseñanza primaria un finalidad preparatoria para la siguiente etapa. Sánchez Pérez declara que los programas de primaria del Instituto-Escuela «suponen el mínimo de formación matemática exigible para el ingreso en el Bachillerato»[59].

En cuanto a la posibilidad de ofrecer un programa propio, explica las razones para no hacerlo, razones que apelan a la iniciativa del lector pero, sobre todo, a la necesidad de tener en cuenta las condiciones *institucionales* en las que se desarrolla la enseñanza: «El programa, dentro de las líneas generales aquí determinadas, es algo relativo a las circunstancias de organización general, ambiente, disposición e intereses de los alumnos, etc., más aún en las condiciones de renovación cultural en que se encuentra España»[60].

Un dispositivo de evaluación muy de moda entonces eran los **tests**, considerados «la última palabra, por decirlo así, de la investigación y de la experimentación en el campo pedagógico»[61]; por ello los libros de *Metodología de las Matemáticas* muestran varios y la finalidad de cada uno. Los había generales (para determinar la edad psicológica), pedagógicos (para evaluar los conocimientos y determinar en qué grado debe estar el alumno), de diagnóstico (de la aptitud para las matemáticas) y analíticos (para determinar qué destrezas le faltan al alumno, de las que intervienen en un proceso). No obstante, estos profesores son conscientes de lo relativo del valor de un test. Por eso Sáiz Salvat sugiere completar sus resultados con la observación del niño.

[59] Sánchez Pérez, José Augusto: «Notas de metodología matemática». En: *Congreso de Oporto. Tomo III. Ciencias Matemáticas*, pp. 5–22. Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Madrid, 1921. Citas en p. 11 y p. 17.

[60] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 305.

[61] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 163.

Margarita Comas, aun entendiendo que es importante disponer de un diagnóstico del estado del alumno y de la clase tanto como de las dificultades de un proceso, cree que se ha abusado de las pruebas estandarizadas[62] que, además, proceden del extranjero y, por tanto, de otras culturas y otros sistemas educativos. Opinión que comparte Eyaralar, quien estima que las pruebas mentales han de adaptarse a la idiosincrasia de cada pueblo y al estado de la enseñanza; propone además que esta labor se haga en los laboratorios de las Normales.

Por último, una de las cosas que la Normal debía proporcionar a sus alumnos era una **bibliografía** relativa a la metodología correspondiente. En la práctica tenemos desde libros que no incluyen bibliografía alguna, como los de Rey Pastor y Puig Adam, Xiberta, Sáiz Salvat, Charentón y Romero, hasta alguno, como el de Paunero, en el que la bibliografía ofrecida constituye un apéndice extenso con amplia información, a pesar de lo cual se detectan en esta larga lista ausencias importantes, como los libros de Charentón o Romero.

En los libros de Margarita Comas y de Eyaralar aparece al final una bibliografía clasificada en dos partes, aunque el criterio de clasificación no es el mismo. En los de Comas suelen separarse los «Libros propiamente de Matemáticas» como disciplina, de aquéllos otros que clasifica como «Metodología. Orientación para el maestro», de carácter metodológico o didáctico (tanto si tratan de la metodología de las matemáticas específicamente como si son generales); en los de Eyaralar están separadas las «Obras generales», de carácter psicopedagógico o de metodología general, de las «Obras especiales», que se refieren a las matemáticas (sean puramente de matemáticas o de carácter didáctico).

Ambos profesores incluyen tanto obras españolas como extranjeras. Hay libros de matemáticos como Borel o Poincaré, libros de matemáticas que podrían calificarse como 'de texto' (en el primero de los libros de Comas todas los de matemáticas que cita tienen este carácter), de historia de la matemática, de matemática recreativa y artículos de profesores de secundaria (Sánchez Pérez). Los libros están escritos por psicólogos, pedagogos, maestros,

[62] Comas Camps, *Algunas contribuciones...*, op. cit., pp. 241-247.

inspectores, profesores de bachillerato, personas del Laboratorio Matemático o son obras publicadas por organismos internacionales, entre otras autorías. Muchos de estos libros están citados en el texto, sobre todo en el caso de Eyaralar.

Precisamente este último, cuyo libro es posterior a los de Comas y Sáiz Salvat, incluye los libros de ambos de 1932 y 1931, respectivamente, en su *Metodología*. Y en la bibliografía de la *Didáctica de los Problemas de Aritmética y Geometría* figura el libro de metodología de Charentón.

5.3. Un cambio de perspectiva en la formación didáctica de los maestros

Comparando entre sí las obras de los profesores más renovadores, se advierte la influencia del *modelo epistemológico de las matemáticas* que hay detrás de cada una de ellas.

Ya hemos comentado que la *Metodología* de Margarita Comas estaba centrada sobre todo –aunque no solo– en proporcionar ejemplos concretos de actividades y de materiales para el aula de primaria, con indicaciones para su realización por el maestro, aunque iban acompañados de algunas reflexiones didácticas sobre los tipos de actividades que presenta. Estos contenidos encajan con la visión que de la Matemática –al menos de la matemática escolar– tiene esta profesora: «La aritmética y la geometría empiezan, pues, por ser, *como la física o la historia natural, materias experimentales* y de observación [...] para llegar, en los grados superiores de la enseñanza, a la pura abstracción»[63].

Algunos formadores de maestros, como Manuel Xiberta Roqueta, o profesores dedicados a la enseñanza secundaria, como Sánchez Pérez, insisten especialmente en el estudio de los métodos de la propia ciencia matemática. Opinan de modo diferente otros profesores más identificados con el carácter profesional que debía tener la formación del magisterio, y que consideraban que la enseñanza primaria no debía tener un carácter exclusivamente propedéutico:

[63] Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., p. 7. La cursiva es nuestra.

> El fin propuesto por la enseñanza escolar es en él [el Instituto-Escuela] simplemente preparatorio para la propia del Instituto, mientras que en la Escuela primaria la enseñanza es un todo que ha de mirar principalmente a la preparación para la vida[64].

Otra evidencia de que «un componente esencial del "logos" (o bloque tecnológico-teórico) de una praxeología didáctica es la forma (más o menos explícita) de interpretar qué son las matemáticas y cómo se construyen, difunden, enseñan, aprenden y utilizan»[65], nos la proporciona Manuel Xiberta, cuya concepción de las matemáticas, según se desprende de sus libros, podríamos calificar de más clásica o *euclidianista*[66] que la de otros contemporáneos, concepción que está en consonancia con sus ideas sobre la formación de maestros en metodología de las matemáticas:

> No se nos pide, así lo entiendo, que formemos eruditos en Heurística y Didáctica porque eso corresponde al profesor de Filosofía y Pedagogía; ni que enseñemos el uso y manejo de todos los aparatos y chirimbolos lanzados al mercado por constructores de material escolar, porque de esto *ya se encargan los viajantes de librería que visitan las escuelas*[67].

Al contrario, quienes conceden más importancia a la vertiente inductiva y experimental de las matemáticas defienden la formación didáctica de los futuros profesores.

A pesar de la importancia otorgada a la formación práctica del maestro, la epistemología de estos profesores les lleva a advertir la necesidad de un *cuestionamiento tecnológico* sobre el que basar las *técnicas didácticas* y, por

[64] Eyaralar Almazán, *Cursillo de información...*, op. cit., p. 5.

[65] Bosch Casabó, Marianna y Gascón Pérez, Josep: «Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas. De los 'talleres de prácticas' a los 'recorridos de estudio e investigación'». En: A. Bronner y al. (Eds.), *Diffuser les mathematiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 55–91. IUFM de l'Academie de Montpellier, Montpellier, 2010, p. 64.

[66] Gascón Pérez, Josep: «Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 2001, **4**, pp. 129–159.

[67] Xiberta Roqueta, *Metodología...*, op. cit., p. 148. La cursiva es nuestra.

ello, afirman que la formación práctica debe estar sustentada en una base científica:

> La metodología didáctica, cualquier metodología especial, tiene un contenido científico extenso del que no se puede prescindir sin que se caiga en una rutina [...] Si se ha de evitar un practicismo que haga bajar el nivel científico, el tono de las normales, no puede haber en la didáctica y metodología otra fórmula armónica que: práctica sin rutina y teoría sin utopía[68].

Según relata Eyaralar, la opinión compartida de los cursillistas que compusieron el primer Cuestionario para la Metodología de las Matemáticas era que

> no ha de ser la Metodología de la Matemática un simple recetario, sino que por el contrario, ha de fundamentar sólidamente, científicamente, las directrices del método para que cada alumno adquiera un criterio propio que le habilite para hacer según su propia vocación y según las variables circunstancias escolares[69].

Antes incluso, cuando aún no se había publicado el Cuestionario para la Metodología de las Matemáticas, ya escribía Sáiz Salvat en la *Revista de Escuelas Normales* que, además de la Metodología pura, la didáctica escolar proporciona el «conocimiento *científico* del modo de enseñar la asignatura en la escuela primaria, esto es, el estudio *científico* de los problemas escolares»[70].

Y, como ya hemos comentado, se insistía en que ese conocimiento debía ser relativo a la materia en cuestión, en este caso la matemática. La conciencia de que la metodología (didáctica) de la matemática debía tener una entidad propia dentro del conjunto de conocimientos psicopedagógicos que debía aprender un futuro maestro, se sentía también respecto a otras didácticas específicas, como las Ciencias Experimentales. Modesto Bargalló se declara de acuerdo con Sáiz Salvat y Paunero (y con lo expresado en la reunión de la Dirección General con los Directores de las Normales) en que

[68] Sáiz Salvat, *De la organización didáctica*, op. cit., p. 6.
[69] Eyaralar Almazán, *Cursillo de información...*, op. cit., p. 5.
[70] Sáiz Salvat, *La enseñanza de las Matemáticas...*, op. cit., p. 4. La cursiva es nuestra.

> cada metodología sólo debe contener el aspecto que los problemas generales (fines, medios, etc.) toman en cada disciplina objeto de enseñanza; –esto es, en las Metodologías apenas debe estudiarse los métodos científicos, y didácticos, sino utilizar los adecuados a la formación y enseñanza de la Ciencia respectiva–[71].

La introducción de las Metodologías especiales, en nuestro caso el que por primera vez la Metodología de la Matemática sustituyese a las asignaturas de matemáticas, no estamos seguros de si se puede considerar o no el primer paso en la constitución de una disciplina, pero desde luego era un paso necesario. Algunos de aquellos profesores normalistas eran conscientes del avance producido, así como de que el camino no había hecho nada más que empezar:

> Si el desarrollo cronológico didáctico de una nación pasa las tres fases: indiferencia didáctica, información didáctica, creación didáctica, es muy posible, a juzgar por los hechos (que resaltan una afición desmedida a la copia de sistemas personalísimos extranjeros), que nos hallemos en la segunda[72].

Continúa subrayando Sáiz Salvat la necesidad de construir la asignatura sobre los principios básicos compartidos, más que sobre lo particular o anecdótico de cada propuesta:

> Si formación significa algo permanente en el orden educativo, la educación del futuro maestro debe tender a lo permanente, a lo universal [...] debe interesar al maestro la *metodología de la ciencia pura* y la *didáctica* [...] Y lo citado es de tal importancia, que solo ello es lo que puede satisfacer el libre desarrollo de la personalidad del maestro, y con él hacer posible el adelanto de una *didáctica nacional*, que debe estar formada por las didácticas personales de todos los maestros nacionales[73].

Ya en los años previos a la reforma del plan de estudios del magisterio, Eyaralar denuncia que, antes de que Margarita Comas publicara el libro

[71] Bargalló Ardevol, *Las metodologías...*, op. cit., p. 106.
[72] Sáiz Salvat, *De la organización didáctica*, op. cit., p. 4.
[73] Ibídem, p. 5.

Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría (en 1923), en España ni siquiera se habían escrito obras que resumieran las ideas europeas modernas sobre la enseñanza de las matemáticas.

Hemos comentado lo que supuso –lo que podría haber supuesto de no haberse visto interrumpido tan pronto y de manera brusca este modelo de formación de maestros[74]– la asignatura Metodología de la Matemática en el plan de estudios. No obstante cabe plantearse otras preguntas sobre aquel modelo formativo, concretamente sobre la preparación que recibían los maestros para enfrentarse a la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.

Somos conscientes de que efectuar un análisis de la asignatura *Metodología de las Matemáticas*, y por tanto de la formación en didáctica de la matemática que recibían los futuros maestros, sustentado sobre la perspectiva que aporta el tiempo transcurrido y el desarrollo actual de la Didáctica de la Matemática, nos puede llevar a hacer una crítica ilegítima. No obstante, y siendo muy conscientes de lo anterior, nos planteamos esta pregunta: *¿Qué formación, como enseñantes de matemáticas, proporcionaba realmente el Plan de 1931?*

La formación matemática de los maestros les lleva a construir saberes matemáticos a la vez que formas de organizar el estudio de las matemáticas en la escuela[75]. Durante el periodo que estudiamos hubo cambios legislativos que afectaron a los procesos de formación de maestros.

[74] A partir de 1936, debido al proceso de depuración del profesorado puesto en marcha por el gobierno franquista, la mayoría de estos profesores –de hecho, los más comprometidos con la renovación pedagógica–, sufrieron sanciones, encarcelamiento y muerte en algunos casos, o exilio. Margarita Comas se exilió a Inglaterra, donde murió años después; Sáiz Salvat fue trasladado forzosamente a otra Normal; Charentón, encarcelado y después apartado del magisterio; Landrove murió en la cárcel; Eyaralar fue encarcelado en 1936 y, años después, excarcelado y degradado a maestro, pero la cárcel había mermado su salud y murió en 1944; Paunero murió justo antes de poder sufrir alguna represalia. En cambio, Xiberta no sufrió ningún tipo de sanción, dada su trayectoria conservadora (había colaborado anteriormente con la dictadura de Primo de Rivera).

[75] Ruiz Higueras, Luisa y García García, Francisco Javier: «Didáctica de las matemáticas y Formación de Maestros: Respuestas y desafíos (desde la TAD)». En: A. Bronner; M. Larguier; M. Artaud; Y. Chevallard; G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. IIe congrès international sur la TAD*, pp. 171–213. IUFM de l'Academie de Montpellier, 2010.

Así, antes de la reforma de 1931 la formación de maestros se centra en la adquisición de saberes matemáticos, adaptados a las condiciones de la institución de formación, las Escuelas Normales. Recordemos que los alumnos que accedían a ellas no habían cursado el bachillerato, y los planes de estudio de las Normales incluían, en el Plan de 1914, las asignaturas de Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría (primer curso), Aritmética y Geometría (segundo curso) y Álgebra (tercer curso).

Tras la reforma de 1931, los aspirantes a maestro habían cursado el bachillerato y se asume que la formación matemática la habían adquirido antes de ingresar en las Normales, por lo que el Plan solo contemplaba la asignatura *Metodología de las Matemáticas*.

Si antes del plan profesional se enfatizaba, en particular en la formación matemática, lo matemático frente a lo didáctico, ahora el acento se pone en los aspectos didácticos y el conocimiento matemático no se considera problemático.

Se pasa así de estudiar unas *Matemáticas para el enseñante*, esto es, «las que un profesor debe conocer para poder comprender los contenidos y propuestas de enseñanza (técnicas, tecnologías, teorías) del programa de estudios de un nivel dado»[76], insuficientes para poner en funcionamiento en la clase organizaciones matemáticas destinadas a enseñar, a una formación en metodología de la matemática que, con el tiempo asignado en el plan de estudios, tampoco puede tener en cuenta –así lo atestiguan los libros escritos para esa asignatura– las *razones de ser* de las nociones, propiedades y técnicas que los maestros tienen que enseñar en la escuela primaria, lo que no permite tampoco a los futuros maestros –en contra de la opinión generalizada sobre el Plan Profesional– elaborar unas verdaderas *Matemáticas para la enseñanza*.

El programa de la asignatura *Metodología de las Matemáticas*, tanto si hace más hincapié en la metodología de la propia ciencia, como en aspectos más psicopedagógicos, en cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en general, o incluso si comprende una colección de actividades propuestas como ejemplo para enseñar matemáticas en la escuela primaria, no supone cuestionar en general los diferentes conocimientos matemáticos como tales; en particular, la razón de ser a la que aludíamos no suele

[76] Ibídem, p. 186.

estar presente. Las continuas alusiones a la aplicación de los conocimientos a la 'vida diaria' no sustituyen ese cuestionamiento. Por ejemplo, en el apartado 3.1.1 (p. 154), analizamos el tratamiento que da Eyaralar en sus libros de Aritmética a la numeración, desde las cuestiones que motivan el sistema de numeración hasta las respuestas intermedias (representación analógica de la cantidad, sistemas aditivos, multiplicativos, posicionales...), con alguna observación de carácter tecnológico, sobre el 'alcance' o la 'economía' de las técnicas, antes de presentar el sistema de numeración habitual. Pues bien, en los libros de Metodología tampoco están presentes cuestionamientos de este tipo[77].

El profesor de Geografía y de la Metodología de esta asignatura Pedro Chico dice: «Nos imaginamos la clase del grado profesional en todo el prestigio del más severo rigor científico, rigor que pide ahondamiento, ya se llame revisiones de contenido dentro del curso de metodología o trabajos de seminario del tercer curso»[78].

Se parte de los conocimientos que forman parte de las necesidades matemáticas del alumno de primaria y los autores se centran en la propuesta de actividades y de recursos –que a veces suponen la utilización de materiales didácticos–, sin apenas un análisis previo del contenido matemático, a partir del cual se determinen los *tipos de actividades*, las *técnicas*, las *tecnologías* que se harán o no explícitas; en definitiva, los elementos de una praxeología. Se ofrecen solo algunos elementos de las praxeologías matemáticas y las didácticas relacionadas con los conocimientos matemáticos implicados, y no para todos ellos.

Una restricción institucional importante es el escaso tiempo que se concede a la asignatura en el plan de estudios, que tampoco permite hacer otra cosa. De hecho, mientras que si agrupamos las metodologías específicas según las áreas de conocimiento actuales, todas tienen asignadas al menos 6 horas semanales durante un curso, a la Metodología de la Matemática se le

[77] Tan solo en la *Metodología* de Eyaralar, hay algunos elementos de este cuestionamiento pero en general aparecen añadidos al discurso principal, a veces en un anexo, y no formando parte integrante de éste. Un ejemplo es el relato «El rebaño de Juanillo», que aparece como lectura recomendada a los niños (pp. 238-242).

[78] Chico Rello, *Metodología...*, p. 5.

dedica la mitad, apenas 3 horas, que no podían ser suficientes para tratar las cuestiones metodológicas al tiempo que se construyen unas *Matemáticas para la enseñanza*.

Sin embargo, gestionar en la escuela de manera dinámica organizaciones matemáticas requiere que el profesor conozca las razones de ser que motivan cada conocimiento que pretenda enseñar, con el fin de diseñar propuestas de enseñanza que contemplen la 're-motivación' de esos saberes[79]. Cuestión que, dicho sea de paso, continúa siendo un problema de investigación actual en Didáctica de la Matemática:

> La distance est alors importante entre, d'un côté, les *mathématiques à enseigner* et, de l'autre, le corpus de *mathématiques pour le métier de l'enseignant* qui devrait permettre à cette profession d'élaborer des *mathématiques pour l'enseignement* à la fois authentiques épistémologiquement, cohérentes formellement, adéquates didactiquement. Ce problème, qui reste ouvert, interpelle frontalement la profession.[80].

Con la dedicación que le correspondía según el *Reglamento*, la didáctica de la Matemática forzosamente había de reducirse a los aspectos más generales (uso de materiales y otros recursos, forma de enseñar ciertos automatismos, dificultades que presentan algunas cuestiones concretas de matemáticas, forma de estructurar una lección, algunos ejemplos de evaluación, etc.), lo que, aun siendo útil para la formación de los maestros, y debiendo formar parte de ella, tratado de este modo no podía garantizar al futuro maestro com-

[79] Sierra Delgado, Tomás A.: *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid, 2006.

[80] «La distancia es, pues, importante entre, por un lado, las *matemáticas para enseñar* y, por otro, el cuerpo de las *matemáticas para la profesión de maestro*, que debería permitir a esta profesión elaborar las *matemáticas para la enseñanza* a la vez auténticas epistemológicamente, coherentes formalmente, adecuadas didácticamente. Este problema, que permanece abierto, interpela frontalmente a la profesión. Cirade, Gisèle: «Les professeurs en formation initiale face au casse-tête des nombres». En: A. Bronner; M. Larguier; M. Artaud; M. Bosch; Y. Chevallard; G. Cirade y C Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 327–347. IUFM de l'Académie de Montpellier, Montpellier, 2010. Cita en pp. 328-329. La traducción es nuestra.

petencia suficiente para planificar, gestionar y evaluar la enseñanza de las matemáticas en una escuela primaria.

Aunque el Plan de 1931 supone una evidente mejora en la formación matemática y didáctica de los alumnos, en tanto que aumenta su formación matemática, adquirida antes de ingresar en las instituciones de formación de maestros, y también la formación didáctica, al incluir una asignatura de metodología de la matemática, no existente hasta ese momento, propone no obstante una *formación escindida*, que implícitamente supone una formación en didáctica de la matemática 'independiente' de la matemática, en el sentido de que no precisa cuestionar (desde la didáctica) el conocimiento matemático que los aspirantes a maestro han adquirido previamente –y que se considera 'transparente'–, sino solo dar algunas pautas para su tratamiento en los niveles elementales.

En este sentido, Yves Chevallard afirma que «la separación instituida entre el estudio de la materia enseñada y el estudio de la enseñanza de la materia no permite un dominio suficiente de la materia como para que su enseñanza no se degrade»[81].

Los presupuestos desde los que se ha venido analizando este Plan –y a veces también la nostalgia– han hecho que el énfasis se ponga casi exclusivamente en los aspectos positivos (la dignificación y la profesionalización del magisterio, la importancia concedida a la formación pedagógica, a la didáctica en las diferentes disciplinas, a las prácticas docentes...). Pero también ha sido así porque, como decía José María Eyaralar, a propósito de un libro de Margarita Comas, **«para que una obra tenga valor positivo basta con que supere lo anteriormente realizado y sirva de base a una forma nueva, superior a la vez»**[82].

[81] Chevallard, Yves: «Aspectos problemáticos de la formación docente». En: *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, pp. 1–10. Huesca, 2001. `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15`. Consultado el 10-10-2015, p. 5.

[82] Eyaralar Almazán, José María: «Cómo se enseña la Aritmética y la Geometria, por Margarita Comas». *Revista de Escuelas Normales*, 1923, **6**, p. 175. Cita en p. 175.

5.4. Los índices de las obras sobre *Metodología de las Matemáticas*

5.4.1. Margarita Comas: *Metodología de la Aritmética y la Geometría*

CAPÍTULO I.- Consideraciones generales

CAPÍTULO II. - La numeración

CAPÍTULO III.- Fracciones

CAPÍTULO IV.- Pesas y medidas

GEOMETRÍA

CAPÍTULO V.- La construcción de un pueblo

CAPÍTULO VI.- Sencillo análisis de figuras

CAPÍTULO VII.- Primeras nociones de geometría de posición. El triángulo

CAPÍTULO VIII.- Áreas

BIBLIOGRAFÍA

5.4.2. José María Eyaralar: *Metodología de la Matemática*

Prólogo

CAPÍTULO PRIMERO. - Objeto de Metodología

Notas

CAPÍTULO SEGUNDO.- Valor utilitario de la Matemática

CAPÍTULO TERCERO.- El valor educativo de la Matemática

1.º Opinión de matemáticos y educadores

2.º Necesidad de la Matemática para la educación integral de la inteligencia

3.º Criterio lógico

4.º Criterio Psicológico

5.º El Programa escolar desde el punto de vista educativo

Notas

CAPÍTULO CUARTO.- Caracteres propios de la Matemática

1.º La matemática como arte y como ciencia

2.º Los conceptos matemáticos

3.º Las definiciones

4.º Las proposiciones y sus clases

5.º La demostración.- Análisis y Síntesis

6.º La inducción completa

7.º Métodos particulares de demostración de teorema y de resolución de problemas

8.º Evolución de la Matemática

9.º Aplicación del Método histórico a la Enseñanza

Notas

CAPÍTULO QUINTO.- La Psicología del niño y la enseñanza de la Matemáticas

1.º Las actividades psicológicas del niño

2.º La imitación, el juego y los intereses

3.º Génesis del concepto de número y de la extensión

Notas

CAPÍTULO SEXTO.- Caracteres generales de la enseñanza de la Matemática

1.º La graduación

2.º El Plan

3.º Condiciones del Método para hacerlo asociativo y razonado

4.º Procedimientos que hacen la enseñanza agradable, activa e intuitiva

5.º El automatismo en la enseñanza

6.º El material de enseñanza

7.º El contenido.- Su justificación

8.º Relaciones de la Aritmética con la Geometría, y de ambas con las demás, especialmente con el dibujo y los trabajos manuales

Nota

CAPÍTULO SÉPTIMO.- Métodos especiales

1.º Enseñanza de la Matemática en el Método Froebel

2.º El Método Montessori

3.º El Método Decroly

4.º La Matemática en las Escuelas Nuevas

CAPÍTULO OCTAVO.- El Programa

1.º Estudio crítico de los programas extranjeros más notables

2.º Estudio de los programas de obras e instituciones españolas más notables

3.º Formación de un programa propio

CAPÍTULO NOVENO.- Desarrollo del Programa

1.º Los test como elemento de valoración

2.º La lección: Sus clases.- Normas para su desarrollo

3.º Didáctica de la Aritmética y la Geometría

4.º El cálculo ordinario y el cálculo rápido

5.º El cálculo mental

6.º Los ejercicios y problemas

7.º Los números fraccionarios, la proporcionalidad; agrimensura, planos y mapas

8.º Utilización del Álgebra y la Trigonometría en la Escuela Primaria

BIBLIOGRAFÍA

5.4.3. Luis Paunero: *Ensayo. Las matemáticas en la educación*

Introducción

Las Matemáticas en la educación

Matemáticas y Lógica

Matemáticas y Psicología

Caracteres propios de las Matemáticas

La psicología infantil y la enseñanza de las matemáticas

Génesis de la idea de número y extensión

Desarrollo de las ideas de número y extensión

La graduación en la enseñanza de las matemáticas

Los problemas en la Escuela Primaria

La lección de matemáticas

Los test en Matemáticas

Apéndice bibliográfico de Metodología de las Matemáticas

5.4.4. Rey Pastor y Puig Adam: *Metodología y didáctica de la Matemática elemental. Tomo I. Metodología*

CAPÍTULO PRIMERO.- NOCIONES DE METODOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL.

1.º- Carácter y clasificación de la matemática

2.º- Método inductivo y método deductivo en Aritmética

3.º- Método experimental, método intuitivo y método racional en Geometría

4.º- Los conceptos y las definiciones

5.º- La demostración

6.º- Relaciones entre los teoremas derivados

7.º- Los métodos indirectos de demostración

8.º- Resolución de problemas.- El método reductivo

9.º- El método reductivo en Geometría

10.º- Los métodos especiales de la Geometría métrica

11.º- El método de los lugares geométricos

CAPÍTULO II.- COMPLEMENTOS DE METODOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL

1.º- Las definiciones matemáticas

2.º- La inducción matemática

3.º- El rigor y los paralogismos matemáticos

4.º- Los paralogismos de razonamiento

APÉNDICE.- El uso de los instrumentos geométricos

5.4.5. Felipe Sáiz Salvat: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental*

METODOLOGÍA.

I.- De la metodología en general

II.- Métodos analítico y sintético en la demostración expositiva o en el problema. Procedimiento de sustituciones sucesivas.

III.- Procedimientos demostrativos de la cuarta proporcional (particular) y de los límites (general)

IV.- Procedimiento de investigación físico y de reciprocidad

V.- Procedimiento para hallar valores incógnitos

VI.- Procedimiento para obtener fórmulas derivadas. Procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres. Ídem. de eliminación de errores.

VII.- Procedimientos demostrativos extensivos y del término (n+1). Procedimiento de triedros suplementarios

VIII.- Procedimientos demostrativos intuitivos en Aritmética

IX.- Procedimientos de triángulos semejantes y trigonométrico. Cálculo de áreas en agrimensura.

X.- Métodos de investigación y exposición geométricos: lugares geométricos, simetría, reducción ad-absurdum, superposición

XI.- De la correspondencia geométrica. Procedimientos de transformación. La subordinación de verdades.

XII.- Procedimiento especiales aritméticos; otros procedimientos de resolución y construcción

DIDÁCTICA

I.- De la historia de las Matemáticas

II.- Historia de las Matemáticas (continuación).- Geometría

III.- Empleo de las Matemáticas para desarrollar el sentimiento estético

IV.- De «la comprobación» y amor a lo verdadero

V.- Del examen psicológico de Matemáticas

VI.- Del examen pedagógico de Matemáticas

VII.- Escuelas activas.- La enseñanza o educación e instrucción matemática de los párvulos, según la D.ª Montessori. Id según Claparède (Andemars, Lafendel)

VIII.- La iniciación algebraica, trigonométrica y topográfica

IX.- Fases generales en la enseñanza de la Geometría elemental

X.- Fases generales en la enseñanza de la Geometría. (Continuación)

XI.- Directrices cardinales en la enseñanza de la Aritmética.- La psicología numérica

XII.- (Continuación).- Directrices cardinales de la enseñanza de la Aritmética

XIII.- Directrices cardinales de la enseñanza de la Aritmética (Continuación)

XIV.- Del libro y modo de estudiar Matemáticas

XV.- Enseñanza de la Aritmética y Geometría en la escuela elemental, según Décroly. - Juegos matemáticos escolares

XVI.- Ensayo de una síntesis didáctica escolar

5.4.6. Manuel Xiberta: *Matemáticas. Metodología y Práctica*

CAP. PRELIMINAR.- CONCEPTO DE LA METODOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS

PRIMERA PARTE
METODOLOGÍA GENERAL

I. Su objeto y fines generales

II. Valor pedagógico de las matemáticas; opiniones de matemáticos y educadores

CAP. I.- ORIGEN Y DEFINICIÓN DE LOS ENTES MATEMÁTICOS

I. Conceptos primitivos. II. Formación de los conceptos matemáticos. III. Las definiciones

CAP. II.- FORMACIÓN DE LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS

I. Los principios fundamentales. II. Los teoremas. III. Los problemas. IV. Los métodos de formación

CAP. III.- DEMOSTRACIÓN DIRECTA DE LOS TEOREMAS

I. Los métodos generales. II. Comparación de métodos sintético y analítico. III. Método de recurrencia.

CAP. IV.- DEMOSTRACIÓN INDIRECTA DE LOS TEOREMAS

I. Método del contrarrecíproco. II: Crítica de la demostración por el absurdo. III. Aplicación de las leyes de las proposiciones equivalentes y del principio general de reciprocidad. IV. Ejercicios de demostración de un mismo teorema por síntesis, por análisis y por el absurdo.

CAP. V.- RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS NUMÉRICOS

I. Nociones fundamentales sobre la medida de cantidades. II. Unidades de medida. III. Magnitudes proporcionales en general. IV. Los métodos de resolución. V. Aplicaciones especiales del método algebraico

EJERCICIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NUMÉRICOS

CAP. VI. Problemas sobre cambios de unidad

CAP. VII. Problemas generales y particulares sobre cuestiones de Aritmética mercantil

CAP. VIII. Resolución de problemas por los métodos reductivo y algebraico

CAP. IX. Problemas de Geometría

CAP. X. Problemas especialmente resolubles por el método algebraico

CAP. XI. Problemas de Trigonometría

CAP. XII. Aplicaciones especiales del método sintético: algunos problemas elementales de Física

CAP. XIII. Resolución de los problemas gráficos

Capítulo 6

Las organizaciones didácticas en la formación matemática del magisterio

Puede resultar grato al profesor español de los tiempos futuros saber, por descripción directa, cómo eran las clases de una Escuela Normal de su patria en otros tiempos que tal vez sean de renovación docente.

José María Eyaralar

En este capítulo nos proponemos analizar la manera en la que se organizaba la formación matemática y didáctica en las Escuelas Normales, formación como profesores de matemáticas, centrándonos en cómo lo hacían los profesores que lideraban la renovación metodológica en la época que estudiamos. También consideraremos algunos de los dispositivos que formaban parte de las propuestas para organizar la enseñanza de la matemática en los niveles elementales, fundamentalmente la escuela primaria. Explicar y comparar estos modelos docentes supone tener en cuenta, por una parte, el *modelo epistemológico de las matemáticas* en ese momento, es decir, las ideas sobre qué son las matemáticas y cómo se interpretan, ya que ello va a determinar en parte cómo se plantea su enseñanza. Pero esto también viene determinado

en gran medida por las ideas dominantes sobre la enseñanza y el aprendizaje, o el *modelo pedagógico* respecto a la enseñanza de las matemáticas –y no solo de esta disciplina– en aquel momento histórico; un modelo condicionado por la institución –Escuela Normal o escuela primaria–, pero que hemos de estudiar a partir de su reflejo en las personas cuyo testimonio nos ha llegado y que estaba influido por las ideas de la Escuela Nueva, ya comentadas.

Para determinar cómo organizaban las clases de matemáticas en las Escuelas Normales, o en la escuela primaria, los profesores que lideraban la reforma en la enseñanza de las matemáticas en la época de la que nos ocupamos, vamos a identificar los distintos tipos de dispositivos didácticos que proponen, en general asociados a praxeologías matemáticas concretas, con cierta independencia de los contenidos matemáticos a los que se aplican. Las nociones definidas en el marco de la TAD se revelan como instrumentos útiles para interpretar la información que nos ha llegado a través de los escritos de estos reformadores.

Veremos varios tipos de *dispositivos*, y la forma en la que eran utilizados, es decir, los gestos didácticos asociados a cada uno de ellos. Un dispositivo es lo que, junto con ciertos tipos de *gestos* (realizados sobre este dispositivo), compone una *técnica*. Estos tipos de gestos responden pues a la cuestión de cómo utilizar los dispositivos de ese tipo[1]. Pero una técnica a su vez permite realizar un cierto tipo de *tareas didácticas*. Intentaremos precisar qué *función* cumplía cada uno de estos dispositivos, identificando cuáles son las tareas que estas técnicas permitían asumir.

En este capítulo analizaremos el dispositivo 'lección' en la institución 'Escuela Normal', y a continuación algunos de los dispositivos asociados a ella[2]. Nos basamos principalmente en las publicaciones de José María Eyaralar, el profesor de Escuela Normal más representativo de la renovación en

[1] Ladage, C. y Chevallard, Y.: «La place du portfolio dans la conception et l'implémentation d'une organisation didactique: problèmes ouverts». Comunicación al symposium «Éthique et usage des TICE en éducation» del coloquio international «Efficacité & Équité en Éducation» (Rennes, noviembre, 2008), 2008. `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=157`.

[2] Estudiaremos en este capítulo aquellos dispositivos sobre los que disponemos de escritos que los describen de forma más o menos sistemática. De uno de ellos, las *excursiones*, hemos comentado ya (en p. 247 del apartado 4.1.1) una propuesta de Sáiz Salvat.

la enseñanza de la matemática, por ser el que, a tenor de sus escritos, ha reflexionado más y con mayor profundidad sobre esta cuestión. Utilizaremos su libro sobre la Metodología de esta disciplina así como los artículos que escribió en la *Revista de Escuelas Normales*; pero también nos referiremos a otros profesores normalistas, autores igualmente de libros de *Metodología de las matemáticas* para sus alumnos aspirantes al magisterio, Luis Paunero y Felipe Sáiz Salvat sobre todo[3], algunas de cuyas propuestas compararemos con las de Eyaralar. Después analizaremos otro dispositivo interesante, las prácticas de enseñanza ligadas a la asignatura *Metodología de las Matemáticas*. En el capítulo siguiente, nos ocuparemos de otros dispositivos empleados en la enseñanza primaria, entre ellos los proyectos, un dispositivo muy significativo en la época para la escuela y del que se ocuparon personas relevantes del movimiento de la Escuela Nueva, entre ellas profesores de Escuelas Normales, como Margarita Comas[4].

6.1. La lección

6.1.1. El dispositivo 'lección' en la Escuela Normal

Nuestro punto de partida es la descripción y las reflexiones que hace Eyaralar sobre sus lecciones de matemáticas en la Escuela Normal en unos artículos publicados en 1927 en la *Revista de Escuelas Normales*[5]. Es decir, fueron escritos en la década anterior al Plan de 1931. Por ello, las observa-

[3]Otros profesores de Escuela Normal escribieron también libros sobre metodología de la matemática, por ejemplo, Aurelio R. Charentón, que escribe un libro sobre la resolución de problemas, o Francisco Romero, cuya obra está dedicada fundamentalmente a las operaciones aritméticas, pero no hacen propuestas sobre la estructura de las lecciones en general. En este capítulo nos referimos sobre todo a quienes en sus obras tratan sobre la estructura de una lección de matemáticas en general.

[4]Otros dispositivos, como los materiales manipulativos o el juego, se estudiarán en el capítulo siguiente, como dispositivos para la enseñanza elemental, aunque la mayoría de los que estudiamos en ambos capítulos podían usarse tanto en la enseñanza primaria como en la formación de maestros, por lo que en ocasiones haremos referencia a ambos usos, incluso estableciendo relaciones entre uno y otro.

[5]Eyaralar Almazán, José María: «Una clase de Matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1927, **41, 44 y 45**, pp. 11–12, 143–145 y 181–183.

ciones sobre los dispositivos y gestos referidos a la enseñanza en la Escuela Normal, no se refieren a lecciones de la asignatura de *Metodología de las Matemáticas* sino a las asignaturas de Matemáticas[6].

Cada semana, se dedican dos días a las lecciones y un día a hacer problemas y ejercicios. La estructura de las clases dedicadas a las lecciones es la siguiente: El profesor, en los primeros 40 minutos saca a la pizarra a 6 o 7 alumnos y les pregunta la lección del día anterior, tras lo que le comunica a cada uno su nota, cuya ponderación en la nota final ellos conocen de antemano. Después viene la explicación de la lección por parte del profesor, que dura unos 20 o 30 minutos y la propuesta simultánea de problemas a los alumnos. Por último, el profesor entrega los cuadernos corregidos a los estudiantes preguntados el día anterior, mientras les hace las observaciones y comentarios oportunos.

Analicemos los gestos asociados al dispositivo 'lección'.

La función del interrogatorio en la pizarra es, en cuanto al alumno, animarlo a ir estudiando las lecciones cada día, y acostumbrarlo a expresar sus conocimientos, a *comunicarlos*; en cuanto al profesor, le permite evaluar los progresos del alumno, se trata de una función de *evaluación*. Pero también sirve, para «acabar la obra de la explicación y del estudio del alumno, haciendo que no se retire del encerado sin haber dominado la cuestión»[7], es decir, es un instrumento didáctico que contribuye a la evaluación, a la vez que a hacer la *síntesis* de la lección y va ligado por tanto al momento de la *institucionalización*. De hecho, se hace hincapié precisamente en esta función, cuando indica que se derivan cuestiones a toda la clase para mantener la atención de todos los alumnos y no solo de los protagonistas de ese día. El valor formativo que confiere Eyaralar a este gesto didáctico y su valor para institucionalizar queda patente cuando expresa la finalidad de «analizar el profesor *lo que queda* de su explicación del día anterior», y el propósito de conocer al alumno, y juzgarle solo «en último término»[8].

[6] Los libros sobre *Metodología de las matemáticas* que manejaremos van destinados a mostrar a los alumnos normalistas cómo debían enseñarse las matemáticas en la escuela elemental.

[7] Ibídem, p. 12.

[8] Ibídem.

La explicación de la lección no la describe como una clásica 'clase magistral', sino como una «conversación del profesor con sus alumnos»[9], en la que no faltan los *momentos de institucionalización*, materializados en el resumen de las ideas principales en la pizarra, haciendo hincapié en las definiciones, reglas y enunciados y facilitando su registro en los cuadernos de los alumnos, dispositivo que comentaremos después.

Pero quizá el aspecto más importante que comenta Eyaralar sea el planteamiento de un problema para introducir cada cuestión nueva. Utiliza la técnica didáctica de proponer una *cuestión motivante* y, tras ella, la *tarea motivada*[10]. Como ejemplo propone los siguientes: para la Combinatoria «¿Cuántos diptongos pueden formarse en castellano?» (tarea culturalmente familiar para los alumnos y que se utiliza para propiciar una situación que evoca –con las salvedades oportunas– lo que describíamos como un momento de 'primer encuentro' con un cierto tipo de tareas) antes de definir las 'variaciones' (mediante tareas problemáticas); y en Aritmética «Hallar los divisores del número 11», para introducir los números primos. En Geometría la cuestión motivante puede ser un trabajo manual, como construir un cuadrado a partir de una hoja de papel. Con ello pretende ser coherente con la *tecnología didáctica*, acorde con los principios de la Educación Nueva, es decir, con las *teorías didácticas* que estaban cobrando fuerza en aquel momento: «tratándose de hacer así viva las nociones de didáctica que aparecen muertas en los tratados de Pedagogía»[11].

Es interesante comparar cómo se desarrolla la lección para los futuros maestros con la propuesta que realiza en su *Metodología de la Matemática*[12], sobre el desarrollo de una lección en la escuela.

[9] Ibídem.

[10] Chevallard, Yves: «Organiser l'etude: 1. Structures & Fonctions». En: *XIe école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3–32. La Pensée sauvage, Grenoble, 2001.

[11] Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, op. cit., p. 12.

[12] Eyaralar Almazán, José María: *Metodología de la Matemática*. Reus, Madrid, 1933, pp. 332-338.

6.1.2. La 'lección' en la escuela primaria

Al igual que otros profesores de escuelas normales, José María Eyaralar expone con detalle cómo ha de ser una lección en la escuela primaria, concretando la estructura que cree que debería tener[13]. Hay que recordar que en ese momento, en el que las metodologías docentes estaban sufriendo una profunda renovación, impulsada por las ideas pedagógicas de la Escuela Nueva, cobraban mucha importancia las cuestiones organizativas en la escuela, en particular el cómo organizar una lección; en opinión de Sáiz Salvat, «actualmente tiene más interés el aspecto de la organización escolar que el didáctico, quizás porque en el didáctico ya se han conseguido buenas conquistas»[14].

Eyaralar reconoce diferencias según se trate de un nivel u otro de la enseñanza primaria; por ello hace observaciones para el nivel más elemental, periodo *preparatorio*, y para el nivel superior o *sistemático*, dejando el intermedio, ya que tiene elementos de ambos. Asimismo clasifica las lecciones, por su finalidad, en tres clases: lecciones de *elaboración*, de *repaso* y de *recapitulación o generalización*, según que su propósito sea la adquisición de nuevo conocimiento, la aplicación inmediata o la fijación de lo aprendido, y la síntesis y sistematización de los conocimientos elaborados, respectivamente. Aclara que no considera lecciones específicas las de aplicación ni las de ejercitación, tal como hacen otros autores, por considerar estas funciones propias de los problemas y de los ejercicios, respectivamente.

Hace incluso observaciones referidas a cuestiones de tipo 'ecológico', considerando la necesidad de concentración que requiere la Matemática, frente a otras materias. Por ello reivindica que la clase de matemáticas se imparta por la mañana y que su duración se sitúe entre los 15 o 20 minutos, en el

[13]Estudiamos aquí, sobre todo, propuestas de profesores que describen la estructura de una lección para la escuela primaria. Otros profesionales, como Margarita Comas o Aurelio R. Charentón, dan orientaciones sobre cómo plantear una secuencia de enseñanza para algunos contenidos, pero lo que hacen es reflejar las actividades o los materiales que utilizarían en dicha lección, para que sirva de ejemplo de la enseñanza de una noción concreta. Pueden inferirse de ello algunos elementos de las praxeologías matemáticas y también de la praxeologías didácticas –que tratamos en otros capítulos–, pero no es comparable a las propuestas que aquí comentamos, centradas en la *estructura* de la lección.

[14]Sáiz Salvat, Felipe: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental*. Imp, Mercé, Castellón, 1931. Cita en p. 181.

caso de los más pequeños, y entre 30 y 45 minutos para los grados superiores. E incluso tener en cuenta, a la hora de situarse más cerca del mínimo o del máximo de dichos intervalos, el método usado.

Las fases que distingue en una *lección de elaboración* son:

1.ª Planteo de un problema, relacionado con el fin de la lección.

2.ª Paso a la obtención de reglas o expresión de propiedades.

3.ª Ejercicios de comprensión.

4.ª Ejercicios de ampliación.

Este tipo de lecciones son las únicas posibles en el grado preparatorio, en el que quedarían reducidas a juegos seguidos de ejercicios y problemas sobre ellos. En este caso, las únicas fases de la lección serían, primero sugerir la actividad y después ejercitarla.

En el caso de la *lección de repaso*, el hincapié se hace en la tercera fase y se reducen las dos anteriores.

Los tiempos de que consta la *lección de recapitulación* –en el último grado de la enseñanza– son:

1.ª Evocación de conocimientos que se han de relacionar.

2.ª Establecimiento de conexiones entre dichos conocimientos.

3.ª Ejercicios que pongan de manifiesto la utilidad de la sistematización hecha.

Tratemos de analizar este esquema empleando las herramientas que proporciona la TAD para el análisis didáctico, en particular, la teoría de los *momentos didácticos* o *momentos del estudio*. Teniendo en cuenta que los 'momentos didácticos' observados no pueden utilizarse aquí con la definición precisa que poseen en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Tal como hemos comentado anteriormente, su presencia en los documentos analizados se entiende como una aproximación, con las salvedades oportunas. Una primera diferencia la hallamos en el carácter cronológico que tienen las fases de la

lección descritas, a las que el propio Eyaralar denomina también 'momentos', carácter que no comparte con los *momentos didácticos*.

El *momento del primer encuentro* lo provoca el profesor con el planteamiento de un problema que puede ser numérico, gráfico, manual, propuesto a partir de figuras o de ejemplos. Sin embargo, para lograr la *'devolución'*[15] del problema a los alumnos y su compromiso con él, precisa que el problema ha de «ser interesante por sí mismo o por la manera que se presente»[16]. Igualmente sugiere no restringirse al campo de las matemáticas, sino extraer los problemas de la vida cotidiana y de otras disciplinas, procurando que sean «típicos, por huir de lo artificioso»,

> así, por ejemplo, la igualdad de triángulos se funda en la construcción de un triángulo igual a otro, de mayor interés y valor práctico, pero éste a su vez puede presentarse como lo hacía Thales de Mileto: Manera de averiguar la distancia a la orilla de un buque anclado en el puerto.
>
> Las figuras que se observen deben destacarse de objetos que se presenten a los alumnos y relacionarlas con las que vean o recuerden de la naturaleza y del arte; o ser construidas mediante el dibujo y el trabajo manual; o mejor procediendo de la presentación y la construcción[17].

Vemos cómo en el ejemplo primero está latente la preocupación por las *razones de ser* del conocimiento matemático pretendido[18]. De hecho, insiste en la importancia de despertar el interés del alumno y de motivarlo hacia el estudio de una cuestión, pero advirtiendo que ello no basta, si no se procura el interés mediato.

En esta primera fase se observan algunas características del momento del primer encuentro y también del momento de la exploración de tareas y del *momento de la elaboración de una técnica* relativa a ellas.

[15]Ver p. 185. Brousseau, Guy: *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage, Grenoble, 1998.

Brousseau, Guy: *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas, de Guy Brousseau*. Traducido por Dilma Fergona. Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2007.

[16]Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 334.

[17]Ibídem.

[18]Chevallard, Yves: «L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1999, **19(2)**, pp. 221–266.

La segunda fase del esquema descrito, 'paso a la obtención de reglas o expresión de propiedades', contiene elementos de varios de los momentos del estudio: el segundo, la emergencia de una técnica, ya contemplado en la fase anterior, e incluso parece estar presente también el tercero o *constitución del entorno tecnológico-teórico*, pero se basa principalmente en el quinto momento o *momento de la institucionalización*:

> Una labor de comparación, de abstracción, de síntesis, de generalización realizada mediante un diálogo con el mayor número posible de alumnos, conducirá al fin obtenido que debe ser esencialmente único, esto es, que *cada lección comporte*, como regla general, *la adquisición de un solo conocimiento fundamental*[19].

Esta función de institucionalización queda resaltada por la observación de escribir cuidadosamente y memorizar las reglas y las propiedades que se hayan obtenido.

La importancia otorgada a la institucionalización de los conocimientos matemáticos se pone de manifiesto en la existencia de lecciones cuya función principal es precisamente ésta, institucionalizar. Nos referimos a las llamadas 'lecciones de recapitulación', propias del último grado de la enseñanza, cuya función principal es sistematizar los conocimientos previos. Aquí reconoce el papel del profesor para la *tarea didáctica* de gestionar esta sistematización, e incluso propone como *gesto* útil la elaboración de cuadros sinópticos o resúmenes.

Podría pensarse que estas lecciones tengan el peligro de reducir el proceso de estudio a aprender la compilación que hace el profesor de los conocimientos institucionalizados y expuestos de forma organizada y sintética, listos para realizar problemas de mera 'aplicación', tal como es característico de las metodologías clásicas. Sin embargo, en los ejercicios planteados en este tipo de lecciones se indica que han de poner de manifiesto las ventajas de la sistematización realizada. Y se ilustra con algunos ejemplos. Tras el resumen con las principales operaciones aritméticas y las relaciones entre ellas, aconseja plantear cuestiones como: «Cuáles serían en la división los casos correlativos de multiplicar por la unidad seguida de ceros, y por una cifra

[19]Ibídem, p. 335.

significativa seguida de ceros y cómo se resolverían?»[20]. O, tras clasificar los paralelogramos, plantear cómo definir el cuadrado a partir del rombo o a partir del rectángulo.

En la tercera fase, dedicada a realizar *ejercicios de comprensión* «que afiancen lo expuesto y permitan al maestro asegurarse de que ha sido comprendido por todos»[21], se perciben aspectos del cuarto momento, de *trabajo de la técnica*, pero también del sexto o *momento de la evaluación*. Estas dos funciones se ponen de manifiesto cuando resalta que este momento es el que se debe privilegiar en las lecciones llamadas 'de repaso', las cuales pueden consistir en pequeñas competiciones colectivas sobre reglas y propiedades ya estudiadas anteriormente en varias lecciones, e incluso en pequeños exámenes.

Por último, está la fase dedicada a *ejercicios de ampliación*, los cuales deben promover la inventiva del alumno y «orientarle hacia nuevos desenvolvimientos, preparando además la elaboración de los futuros conocimientos»[22]. Esta fase comparte algunos rasgos con el cuarto momento o momento del *trabajo de la técnica*, por lo que supone de reelaboración y extensión del conocimiento construido. Así, la epistemología de Eyaralar le lleva a no presentar los conocimientos matemáticos aislados unos de otros, sino que las nuevas nociones e instrumentos matemáticos vienen a superar las limitaciones de los anteriores, y se enlazan con ellos en un cuerpo coherente.

Vemos que la concepción de lo que ha de ser una clase de matemáticas en la institución de formación de maestros y en la escuela primaria tiene más puntos en común –salvando la distancia institucional– que discrepancias. La 'explicación' de la lección con la '*propuesta simultánea de problemas*' en lo que Eyaralar califica de 'conversación' en la que participan profesor y alumnos, comparte características de las dos primeras fases que establece para la escuela primaria, en ambos casos se trata de que las propiedades o reglas matemáticas surjan de la *comunidad de estudio*[23], formada por los alumnos –niños o normalistas– y el profesor. La fase de ejercicios de aplicación

[20] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 337.

[21] Ibídem, p. 335.

[22] Ibídem, p. 335.

[23] Chevallard, Yves; Bosch, Marianna y Gascón, Josep: *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. I.C.E Universitat Barcelona and Horsori, Barcelona, 1997, pp. 196-206.

también se puede equiparar a los cuatro ejercicios que propone por clase en la Normal y los ejercicios de ampliación, en el caso de sus alumnos, son un objetivo de la clase semanal de problemas, como veremos en un próximo apartado. Las funciones de la lección de recapitulación también se verá que quedan atendidas por la forma de plantear los ejercicios y problemas.

Comparemos ahora las orientaciones dadas por Eyaralar con las que aportan otros profesores. Analizaremos los aspectos estructurales de la lección, aunque al describir estos aspectos, los diferentes autores exponen algunas ideas sobre la enseñanza de la matemática y sobre el uso de algunos recursos. Pero de ello nos ocupamos en otros capítulos.

Luis Paunero, cuyo libro de *Metodología* apareció en 1935[24], dos años después de publicarse el de Eyaralar al que cita en su bibliografía, coincide con éste en bastantes aspectos. El primero es la importancia que concede al logro, por parte del maestro, del *interés* de los alumnos, interés que Eyaralar declara sinónimo de *motivación*. Recomienda la misma duración para las clases de matemáticas y que sean por la mañana. También diferencia los mismos tipos de lecciones, a las que este autor llama *formativas o adquisitivas* (corresponden a las que Eyaralar había llamado de elaboración), *de repaso y de recapitulación*, estas últimas para los grados superiores, lecciones que además de relacionar diferentes temas del programa, también deben entrelazar las diferentes materias que se estudian.

En el ejemplo de preparación de una lección (aclara que no ha de coincidir con una única sesión de clase), se diferencian las fases: *repaso, lección propiamente dicha, generalización y aplicaciones*. A su vez, la parte de la lección propiamente dicha (de adquisición de ideas nuevas) la estructura así:

I.- Intuición sensible.

II.- Intuición mental.

III.- Abstracción.

IV.- Síntesis y fórmula[25].

Es de señalar que la parte de la lección en la que –en el ejemplo– se establece la fórmula general para calcular el volumen de un cubo y se repasan

[24]Paunero Ruiz, Luis: *Ensayo. Las matemáticas en la educación*. Tipografía Heliópolis, Sevilla, 1935.

[25]Ibídem, p. 158.

las cuestiones vistas, la que llama de generalización, puede equipararse a la segunda de Eyaralar, la que consistía en la obtención de reglas o expresión de propiedades.

El libro de metodología escrito por **Aurelio Rodríguez Charentón** está dedicado a los problemas y no se ocupa de la lección como tal. Sin embargo en el prólogo de las *Lecciones de Cálculo* ofrece algunas pautas al maestro, no acerca de la estructura de la lección, sino más bien sobre aspectos que ha de considerar al elaborar las lecciones:

> 1.º Respetando todo el proceso natural del alumno; esto es, dando todo el margen posible a su actividad sensorial y manual, poniendo cosas a su alcance para que manipule con ellas, las combine, las descomponga, las observe y compare con otras, las construya y las represente gráficamente.
>
> 2.º Desarrollando simultáneamente la Aritmética y la Geometría[...]
>
> 3.º Sometiendo el estudio de toda noción nueva, número o figura, a una serie de ejercicios que vayan triturándola detenidamente [...]
>
> 4.º Haciendo intervenir el Dibujo y el Trabajo manual, no como disciplinas autónomas [...].
>
> 5.º No quemando con excesiva rapidez las etapas naturales de la adquisición de ideas [...] Entre la manipulación real de los objetos y su representación más o menos cabalística por medio de cifras (...) recurrimos a numerosas experiencias, cada vez menos materiales, que insensiblemente ayuden al esfuerzo mental del alumno[26].

Sáiz Salvat es otro de los profesores que en la parte de Metodología de la matemática de su libro[27], ofrece un esquema de las partes en las que el maestro puede distribuir el tiempo de una lección, aunque también dice que no ha de tomarse como una propuesta fija, sino como una opción susceptible de que cada profesional realice adaptaciones. A diferencia de Paunero y de Eyaralar, distingue dos esquemas, cada uno de ellos adaptado a un sector o rama de

[26] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?. Cita en p. 8.

[27] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op.cit.

la matemática, aritmética y geometría, aunque tienen elementos comunes. Hacemos una síntesis de ambos esquemas, resaltando las coincidencias:

- Primero se desarrolla la lección partiendo de un problema, o se expone objetivamente el tema geométrico.
- A continuación, el profesor interroga a los alumnos, empezando por cosas del aula o la escuela y siguiendo por cosas de fuera, el hogar o la calle.
- Tras las preguntas los niños han de construir el 'libro del número' o el álbum de la forma, con recortes, etc.
- En el caso de la geometría, ahora vendrían las fases de construcción manual de la figura o cuerpo de que se trate, seguida de su dibujo y del dibujo esquemático –mediante formas geométricas– de objetos de memoria o del natural. Y después la aplicación decorativa de los elementos geométricos estudiados.
- Después de las fases anteriores, propone realizar problemas de aplicación de lo aprendido. Para la aritmética sugiere que algunos los proponga el niño.
- En la lección de geometría aquí irían actividades de medida.
- Luego, se relaciona el conocimiento aritmético o geométrico recién estudiado con otros (en aritmética con otras asignaturas).
- Le sigue el tratamiento de las 'consecuencias morales'.
- En aritmética, cálculo mental (que puede ir al principio)
- Para el último grado incluye unas nociones de historia (aunque en el caso de la geometría irían tras los problemas de aplicación).

Comparando este esquema con los anteriores, observamos que, en general, los profesores de matemáticas de Escuela Normal comparten algunas ideas sobre cómo ha de organizarse una lección: papel de los problemas como punto

de partida y como aplicación, recurso a objetos y a ejemplos de la vida cotidiana del niño, importancia de que cada lección contemple las construcciones en geometría y el cálculo mental en aritmética, etc.

El momento de renovación pedagógica que se vivía, en todos los aspectos de la enseñanza, se aprecia en el interés por relacionar las matemáticas con otras materias, en el recurso a la historia como medio de contextualizar lo aprendido, o en la importancia que se da a las 'consecuencias morales', por ejemplo, animando a los alumnos a detectar los errores matemáticos como ejemplo de búsqueda de la verdad en cualquier aspecto de sus vidas. Sáiz Salvat se refiere a la fecundidad de ideas, que considera propia del momento histórico:

> No obstante, hay autores, no desprovistos de razón, que [...] afirman que las lecciones no deben tratar más que de las cuestiones a ellas inherentes, con lo que se pronuncian en contra de este aspecto moral de la matemática, así como desfavorablemente al sistema decroliniano de los *centros de interés* y también opuestamente a la *directriz asociativa* (o de enlace de la materia explicable con otras asignaturas). No nos extraña esta disparidad de criterios, pues el actual momento pedagógico se caracteriza por el espíritu de revisión y renovación típico de la postguerra[28].

6.2. Otros dispositivos asociados a la lección

En este apartado consideramos otros dispositivos, asociados al de la lección, que contribuirán a determinar las praxeologías didácticas de estos profesores de Escuelas Normales. En los dos primeros casos se trata de dispositivos materiales: los libros y los cuadernos de los alumnos. Otro dispositivo material importante son los materiales didácticos, construidos o no por los alumnos, pero este dispositivo material será estudiado en el capítulo 7, sección 7.2 (pp. 453 y sig.).

[28]Ibídem, p. 180.

6.2.1. Los libros

En las clases de **José María Eyaralar**, los alumnos utilizaban un libro, que podría considerarse 'de texto', según la materia de la que se trate: Aritmética, Geometría, Álgebra. En el caso de las dos primeras, Eyaralar había publicado el *Nuevo Tratado de Aritmética*[29] y el *Nuevo tratado de Geometría*[30], de los que los alumnos disponían cuando él describe cómo eran sus clases en la Normal de Baleares. En el caso del Álgebra, opina que la madurez de los alumnos –que estaban ya en su tercer año de estudios– les permite tomar apuntes y hace menos necesario el texto escrito; en cualquier caso, el libro no se había publicado, aunque su autor declara tenerlo casi ultimado.

Pero lo que interesa es conocer el uso de estos dispositivos y sobre ello este profesor realiza algunas observaciones interesantes, aún más si tenemos en cuenta el momento en el que se hicieron. Ayuda a los alumnos a trabajar conjuntamente con el libro y las notas tomadas en clase, indicando en qué párrafo del libro se encuentra desarrollado cada uno de los contenidos o aspectos tratados en la lección y el número que identifica cada uno de los ejercicios propuestos en la clase, con la finalidad de no dedicar tiempo de ésta a su dictado. El uso del libro se 'recomienda' y, aunque su autor lo reconoce como muy útil, «no sigue servilmente su propio libro, sino que da en él tajos y mandobles, apartando todo lo que no se considera esencial para el alumno»[31]. Se trata por tanto más de un 'libro de consulta' que de un 'libro de texto' tal como se entiende usualmente éste.

El libro debía permitir al alumno el estudio de las matemáticas con autonomía más allá de la clase, además de contribuir al *momento del trabajo de la técnica*, facilitando la realización de ejercicios de consolidación y de práctica, al mismo tiempo que reflejaba el *conocimiento institucionalizado* y constituía un medio para que el alumno revisara lo tratado en las clases. El gesto del profesor de explicitar durante la lección qué fragmentos (párrafos)

[29] Eyaralar Almazán, José María: *Nuevo Tratado de Aritmética*. Reus, Madrid, 1922.

[30] Eyaralar Almazán, José María y Cebrián, Francisco: *Nuevo Tratado de Geometría*. Reus, Madrid, 1924. La parte de *Planimetría* es de Eyaralar y la de *Estereometría* de Cebrián.

[31] Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, op. cit., p. 12.

del libro contienen aquello que ha de ser aprendido indica el papel del libro en la *evaluación*.

La intención, más didáctica que comercial, se pone de manifiesto también cuando especifica que lo que se pregunta a los alumnos cada día se ha explicado previamente en clase, es decir, el libro es un apoyo a las clases, no un elemento indispensable y, en cualquier caso, los alumnos siempre lo tienen a su disposición en la biblioteca.

Podemos comparar el uso que hace del libro Eyaralar en la Normal con el que proponen otros profesores normalistas, como **Sáiz Salvat**, para la enseñanza elemental. Este último, en su libro de metodología de la matemática[32], que aparece citado en la *Metodología* de Eyaralar, da orientaciones a sus alumnos sobre el uso que, como maestros, han de promover de los libros pero a la vez hace observaciones para su utilización por los propios aspirantes a maestros. Fundamentalmente califica el libro como un instrumento de ayuda al estudio autónomo o 'autoeducación' y, en todo caso, como libro de consulta; y en las clases como guía u orientador de la labor de aula, como ya proponía Eyaralar, sin supeditarse al libro hasta el punto de que la educación llegue a ser libresca o rutinaria. Y puesto que supone que el mayor peligro que corre un estudiante enfrentado al estudio, sin que el maestro esté presente, es «la indolencia bajo las formas de apatía, inconstancia y desaplicación»[33], considera que el profesor de primaria o de secundaria ha de recibir indicaciones o directrices para evitar dicho peligro.

La primera es tan importante como trivial: elegir un buen libro de matemáticas; bueno atendiendo no solo al contenido sino también a sus cualidades tipográficas: portada, encuadernación, papel, tamaño de letra y tipo. Otras cuestiones formales tienen un carácter no solo estético; es el caso de las ilustraciones, que deben llevar leyenda inferior o relaciones numéricas, según sean geométricas o aritméticas, respectivamente. También indica que las figuras geométricas deben ir en la página en la que se haga referencia a ellas. En cuanto al contenido, sobre todo en secundaria, debe dejarse algún desarrollo o razonamiento incompleto, para forzar al lector a completarlo. Al final ha de haber ejercicios de aplicación directa y de 'discriminación', en los que

[32]Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit.
[33]Ibídem, p. 227.

haya que ligar el conocimiento nuevo a alguno previo. Las respuestas a las cuestiones han de figurar solo en el libro del maestro. Ante todo rechaza las posiciones extremas sobre el uso o no de libros, tanto si se trata de seguirlos fielmente como de sustituirlos por apuntes.

Sáiz Salvat propone un esquema de trabajo para el estudio de un libro de matemáticas, estructurado en varias fases, la sexta dirigida a sus alumnos de la Normal:

> 1. Lectura mental de la lección, practicando los ejercicios: aritméticos o figuras geométricas que en ella se enuncien con las mismas letras.
> 2. Lectura mental del tema, cambiando las letras o cifras de figuras y relaciones aritméticas o algebraicas.
> 3. Repetición de la lección con el libro cerrado, con sus figuras geométricas y relaciones, ensayando alguna deducción o coordinación previo un instante de silencio.
> 4. Repetición de aquélla en voz alta declamada. Colaboración crítico-expositiva con otros estudiantes.
> 5. Escritura del programa y cuadro sinóptico *a posteriori*.
> 6. Siendo alumno normalista explicación, al alcance de los niños, del mismo tema y construcción del material escolar correspondiente.
> 7. Resolución de un problema de aplicación[34].

Y aún indica subfases para la fase 3: Teoría, práctica y metodología (enumeración de procedimientos demostrativos y de exposición empleados en los problemas).

Este esquema muestra algunas ideas de su autor respecto a cómo se han de estudiar las matemáticas. En primer lugar propone una utilización *activa* del libro, haciendo los ejercicios durante su lectura. La importancia de aprender matemáticas comprendiendo se refleja, sobre todo, en las fases segunda y tercera, cuando invita al alumno a que cambie la nomenclatura y rehaga algunos razonamientos, de manera que los conocimientos nuevos se coordinen con los aprendidos previamente.

[34]Ibídem, p. 230.

Es interesante resaltar la importancia que da al estudio de las matemáticas en grupo, recogido en la cuarta fase: «un alumno propone una cuestión, otro la resuelve, todos la discuten y todos aprenden»[35], y porque considera importante este intercambio de ideas matemáticas para los maestros, los anima a leer también revistas profesionales.

El momento de la institucionalización lo hace presente en la quinta fase, cuando sugiere hacer una síntesis de lo que trata la lección (en la tercera fase ya había algo de sistematización, reflejada sobre todo en las subfases que propone para la repetición, que hacen de ésta una reiteración de los conocimientos, pero clasificados y ordenados de una cierta manera).

Aunque declara que las orientaciones sobre el uso del libro se refieren a los niveles primario y secundario, tiene en mente al mismo tiempo a los alumnos de la Normal y, por ejemplo, indica que el resumen, antes del cuadro sinóptico, ha de hacerse en forma de cuestionario o programa. Esto mismo se pone de manifiesto cuando recomienda a aquellos que se han de dedicar a enseñar, en cualquier nivel, repetir la lección como si de una conferencia se tratase, e incluso insiste en cuidar la declamación. Es de señalar que la adaptación de los contenidos al nivel de primaria no es algo añadido al trabajo sobre la lección y en un momento posterior, sino que forma parte del mismo estudio. Ello, además de preparar a los normalistas para su trabajo como maestros, debía contribuir a una mejor comprensión de las propias matemáticas; prueba de ello es que el esquema no acaba aquí, sino que tras esta fase lo siguiente es resolver un problema de aplicación de lo estudiado.

Otra profesora de Escuela Normal, **Margarita Comas**, no aconseja el uso de ningún libro de matemáticas en los primeros grados, ya que «en los libros resultan sumamente abstractos los conceptos y, por lo tanto, aburridos y difíciles para los niños». Y si aconseja el libro para el último grado de la escuela primaria, es «más por enseñar al alumno la interpretación de un libro, antes de que entre en la vida, que por la conveniencia intrínseca de la cosa», pero no para estudiar la lección en el libro, sino para ver en él algunas cosas ya aprendidas. En el fondo lo que reconoce es la dificultad para el estudio autónomo de las matemáticas por quienes aún se están iniciando

[35] Ibídem.

en ellas; por ello aconseja «leer en clase, de vez en cuando, un asunto nuevo y enseñarles así a estudiar, a interpretar el libro»[36], es decir, el manejo de los libros de matemáticas por parte de los alumnos no lo considera una cuestión 'transparente'[37], en el sentido de no problemática; al contrario, declara que ha de ser algo de lo que el profesor ha de ocuparse de manera explícita, no solo como un medio para la enseñanza, sino como un objetivo en sí mismo que forma parte de la planificación de su enseñanza. Esta idea se ve apoyada por la recomendación de que el alumno maneje varios libros que traten una misma cuestión matemática, para que se habitúe a «tomar únicamente lo esencial de lo leído, hacerle ver la variedad de aspectos en una cuestión y evitar que se aprenda las palabras y o el concepto»[38]. Precisamente para que pueda funcionar como un instrumento al servicio de una actividad matemática auténtica, declara la conveniencia de que el libro escolar de matemáticas contenga láminas y ejercicios por resolver y sea sencillo y conciso, «pero no esquemático, pueril ni en forma de epítome»[39].

6.2.2. Los cuadernos

Eyaralar utiliza con sus alumnos dos clases de cuadernos, uno individual y otro colectivo, llamado 'de clase'.

Los individuales son todos iguales en formato, y apaisados, para poder reflejar mejor lo escrito en el encerado. También se preocupa por el material del que están hechos, ya que considera importante que sean perdurables. Para que los alumnos se centren en la funcionalidad del cuaderno o en su contenido y no en aspectos banales, exige que sean todos iguales «para evitar la pintoresca diversidad a que propenden los alumnos»[40].

[36] Comas Camps, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 5.ª edición, 1932, p. 14.

[37] Sobre la 'transparencia institucional': es preciso aclarar que hemos utilizado este término por similitud, aunque aquí no hablemos de una noción o de un objeto matemático. Rodríguez Fernández, José Luis y Ruiz Higueras, Luisa: «La transparencia de los hechos didácticos en la enseñanza de las matemáticas». *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 1999, **32**, pp. 69–78.

[38] Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., p. 15.

[39] Ibídem, p. 14.

[40] Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, op. cit., p. 143.

El contenido de los cuadernos individuales incluye la (síntesis de) la lección explicada ese día, y expuesta en el encerado y los problemas relativos a ella, resueltos por los alumnos. Pero también:

> diagramas en colores como en las páginas de entretenimiento de algunas agendas y representaciones gráficas de precios y producciones, como en los periódicos de información mercantil. Allí se ven, pegados a las páginas, papelitos de color que por unos dobleces oportunos muestran la equivalencia de áreas o la suma de los ángulos de un triángulo [...] un gorro de mago o una caja cúbica, pequeños trabajos manuales en papel [...] la representación de sólidos geométricos por sus proyecciones horizontal y vertical[41].

Eyaralar atribuye varias *funciones* a este *dispositivo*. Al profesor, le permite detectar las cualidades y el interés del alumno, según el cuidado puesto en su elaboración, incluidos los aspectos estéticos, o si recoge todo o solo parte del trabajo realizado en clase. Es decir, juzgar al alumno o evaluarlo.

En cuanto al alumno, el cuaderno lo habitúa a una exposición clara y ordenada de lo trabajado, satisfaciendo a la vez el 'instinto creador' y la autoemulación. Pero también son una herramienta para repasar lo aprendido.

Para ello, la elaboración de cuadernos por los alumnos va acompañada de ciertos *gestos* del profesor: la revisión de los cuadernos individuales al final de la clase, seleccionando a aquellos alumnos a los que se les ha preguntado la lección el día antes, para comprobar si han recogido en los cuadernos las observaciones que sobre su exposición o intervenciones les iba haciendo el profesor (sirve a la tarea de *evaluar*), y para corregir los eventuales errores que pueda contener cada cuaderno. Esto se hace mediante la corrección individual de cada cuaderno por el profesor y también mediante otra variante de este dispositivo, el *cuaderno colectivo*.

Este último, que Eyaralar denomina 'de clase', equivalía a lo que habitualmente se llamaba 'cuaderno de rotación'[42], un dispositivo frecuente en las escuelas en aquel momento. Se trata de un cuaderno que va pasando por

[41] Ibídem, p. 143.

[42] Al parecer fue Félix Martí Alpera quien, con su obra *Por las escuelas de Europa*, escrita tras un viaje realizado en 1902 para visitar escuelas europeas, introdujo en España el «cahier de roulement», cuyo uso había observado en Francia. Viñao Frago, Antonio:

todos los alumnos de forma sucesiva, bajo la supervisión del profesor, y que recoge de forma muy cuidada el trabajo colectivo de la clase; incluye por tanto, lo que podríamos llamar el *conocimiento institucionalizado*. Eyaralar utilizaba el mismo cuaderno colectivo durante los tres cursos en los que se impartían las tres asignaturas de matemáticas que componían el plan de estudios, con lo que este cuaderno reflejaba de manera bastante fiel el trabajo de una promoción.

Se trataba pues de un instrumento que servía al profesor para evaluar su propio trabajo y reflexionar sobre él, comparando lo realizado con las diferentes promociones, a la vez que permitía el *gesto* de compartir con otros profesionales los conocimientos prácticos y la experiencia adquirida, intención expresada por el propio Eyaralar al iniciar la serie de tres artículos en los que describe sus clases en la Normal. Aquí los cuadernos funcionan como un dispositivo de ayuda a la *formación permanente*, en tanto que se utilizaban para el intercambio de conocimientos didácticos entre profesores.

Este dispositivo era utilizado también por otros renovadores de la enseñanza de la matemática y de otras disciplinas. Por ejemplo, **Felipe Sáiz Salvat**, además de los cuadernos en los que los alumnos recogen los problemas realizados durante el desarrollo de la clase, los propuestos como ejercicios, o los que se les ha mandado inventar, hace llevar un 'diario individual' a cada alumno, que recoge la síntesis de lo esencial que se ha tratado en clase, y un 'diario colectivo' de la clase, escrito por turno riguroso.

Por su parte, **Pedro Chico** en sus clases de geografía en la Normal también utiliza los cuadernos, que considera «indispensables en las clases de todos los grados de la enseñanza»[43]. A diferencia de Eyaralar, este profesor propone y emplea un 'cuaderno de trabajo' y un 'cuaderno en limpio', ambos individuales, además del 'cuaderno o diario de clase'. En el cuaderno de trabajo no se refleja una síntesis de lo estudiado o de aquello que hay que retener, sino todo lo explicado y lo hecho en clase, incluso completado con las notas de los libros de consulta. Este cuaderno es el de uso personal del alumno,

«Los cuadernos escolares como fuente histórica: aspectos metodológicos e historiográficos». *Annali di storia dell'educazione e delle istituzioni scolastiche*, 2007, **13**, pp. 17–36.

[43] Chico Rello, Pedro: «Una clase de Geografía V». *Revista de Escuelas Normales*, 1927, **41**, pp. 18–19. Cita en p. 18.

y aunque el profesor los revisa, no evalúa con él al alumno, sino que su función es la de servir para estudiar, es lo que Chico llama 'cuaderno-herramienta'. Mientras que el cuaderno en limpio, que ya no contiene todo lo realizado, sino una síntesis del contenido y los gráficos, ilustraciones e incluso recortes de revistas en algunos casos, y que el profesor ayuda a elaborar también, tiene la función de permitir evaluar al alumno cada trimestre. Pero además tiene otra función, y en ésta coincide también con Eyaralar, aunque este último no lo explicite tanto: la de inculcar al alumno el sentido y el hábito del trabajo bien hecho, la importancia de una exposición bien ordenada y bien expresada, incluso de una presentación que cuide el aspecto estético, uno de los principios en los que insiste la Escuela Nueva[44]. Por su parte, el cuaderno de la clase, que Chico identifica con el cuaderno de rotación, se hace por turnos, se corrige por el profesor y el alumno lo pone en limpio antes de ser calificado. Este autor coincide de nuevo con Eyaralar en que los cuadernos de toda una promoción son un documento que puede informar en el futuro de todo el trabajo realizado.

En cualquier caso, los cuadernos no se consideran un fin en sí mismos, sino que su función es la de ser un *medio* para el aprendizaje. De los comentarios de estos profesores se puede inferir la *tecnología didáctica* que está en la base de esta *técnica didáctica*. Así, Chico insiste en que el cuaderno en limpio no se realiza por «la finalidad de recoger, sino [...] la pedagógica *del aprender*, al recoger»[45]. Eyaralar declara que los cuadernos «obligan al alumno a repasar lo aprendido y a expresarlo con la mayor precisión posible»[46]. En definitiva, más que un uso instrumental para el profesor, que le permite evaluar y juzgar al alumno, los cuadernos representan un medio de ayuda al estudio y de revisión de lo aprendido para el estudiante[47].

6.2.3. Los ejercicios

En otro capítulo nos centraremos en los problemas y su resolución y compararemos las propuestas de varios autores sobre el tratamiento de los problemas en la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Ahora nos interesa

[44]Figura 2.1, p. 43, Principio 27.
[45]Chico Rello, *Una clase de Geografía*, op. cit., p. 19.
[46]Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, op. cit., p. 143.
[47]Chevallard, *Organiser l'etude...1. Structures...*, op.cit., p. 10.

estudiar los ejercicios como dispositivo didáctico de apoyo a las lecciones en las clases de la Normal, no tanto por el contenido de los ejercicios como por la manera de insertarlos y el papel que desempeñan en el conjunto de la lección.

Basamos también este apartado, sobre todo, en los escritos de José María Eyaralar, que es quien formula propuestas más explícitas sobre el uso de estos dispositivos en las clases en la Normal.

Además de la realización de cuatro ejercicios por clase, dedica una clase a la semana exclusivamente a los problemas. Junto a este dispositivo clásico, la 'clase de problemas', a fin de curso los alumnos han de presentar resueltos otros 60 o 70 problemas propuestos. Mientras los alumnos en clase van haciendo cada problema, uno de ellos, por turno, lo hace en la pizarra con la ayuda de algunos de sus compañeros.

Eyaralar propone en sus clases tres tipos de ejercicios: unos para afirmar los conocimientos adquiridos, otros para ampliarlos y otros que denomina de carácter educativo.

La gradación de los ejercicios de ampliación pone de manifiesto el *trabajo de la técnica*:

> *1.º En un triángulo rectángulo, a = 13 m, b = 5 m. Hallar su área.*
>
> *2.º En un trapecio rectángulo, las bases miden 5 m. y 7,5 m., y el lado oblicuo 6,5 m. Hallar su área.*
>
> *3.º En un trapecio isósceles las bases miden 8 m. y 13 m. y cada lado 6,5 m. Hallar su área*[48].

Aquí cita expresamente algunos *gestos didácticos*, como pedir el dibujo a escala de las figuras que, además de dar sentido a los cálculos necesarios en los problemas anteriores, sirve a la validación del trabajo matemático de los alumnos. Pero además resuelve los problemas geométricos de medida sin restringirse al marco aritmético, utilizando el dibujo, que aquí no es una mera *figura de análisis*[49], lo que convierte los problemas en problemas de construcción, combinando así ambos *marcos*, el aritmético y el geométrico (un mismo saber se moviliza desde conocimientos diferentes). Además, el hecho de indicar expresamente que se dibujen 'a escala' (las medidas no permiten

[48] Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, op. cit, p. 144.

[49] Ver p. 268.

hacerlo a tamaño real), hace intervenir la proporcionalidad, favoreciendo que el trabajo matemático de los alumnos no se reduzca al estudio de cuestiones aisladas.

Eyaralar nos ofrece con este ejemplo una gradación, desde un primer problema en el que los alumnos han de comenzar movilizando conocimientos matemáticos ya adquiridos, para ir extendiéndolos mientras se enfrentan a nuevos problemas diseñados para este fin.

Respecto a las clases de resolución de problemas resalta la aplicación sistemática del 'método de análisis-síntesis', de nuevo acompañada la resolución aritmética de las construcciones gráficas, para él indispensables, y la propuesta de *«problemas tipos»*[50] [sic], poniendo de manifiesto así la dialéctica entre el estudio de un problema concreto y la elaboración de una técnica general[51], aplicable a todo un tipo de problemas, a la que ya nos referimos en el primer apartado de este capítulo, al describir el momento de la *exploración* y de la *elaboración de una técnica relativa a un tipo de tareas* matemáticas.

Aunque en este caso parece que la responsabilidad de resolver el problema-tipo, y con ello construir la técnica, o quizá ejemplificarla si ya se ha construido colectivamente en las dos clases anteriores dedicadas a las *lecciones*, recae principalmente en el profesor.

Este gesto o dialéctica entre los problemas concretos y las técnicas generales precisa de un dispositivo que lo haga posible. En particular propone varias series de problemas que constan de un problema inicial, problema tipo que se resuelve en clase, y a continuación seis problemas de dificultad creciente, cuya resolución se deja a cargo del alumno.

Para centrarse en las cuestiones matemáticas que interesan en cada momento sugiere en todos los casos simplificar los cálculos aritméticos, para lo que pone en práctica dos *gestos*, uno es la elección de las cantidades que intervienen en el problema, de modo que se presten al cálculo mental, y otro es la realización de cálculos y expresión de resultados de los problemas de forma aproximada.

Si bien resalta especialmente la resolución de problemas por el método clásico de 'análisis-síntesis', la preocupación por mostrar la relación entre las

[50] Ibídem, p. 144.

[51] Chevallard, *L'analyse des practiques...*op. cit., pp. 221-266.

diferentes partes de la matemática y su papel en la resolución de un problema, le hace resaltar otro *gesto didáctico*, que forma parte de las rutinas profesionales asociadas al dispositivo que analizamos. Concretamente se trata de la combinación de diferentes *marcos matemáticos*[52] en los que abordar y resolver un problema, para favorecer las funciones *explicativa, validativa* y de *generalización*. Por ello declara explícitamente: «para facilitar su aplicación, nosotros hacemos resolver a los alumnos de Álgebra los mismos problemas que, con artificios, resolvieron en Aritmética»[53], y recoge a continuación, como ejemplo, un problema: *«Un litro de leche pesa 1,03 kilogramos. Se compran 15 l. que pesan 15,390 gr. ¿Cuánta agua había añadido el lechero?»*[54], que antes de resolver algebraicamente, resuelve primero aritméticamente por el método de análisis-síntesis, con el fin de ayudar a la comprensión mostrando qué supone la resolución algebraica, mediante ecuaciones, con la que los alumnos han de familiarizarse, frente a la aritmética (ver p. 291).

Eyaralar ejemplifica este «jeux de cadres» en otros trabajos publicados también en la *Revista de Escuelas Normales*[55] que cita al describir su lección-tipo. En ellos, relata cómo resuelve con sus alumnos un ejercicio en diferentes marcos –aritmético, algebraico, algebraico-funcional–, con el objetivo de trabajar con formulaciones distintas del mismo problema, que hacen intervenir asimismo herramientas y técnicas también diferentes, lo que contribuye a dotar de sentido la resolución del problema y a avanzar hacia la herramienta algebraica como instrumento de generalización.

Plantea un problema típico –se refiere a uno parecido de Rey Pastor– que va haciendo evolucionar (p. 297, del apartado 4.2.2).

Primero propone resolverlo desde la Aritmética y tratar el caso en que la velocidad de ambos móviles es la misma (v = v') y, para completar el estudio, el caso en que la distancia entre ellos sea nula (d = 0).

A continuación resuelve el problema de los móviles geométricamente en

[52]La dialéctica del «jeux de cadres» ha sido estudiada en Douady, Regine: «Jeux de cadres et dialectique outil-objet». *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 1986, **7(2)**, pp. 5–31. Lo hemos comentado en p. 304.

[53]Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, op. cit., p. 144.

[54]Ibídem.

[55]Eyaralar Almazán, José María: «El problema de los móviles en la Escuela Normal». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **27 y 30**, pp. 249–250 y 330–331.

varios casos y, finalmente, mediante una representación funcional, en ejes cartesianos (figura 4.16, p. 301).

Pero además destaca que es «el procedimiento que emplean las líneas ferroviarias para obtener el cuadro de marcha de los trenes»[56]. Esa preocupación por ligar la actividad matemática con asuntos de fuera de la escuela es un rasgo del *modelo pedagógico* que subyace a estas prácticas.

Finalmente, les reconoce a los ejercicios un valor intelectual pero también un valor moral, por su contenido. Se percibe en esto último la '*ecología didáctica*'. La pedagogía dominante en aquel momento, de renovación cultural e intelectual, pero también moral, propugnaba que la escuela debía formar ciudadanos de un país que aspiraba a ser libre y próspero; la educación, y con ello el magisterio, era la clave para este cambio. Algunos ejemplos que plantea son:

> la representación gráfica de la distribución del territorio español para la producción agrícola, que hace visible la vergüenza de tener inculta media España; la representación gráfica de la relación entre la extensión de España y la de las tierras colonizadas por nuestro esfuerzo, que explica intuitivamente nuestra grandeza pasada y una de las causas de la decadencia actual. Otro asunto educativo es comparar el valor adquisitivo del jornal de un obrero francés en 1789 y en 1914 para mostrar el prodigioso aumento en el bienestar de la mayor parte de los hombres que ha traído el calumniado siglo XIX[57].

6.2.4. Los exámenes

Los exámenes son uno de los dispositivos que sirven, junto con otros, como los cuadernos, a la función de *evaluar* al alumno. Describiremos, en primer lugar, este *dispositivo* y los *gestos asociados*, en el caso de Eyaralar. Éste realiza tres exámenes en cada asignatura[58], uno por trimestre. El primero trata sobre la Aritmética, el segundo sobre la Geometría y el tercero sobre

[56] Ibídem, p. 250.

[57] Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, op. cit., p. 145.

[58] Los tres artículos sobre la lección se escribieron antes de la República, cuando estaba en vigor el Plan de 1914. En dicho Plan había tres asignaturas de matemáticas: Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría; Aritmética y Geometría; Álgebra.

toda la materia, ya que el tercer trimestre se dedica al repaso. La estructura de los tres exámenes es la misma: resolución detallada y razonada de un problema, para lo que se dispone de una hora. También existen exámenes oficiales, pero solo para aquella minoría de alumnos cuyo aprovechamiento o conocimiento de la asignatura no esté suficientemente demostrado.

En cuanto a la *función* atribuida a los exámenes, sobrepasa la habitual de juzgar, ya que para Eyaralar son más bien una manera de estimular al alumno, que hace explícito el fruto de su trabajo y permite que sea apreciado por sus profesores y el personal de la Normal. Además, el hacer los dos primeros justo después de cada periodo vacacional, obliga, según dice, a no desentenderse de la asignatura todo ese tiempo y a aprovechar parte de las vacaciones para el trabajo matemático.

Respecto a los exámenes, hay un hecho importante que destaca Eyaralar, que hace posible, como él mismo declara, que el alumno observe y valore todo el trabajo realizado en su conjunto: «que los alumnos se den cuenta, especialmente los de tercer curso, de la gradación posible en Matemáticas»[59]. En primer lugar, los problemas de los tres exámenes de un trimestre tratan sobre asuntos análogos. Él mismo pone un ejemplo:

> Primer curso: Dibujar un exágono regular de 4 cm. de lado y obtener el número de sus diagonales, el valor de sus ángulos y su área.
>
> Segundo curso: Dibujar en escala de 1:10.000 la planta de una torre exagonal regular, cuyos lados miden 4 m., siendo el espesor de sus muros de 1 m. Calcular el área de la planta de los muros.
>
> Tercer curso: Calcular el área de la planta de los muros de una torre exagonal de 4 m. de lado y 1 m. de espesor[60].

Previamente ofrece a los alumnos indicaciones sobre el valor relativo de los procedimientos que pueden seguir, el grado de aproximación, etc. Y tras el examen se hace una crítica de las soluciones aportadas. Cada examen, y el conjunto de los realizados durante el curso, posibilita una doble evaluación ya que es un dispositivo que sirve para que el profesor evalúe al alumno, así como un *medio* para el alumno de evaluar su nivel de competencia en la resolución de estos problemas.

[59] Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, op. cit., p. 182.
[60] Ibídem, pp. 182-183.

Así el *momento de la evaluación*, que se desarrolla de una manera más explícita tres veces durante el curso (también sirve a la función de evaluar, preguntar la lección o revisar los cuadernos), de alguna manera cumple igualmente parte de las funciones de otros momentos, como el del *trabajo de la técnica*, e incluso el de *institucionalización*, en este caso porque el conjunto de los tres problemas (exámenes) actúa como contraste de las capacidades adquiridas, que permite a la vez la *revisión* y contribuye de algún modo a la sistematización de lo estudiado. Para ello, el dispositivo 'Exámenes' adopta la forma de un dispositivo 'Ejercicios y problemas', no solo por el formato de los exámenes, sino sobre todo por el contenido y la forma de realizarlos. De nuevo vemos reflejada la *tecnología didáctica* subyacente, que supone, de alguna manera, huir de la *atomización* de la *matemática enseñada*[61], ligando los contenidos de la enseñanza mediante un trabajo sistemático a largo plazo.

6.2.5. Los trabajos colectivos

Los trabajos colectivos que Eyaralar propone a sus alumnos consisten fundamentalmente en la construcción de material para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y también en la Normal[62]. El término 'material' no se refiere aquí necesariamente a material de tipo manipulativo[63], sino que se utiliza con más amplitud. Como ejemplo, la construcción de una tabla de números primos, o unas tablas de anualidades de capitalización. Estos trabajos se hacen de manera colectiva, a veces por grupos de alumnos y otras por toda la clase.

Las *funciones* de este dispositivo son dos. Por una parte, la práctica de conocimientos o de técnicas ya adquiridos o en proceso de adquisición, que contribuye también a aumentar la maestría que poseen los alumnos sobre las

[61] Bolea Catalán, Pilar: *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2002.

Assude, Teresa; Coppé, Sylvie y Pressiat, André: «Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège: atomisation et réduction». En: Lalina Coulange; Jean-Philippe Drouhard; Jean-Luc Dorier y Aline Robert (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*, pp. 41–62. La Pensée Sauvage, Grenoble, 2012.

[62] Eyaralar Almazán, *Una clase de Matemáticas*, pp. 181-183.

[63] La utilización de materiales en la enseñanza de las matemáticas se trata en el capítulo 7, sección 7.2, p. 453 y sig.

técnicas; aquí se pone de manifiesto el *momento del trabajo de la técnica*. Otra de las funciones es la de facilitar el trabajo sobre resolución de problemas, en una época en la que no se disponía del material ni en general de los recursos materiales actuales para realizar ciertos cálculos que podían resultar tediosos o interrumpir el proceso de resolución de un problema.

Es decir, el dispositivo incide en varios momentos del estudio; uno de ellos el del *trabajo de la técnica*, ya que funcionaba como ejercicio de rutinización de técnicas ya aprendidas; por otro lado, ese material debía favorecer, respecto a otros problemas en los que se empleara, el *momento exploratorio* ya que, por ejemplo, disponer de una tabla de números primos podía evitar el tener que comprobar para cada número si era primo o compuesto al buscar regularidades o comprobar conjeturas durante la resolución de un problema, lo que evitaba interrupciones para trabajos rutinarios y permitía investigar estrategias y formular conjeturas con más agilidad; en definitiva facilitaba el trabajo experimental en matemáticas. Al disponer la clase de estos materiales se podía evitar interrumpir la realización de una tarea matemática más compleja, para tener que dedicarse a poner en práctica en ese momento otra técnica matemática ya conocida, por ejemplo, para averiguar si un número determinado es o no primo.

Así pues, no se trataba solo de la funcionalidad de la elaboración de material en sí, sino que el gesto didáctico de hacer que los estudiantes elaboren este tipo de material tenía un carácter también utilitario, en el sentido de simplificar el trabajo matemático posterior de la clase. Así, se realizan materiales de los que no se dispone previamente en el aula o que no están comercializados, como en los ejemplos citados. Los materiales construidos se convierten en un 'média'[64] para el estudio posterior de ciertos problemas, en

[64]Ante una cuestión, el alumno puede hallar información –aunque sea provisional– en los *«média»* (en francés, medios de comunicación), incluyendo entre los *média* los libros de texto, los tratados especializados, los apuntes o los cuadernos de clase, las lecciones del profesor, los periódicos o revistas y, en general, cualquier fuente de información (en la actualidad también los medios de comunicación audiovisual o internet), etc. Ahí se hallan respuestas preestablecidas a partir de las que elaborar una respuesta provisional a la cuestión planteada; pero para validar las respuestas elaboradas, con ayuda de esos media, a las cuestiones concretas formuladas se necesita un *«medio»* (noción perteneciente a la *Teoría de las situaciones didácticas*, *«milieu»*), desprovisto de intención didáctica,

un contexto de aprendizaje funcional, donde el *trabajo de la técnica* es un trabajo motivado; en este caso, uno o varios problemas que requieran dicho material pueden convertirse en la *tarea motivadora* para su elaboración y de paso para adquirir seguridad en la ejecución de técnicas ya conocidas.

Otro gesto que revela esta intención es el hecho de que el material elaborado por una promoción servía para ser utilizado por la siguiente. Y de hecho, una promoción podía elaborar un material que 'completara' o ampliara el ya existente en esa cátedra de la Escuela Normal. Como ejemplo, los alumnos del curso 1926-27 estaban ampliando la tabla de números primos elaborada por alumnos de otra promoción anterior, desde el 2000 hasta el 8000. Así, los trabajos colectivos no tenían una función evaluadora, y el hecho de plantearse colectivamente tampoco era una decisión didáctica arbitraria del profesor, sino que estaban motivados por las 'necesidades matemáticas' de la clase.

Ello a veces podía incidir en las *praxeologías matemáticas* estudiadas; por ejemplo, el disponer de tablas de anualidades de capitalización evita cálculos con logaritmos. Hallamos aquí una muestra de la *codeterminación* entre las praxeologías matemáticas y las didácticas; en este caso un gesto didáctico y el dispositivo asociado influyen sobre los contenidos matemáticos que se manejan y sobre la secuencia de estudio de los diferentes saberes.

---

que el enseñante debe construir, de modo que el alumno pueda actuar sobre él y que le ha de permitir *contrastar* la validez de las respuestas que se van elaborando (por ejemplo, tradicionalmente el principal medio para validar en matemáticas ha sido la demostración matemática).

Brousseau, Guy: «Le contrat didactique: le milieu». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1990, **9(3)**, pp. 309–336.

Chevallard, Yves: «Steps towards a new epistemology in mathematics education». En: *IV Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 4. Sant Feliu de Guíxols, 2005.

6.3. Una praxeología de formación: Las prácticas de la asignatura *Metodología de las Matemáticas*

Los alumnos del grado profesional realizaban prácticas en escuelas, dirigidas por el profesor de Organización escolar y la Inspección escolar, pero también prácticas docentes con niños de primaria, como aplicación y complemento esencial de las clases de *Metodología* de las diferentes asignaturas, en particular de *Metodología de las Matemáticas*, dirigidas por el profesor de la Normal de la *Metodología* respectiva. Estas últimas prácticas, además de contribuir a la adquisición de competencias profesionales, tenían una componente más 'didáctica', en el sentido de que el interés se podía centrar en cómo se estudia un contenido –matemático– en la escuela primaria.

Algunos profesores de *Metodología de las Matemáticas* escribieron artículos en la *Revista de Escuelas Normales*, exponiendo sus propuestas o relatando la experiencia en sus asignaturas. Es el caso de Luis Paunero[65] o Felipe Sáiz[66], quienes se refieren a las prácticas cuando comentan aspectos de la asignatura y, sobre todo, de Eyaralar, que dedica un artículo específico a la cuestión de las prácticas, titulado «Las Prácticas de Enseñanza»[67].

En este artículo Eyaralar propone una forma de organizar las prácticas de Metodología de las Matemáticas, una propuesta estructurada, que analizamos a continuación, a la vez que efectuamos algunas comparaciones puntuales con las propuestas de otros profesores, sobre todo Paunero; no analizaremos con detalle estas otras propuestas por no estar suficientemente estructuradas.

La consideración que a Eyaralar merecen estas prácticas, parte integrante de una asignatura del plan de formación de futuros maestros y realizadas con alumnos de primaria, queda patente desde el principio: «Su importancia no necesita encarecimiento, ya que nuestra labor converge en la preparación de maestros que sepan *enseñar* (mejor, *elaborar* con los alumnos) nuestra

[65] Paunero Ruiz, Luis: «Lo que puede ser un curso de Metodología». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **86**, pp. 64–66.

[66] Sáiz Salvat, Felipe: «De la organización didáctica». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **94**, pp. 4–6.

[67] Eyaralar Almazán, José María: «Las Prácticas de Enseñanza». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **96**, pp. 74–76.

disciplina»[68]. La labor del alumno-maestro en estas prácticas, así como su análisis en la asignatura *Metodología de las Matemáticas* y su evaluación por parte del profesor de la Normal encargado aparecen así inevitablemente ligadas a algún conocimiento matemático concreto; el saber matemático puesto en juego es un elemento fundamental del cuestionamiento que el profesor y los alumnos hagan en relación con la práctica. Paunero es consciente de ello cuando afirma que las cuestiones metodológicas no pueden abandonarse «para que las concrete [el alumno] más tarde en el curso de prácticas, a su libre albedrío o bajo la dirección de otro maestro que no puede, naturalmente, ser especialista de todas la materias»[69].

La posición de estos profesores respecto a las prácticas de metodología[70] podría calificarse de *sistémica*, en tanto que relativa al enseñante, sus alumnos y los objetos del saber[71].

La *cuestión general* que se plantea en relación con la formación del maestro para que sea capaz de responsabilizarse de la enseñanza –aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria– se puede formular así:

Q_0: **¿Cómo diseñar las asignaturas de Metodología de manera que la teoría y la práctica estén verdaderamente integradas?**

La legislación educativa ya aporta elementos de respuesta a esta cuestión, imponiendo algunas condiciones o 'restricciones':

> Art. 23. Como aplicación y complemento esencial de las clases de Metodología, los alumnos harán prácticas docentes en las escuelas anejas a las Normales y en las demás [...]
>
> Art. 24. Estas prácticas serán dirigidas por los profesores de la Normal en sus respectivas materias, quienes tomarán una participación activa en el trabajo escolar[72].

[68] Eyaralar Almazán, *Las Prácticas...*, op. cit., p. 74.

[69] Paunero Ruiz, *Lo que puede ser...*, op. cit., p. 65.

[70] Con «Metodología» nos referimos concretamente a «Metodología de las Matemáticas», aunque algunas observaciones, las de tipo más general, puedan aplicarse –así lo hace Paunero– a cualquier metodología específica.

[71] Dolz, Joaquim y Leutenegger, Francia: «L'analyse des practiques: une démarche fondamentale dans la formation des enseignants». *Revue FPEQ*, 2015, **18**, pp. 7–16.

[72] «Reglamento de Escuelas Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **102 (suplemento)**, pp. 1–19. Cita en p. 4.

Así pues, la asignatura ha de incorporar prácticas de los alumnos con niños de primaria, y es el profesor de la asignatura el responsable de dichas prácticas; será el encargado de las praxeologías a las que pertenezcan, en este caso *praxeologías de formación*[73].

Varios profesores, en sus trabajos, intentan responder a esta cuestión, que se puede concretar a su vez en otras:

Q_1: **¿Cómo organizar las prácticas de la asignatura de Metodología de las Matemáticas para articularlas con la teoría?**

Q_2: **¿Qué dispositivos de formación pueden integrar el análisis de las prácticas en la formación de los alumnos normalistas?**

El profesor de Metodología de las Matemáticas tiene ante sí varias *tareas* didácticas, que se pueden formular así:

T_1: *Distribuir en el calendario de la asignatura las actuaciones con niños de primaria.*

T_2: *Determinar el tiempo y momento dedicado a las prácticas escolares y a las clases teóricas.*

T_3: *Articular teoría didáctica y práctica didáctica (planificación, reflexión) en las sesiones de la asignatura.*

Vamos a comentar la propuesta de Eyaralar porque, al menos en el caso de las matemáticas, configura la respuesta que creemos más completa y elaborada a las cuestiones formuladas. La respuesta consiste en un *dispositivo de formación*, estructurado en varias partes. Este dispositivo, con los *gestos* del estudio que lleva asociados, constituye una *técnica didáctica*[74], que describimos a continuación. La *función* que tenga asignada ese dispositivo en la

[73] Ruiz Higueras, Luisa y García García, Francisco Javier: «Didáctica de las matemáticas y Formación de Maestros: Respuestas y desafíos (desde la TAD)». En: A. Bronner; M. Larguier; M. Artaud; Y. Chevallard; G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. IIe congrès international sur la TAD*, pp. 171–213. IUFM de l'Academie de Montpellier, 2010.

[74] Los dispositivos didácticos y sus gestos asociados como componentes de las técnicas didácticas, así como su función respecto a las tareas didácticas a las que se asocian, se han comentado en la introducción de este capítulo, en la p. 362.

institución de formación de maestros va a delimitar lo que será la responsabilidad del alumno en el proceso de estudio[75].

El dispositivo de prácticas que sugiere la propuesta de Eyaralar se estructura en varias fases; en cada una de ellas se ponen en funcionamiento a su vez dispositivos, de tal manera que el conjunto de ellos, puede considerarse así un dispositivo más general, que es el que constituye la respuesta a las cuestiones planteadas.

La **primera fase** consiste en:

1. a) Explicación, por el alumno normalista de una lección a 6 u 8 niños de primaria, en la propia Escuela Normal.

   b) Discusión sistemática, colectiva, de la clase práctica ('lección') en la clase de Metodología, con el profesor.

Esta primera fase combina trabajo individual con trabajo-discusión en grupo; se favorece con ello una *dialéctica individuo-grupo*.

Analicemos los **gestos** –del profesor normalista y de los alumnos– asociados a este primer dispositivo parcial o a esta fase.

- Las clases son presenciadas por el profesor y por los compañeros y la discusión es común.
- Cada uno de los alumnos ha de actuar ante un grupo de escolares y someter después su actuación a la discusión y análisis colectivos, antes de pasar a la siguiente fase y presenciar lecciones-tipo.
- Para orientar la discusión el profesor proporciona unas instrucciones (un esquema) inspirado, aunque no idéntico, en los de Detaille y Kirpatrick (figura 6.1, p. 395)[76].

[75] Chevallard, *Organiser l'etude...1. Structures....*

[76] No tenemos referencias del esquema o las orientaciones que les proporcionaba Eyaralar a sus alumnos para realizar el análisis de una lección impartida a escolares, solo indica que se trataba de una modificación de los proporcionados por estos dos autores. Probablemente esté basado en las normas que él mismo establece en su *Metodología de la Matemática* para

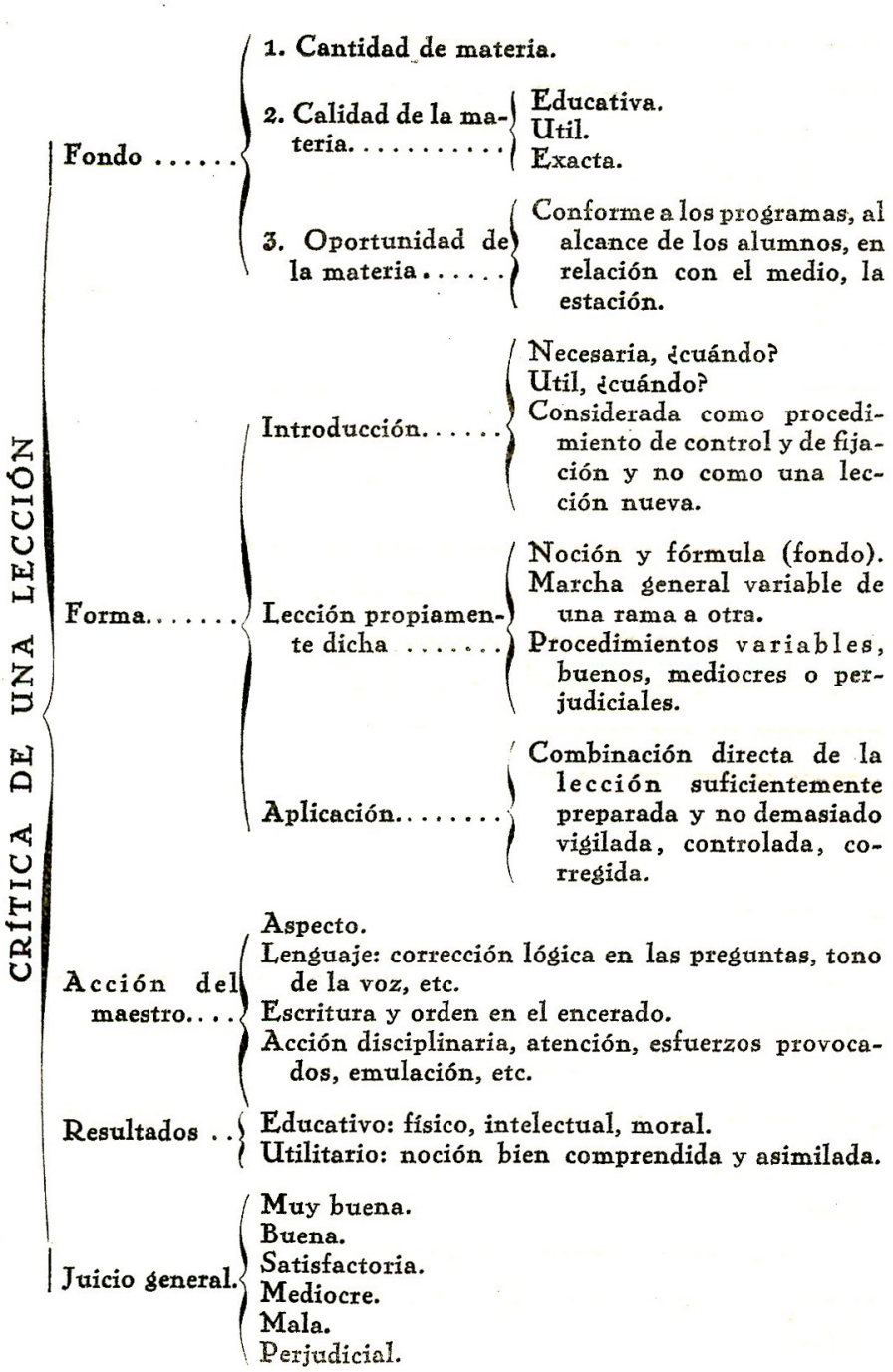


Figura 6.1: Detaille. «Crítica de una lección»

La guía de análisis dada por el profesor formador de maestros sirve a la vez de 'medio' para la *validación* y la discusión.

Varios gestos delimitan la responsabilidad del alumno:

- Preparar previamente los materiales necesarios y, por escrito, la planificación ('marcha') de la lección que ha de entregar al profesor antes de su actuación.
- Llevar un 'cuaderno de clase'.
- Recoger cuadernos y materiales de los niños, para comentar en la fase 1.b) (p. 394). Estos cuadernos «sirven sucesivamente para los diversos grupos que actúan en la clase»[77].

Estos gestos son parte del *'medio'* para analizar la clase, son instrumentos de 'contraste' que pueden servir para evaluar la actuación del alumno-maestro, favoreciendo así el *discurso tecnológico-teórico* sobre la práctica docente (que a su vez incluirá también un discurso tecnológico sobre la praxeología matemática involucrada en la lección elegida; el conocimiento puesto en juego no es estrictamente matemático, sino didáctico-matemático). En ellos no solo están los errores, sino las tareas matemáticas propuestas por el alumno normalista a los niños. A la vez pueden desempeñar la función de 'média'[78] cuando el profesor normalista evalúe a cada uno de sus alumnos.

La **segunda fase** del dispositivo más general también comprende dos facetas:

2. a) Observar lecciones-tipo:
   - 2.1. Observar una Lección-tipo hecha por el profesor de Metodología
   - 2.2. Observar una Lección-tipo hecha por el maestro del aula

preparar una lección, según el tipo de lección, y que hemos descrito en el apartado 6.1.2 (pp. 366 y sig.). Recogemos, en todo caso, el guión para la «Crítica de una lección» de Detaille. En Detaille, L.: *La Metodología en acción*. Juan Ortiz, Madrid, 1933. Traducción de A. R. Charentón, p. 66.

[77] Eyaralar Almazán, *Las Prácticas...*, op. cit., p. 75.

[78] Ver comentarios en p. 389.

b) Discusión sistemática de la práctica en la clase de Metodología, con el profesor «a la luz de los principios metodológicos estudiados».

Las lecciones-modelo actúan aquí como un *dispositivo auxiliar*, componiendo una técnica auxiliar que favorece el trabajo *tecnológico-teórico* y el de *institucionalización*. La responsabilidad del profesor normalista será lograr que en esta discusión surjan elementos justificativos de las praxeologías matemáticas y didácticas.

Una vez superada la segunda, la **tercera fase** del dispositivo de formación que analizamos comprende dos partes, igual que las anteriores:

3. a) Explicación por el alumno normalista de la lección correspondiente del programa escolar en la enseñanza primaria (a un grupo reducido de alumnos que se han trasladado a la Normal).

b) Discusión sistemática de la práctica en la clase de Metodología, con el profesor y los compañeros.

Al mismo tiempo que las lecciones del programa, se desarrolla la **cuarta fase**:

4. Lecciones especiales sobre métodos especiales.

Estas lecciones se refieren a los métodos asociados a la Escuela Nueva, como los de Decroly, Winnetka, Nelson..., algunos de los cuales describe y comenta en su obra de metodología.

La **distribución temporal** de estas actuaciones es la siguiente: Las clases prácticas comienzan a mediados de febrero, cuando en las clases teóricas se han estudiado los principios generales, los métodos y procedimientos, las características de la lección y los problemas propios de la enseñanza de la matemáticas. Entonces se dedican dos de las tres clases semanales de Metodología a las prácticas escolares –cada día actúan dos alumnos– y en la clase restante estudian «las cuestiones especiales que se presentan en la enseñanza de la matemática»[79]. Lo siguiente es presenciar las lecciones-tipo. Las lecciones que imparten los alumnos sobre el programa de la escuela graduada

[79] Eyaralar Almazán, *Las Prácticas...*, op. cit., p. 75.

que corresponda en cada sesión y las lecciones especiales ocupan el periodo posterior a las vacaciones de primavera.

Entre los **elementos de carácter tecnológico** que explican y justifican este dispositivo, tenemos:

- Que el alumno normalista no actúe ante una clase completa, sino ante un grupo de alumnos muy reducido, y esto ni siquiera en el aula de primaria, sino en el aula en la que se imparten las clases de Metodología en la Normal, esto es, «en el ambiente de la clase en que está habituado a actuar; manejando el material que ha estudiado a fondo», facilita, según Eyaralar, «dirigirlos [a los niños], dominarlos y aun conocerlos al poco tiempo y pueda suministrarle el material necesario, imposible de improvisar para 40 ó 50 alumnos»[80].

  La decisión de mejorar –al menos no empeorar– las condiciones de la práctica habitual (la de un maestro experto) explica el *gesto* de que las prácticas de la asignatura se hagan explicando la lección a 6 u 8 niños solamente. Por supuesto, justifica su decisión: «Claro es que esto no es la verdadera práctica, como las maniobras militares no son la guerra, pero constituyen la preparación indispensable y adecuada para ella».

  Otra de las razones es no perjudicar a los niños ni al maestro, alterando la marcha habitual de la clase, adaptando el horario de ésta al de la asignatura en la Normal e introduciendo métodos distintos a los habituales, lo que puede inducir comparaciones entre unos y otros por parte de los niños, algo que desea evitar. Sobre esto opina Paunero que el niño no ha de ser 'materia de ensayo'[81].

- La práctica ha de ser una oportunidad de aplicar los principios teóricos estudiados y éstos, a su vez, se reinterpretan desde la experiencia. Para ello, las prácticas no pueden estar colocadas cuando hayan finalizado todas las clases teóricas, sino que éstas se siguen impartiendo de manera simultánea durante el periodo en que los alumnos hacen prácticas con niños de primaria. Los dos días en los que los alumnos actúan con

[80] Ibídem, p. 74.

[81] Paunero Ruiz, *Lo que puede ser...*, op. cit., p. 65.

niños de primaria Eyaralar pide para cada actuación una planificación previa y, tras su puesta en práctica, se prevé la discusión colectiva; pero para guiar esta discusión el profesor proporciona unas pautas de análisis, basadas en lo estudiado en la asignatura. Y un tercer día a la semana hay una clase de Metodología de la Matemática para tratar «las cuestiones especiales que se presentan»[82].

Igualmente, para Paunero las clases prácticas «completarán y precisarán los conceptos fijados en lecciones teóricas y que habrán indudablemente de venir simultaneados con ellas»[83].

- La distribución temporal de las prácticas, concretamente el que los alumnos normalistas no vayan a la escuela a observar a un maestro en ejercicio antes de recibir formación teórica, tiene que ver con el *logos* de este profesor, que entiende que solo se puede juzgar con criterio si se tienen criterios para juzgar, y el objetivo de las prácticas no es aprender por simple imitación:

> Ello hubiera constituido un estímulo a la imitación, sin valoración adecuada y probablemente nociva, desprovisto como está el alumno de los principios indispensables para juzgar lo que ve hacer. Sugestión por sugestión, preferimos el amplio cuadro de la enseñanza mundial tal como lo presenta nuestra clase teórica, al estrecho marco de una escuelita provinciana[84].

Paunero advierte igualmente sobre el riesgo de imitar acríticamente la práctica del experto, a propósito de una supuesta práctica basada en la observación de lecciones-tipo, que pueden tener precisamente ese efecto contraproducente.

- Una de las razones que justifican la estructura del dispositivo ideado, en particular alguno de los *gestos* asociados, es la consideración de las prácticas integradas en la asignatura como indicador, para el profesor, de la formación adquirida en las clases teóricas previas: «Hemos creído

[82] Eyaralar Almazán, *Las Prácticas...*, op. cit., p. 75.
[83] Paunero Ruiz, *Lo que puede ser...*, op. cit., p. 65.
[84] Eyaralar Almazán, *Las Prácticas...*, op. cit., p. 74.

preferible que nuestros alumnos actuasen en una primera parte de las prácticas sin haber visto *lecciones-tipo*, con el propósito de aquilatar el resultado obtenido con nuestra clase teórica de Metodología»[85]. El mismo Eyaralar deja claro que entre las funciones que asigna a estas prácticas está la de hacer aflorar el *modelo epistemológico de referencia de las matemáticas* y el *modelo pedagógico de referencia* de sus alumnos:

> La formación que hemos procurado que alcancen los alumnos del Profesional, su concepto de nuestra ciencia y de la manera de enseñarla, el valor de nuestras orientaciones y consejos y aun la utilidad de las simples recetas que les hayamos dado..., todo se pone aprueba en las prácticas, son el mejor indicador del acierto o el error en el camino que hayamos emprendido[86].

Finalmente destacamos algunos elementos de la **teoría didáctica** que sustenta las justificaciones tecnológicas.

En primer lugar, uno de los objetivos de la reforma de los estudios en las Escuelas Normales es el contacto constante de las Normales con la Escuela Primaria. Por ejemplo, Paunero afirma que «todas las enseñanzas que han de darse en la Escuela Normal han de ir dirigidas a llevar al alumno de la Normal al conocimiento del niño en la Escuela»[87].

Otro de los principios teóricos sobre los que se asientan las propuestas de los profesores de Matemáticas normalistas más reformadores, Eyaralar entre ellos, es el carácter científico que han de tener las metodologías especiales, así como la convicción de que dicho carácter ha de imprimirlo la propia asignatura de *Metodología de las Matemáticas*[88].

La práctica de impartir clases de matemáticas a niños de primaria es una condición necesaria, pero no suficiente para conferir carácter científico. Es lo que lleva a Sáiz Salvat a afirmar que «las visitas a las escuelas para presenciar explicaciones no puede ser lo esencial en la metodología. Puesto

[85] Ibídem, p. 75.

[86] Ibídem, p. 74.

[87] Paunero Ruiz, *Lo que puede ser...*, op. cit., p. 65.

[88] Hemos recogido estas opiniones de Eyaralar en el apartado 5.3, especialmente en la p. 342.

que esta orientación es de orden práctico que se apoya en lo científico»[89]. Y critica sin ambigüedades cualquier forma de lo que denomina 'practicismo' (práctica sin teoría), alegando que haría descender el nivel científico de las Escuelas Normales.

Podemos considerar también parte del logos de estos profesores la conciencia de la especificidad de la asignatura, es decir, la necesidad de centrarse en los aspectos propios del estudio de las Matemáticas. El *gesto* de impartir las lecciones a un número reducido de niños de primaria precisamente facilita al alumno normalista la gestión del aula, por ejemplo, «mantener un orden que los niños tratan de alterar en cuanto se ven libres de la habitual tutela»[90], permitiéndole de este modo que se centre más en las que están íntimamente ligadas con el contenido matemático objeto de la lección.

Estas consideraciones sobre la asignatura –carácter científico y relación con la Matemática– son argumentos a favor de realizar prácticas escolares en el seno de la *Metodología de las Matemáticas* y dirigidas por el propio profesor de dicha asignatura. Podemos decir por lo tanto que entre los principios teóricos estaba mantenerse alejados de lo que algunos expertos denominan actualmente el *'generalismo pedagógico'*[91].

6.3.1. Los resultados de la propuesta

Tras describir la manera en la que organiza las prácticas, Eyaralar hace observaciones acerca de los resultados. Comentamos algunas, que ponen de manifiesto limitaciones de la técnica, o ciertas *restricciones*.

A veces las limitaciones proceden del *modelo pedagógico de referencia* imperante, por ejemplo, que la enseñanza ha de ser activa y agradable, lo que, enfatizado en exceso, puede derivar en el «perjuicio de la parte propiamente instructiva, que queda un tanto soterrada, cuando creemos es esencial que

[89] Sáiz Salvat, *De la organización didáctica*, op. cit., p. 6.

[90] Eyaralar Almazán, *Las Prácticas...*, op. cit., p. 74.

[91] Gascón Pérez, Josep y Bosch Casabó, Marianna: «La miseria del 'generalismo pedagógico' ante el problema de la formación del profesorado». En: Josep Gascón y Marianna Bosch (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 201–240. Diputación Provincial de Jaén, Jaén, 2007.

los conocimientos matemáticos sean plenamente y claramente conscientes»[92]. Esta misma limitación pudo motivar que la mayoría de los alumnos eligiese para su lección primera el primer grado de primaria, quizá por la posibilidad de utilizar más el juego y materiales más vistosos.

El hecho de ser evaluados puede ser una causa de algunos de los comportamientos de los alumnos, como ceñir el contenido de la lección a cuestiones matemáticas que revistan poca dificultad, incluso que los niños hayan estudiado previamente, para prevenir su fracaso. En las lecciones-tipo el profesor explicó temas no incluidos en el programa escolar, para evitar esto. La necesidad de que los alumnos normalistas sean evaluados puede ser origen de otra restricción, que afecta a la discusión colectiva de las lecciones, ya que el compañerismo o la timidez impiden las verdaderas críticas. En este caso la actuación del profesor es fundamental para hacer surgir cuestiones relevantes.

Hay, como casi siempre, restricciones *institucionales*, relativas al tiempo disponible para los 40 alumnos de primer curso de la Normal; por una parte, Eyaralar sugiere que la duración de las clases de prácticas sea de una hora y media, para que puedan actuar dos alumnos, uno que se encargue de una lección de primer grado (20 minutos) y otro de una de tercer grado (30 minutos); por otra parte, el tiempo que queda para las clases teóricas es insuficiente. Eyaralar propone la organización conjunta con los otros dos profesores de Metodología del primer curso del grado profesional, teniendo en cuenta que solo los alumnos que intervienen tienen una gran implicación[93].

Por último, aunque los normalistas distinguían las lecciones sobre temas nuevos de las de repaso, Eyaralar se lamenta de que la actuación de sus alumnos en las prácticas de enseñanza en primaria era 'tradicional', tanto en el contenido matemático como en su tratamiento. Tampoco se planteaban la lección como una elaboración del niño, al que se le venía a dar en forma acabada; incluso faltaban ejercicios y problemas. Constata la insuficiencia de la formación teórica en didáctica de la matemática (contravenían las indicaciones hechas desde la asignatura) y la necesidad de revisar su propia

[92] Eyaralar Almazán, *Las Prácticas...*, op. cit., p. 76.

[93] Eyaralar no aclara si la organización conjunta consistiría en que se hiciesen prácticas simultáneamente de dos o tres asignaturas, aunque no toda la clase participara en la discusión de todas las lecciones impartidas.

actuación. Por ejemplo, se plantea un *gesto* por parte del profesor formador de profesores: proporcionar a los alumnos-maestros una colección de problemas orientadora.

En realidad las situaciones comentadas nos informan de que en las lecciones prácticas afloran los *modelos epistemológicos clásicos* (más intelectualistas), que a su vez influyen en los *modelos docentes* (poco protagonismo del niño), por más que estos modelos sufran algunas innovaciones –poco relevantes en relación con el conocimiento matemático objeto de aprendizaje en primaria–, elementos que son influencia del *modelo pedagógico de referencia* en los ambientes renovadores (enseñanza activa y agradable, importancia de utilizar juegos y material didáctico, etc.).

Pese a los puntos débiles en la puesta en práctica, cabe destacar que el dispositivo analizado pone el énfasis en el *logos* del alumno de magisterio, tanto como en la *praxis*.

La comparación entre el análisis a priori, individual, del alumno que explica la lección (la preparación de la lección entregada antes al profesor por escrito) con el análisis colectivo posterior propicia *momentos de validación*. La dirección del profesor y las clases teóricas que alternan con la práctica deben favorecer los momentos de *institucionalización* de la actividad matemático-didáctica del futuro maestro, en el marco de la metodología (didáctica) de la matemática.

6.3.2. Consejos acerca de una lección de Matemáticas

En este apartado recogemos los «Consejos acerca de una lección de Matemáticas» que incluyó Eyaralar como un epígrafe al final de la obra *Metodología de la Matemática*. Con ellos, se plasman las conclusiones de la

> Discusión que siguió durante el curso 31-32 a las lecciones explicadas por los alumnos del grado profesional de la Normal de Baleares a los niños de la graduada de la misma. Son, pues, observaciones *in vivo* que tienden a remediar los defectos más comunes entre los maestros que empiezan sus prácticas, y por eso las creemos de interés[94].

[94] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 306-307.

Estos 'consejos', que incluimos a continuación, formulados la mayoría en un nivel disciplinar (en la terminología de la TAD), son la expresión de gestos didácticos de las praxeologías que los futuros maestros han de desarrollar en el aula de primaria, elaborados de manera colectiva tras el conjunto de clases prácticas y las correspondientes discusiones en la clase de Metodología. Se puede ver este trabajo de síntesis, como un dispositivo de institucionalización, en el que participan –son los protagonistas– los propios alumnos del grado profesional. De hecho muchos de ellos hacen referencia a aspectos que vemos tratados en el propio libro citado.

NOTA

Consejos acerca de una lección de Matemáticas

1. Preparar y ordenar cuidadosamente todo el material necesario, y mantenerlo oculto por el interés que provoca la novedad. (Así en el aparato Arquímedes se tiene la cuerda arrollada a la esfera porque es más fácil aplicarla después al cilindro).

2. Interrogar: 1.º Colectivamente ¿quién sabe? (Emulación); 2.º Individualmente a varios (estímulo).

3. Escribir y dibujar con la mayor claridad posible.

4. Escribir las palabras nuevas y explicar su significación primitiva. Ejemplo: arco; cuerda; área; esfera = pelota; isósceles = piernas iguales; escaleno = cojo; diámetro = medida a través.

5. Dominar la clase. Cortar distracciones o faltas al iniciarse.

6. Una lección = una idea.

7. Operar antes de definir. (Ejemplo clases de triángulos) o de enunciar. (Ejemplo: A + B + C = 2R).

8. El ejemplo antes que la regla.

9. Interrogar a los más torpes y distraídos.

10. Adaptarse a los niños variando el plan dispuesto. (La obtención del triángulo equilátero llevando la base sobre el eje del rectángulo hubo de ser sustituida por la dada en 226 – 11[95]).

11. Relacionar con la vida. Ejemplo: formas △ ; esfera = bolas de rozamiento; TM. = carga carro, camión; peso, con monedas; empleo de la libra en donde es usada.

12. Clasificar en cuanto sea posible.

13. Emplear notaciones correctas y universales. Ejemplo: La coma en los decimales en la parte inferior, los lados de un △, *a, b, c*, sus vértices A, B, C.

14. Motivar. Ejemplo: Empezar por la pelota para tratar la esfera.

15. Tener ocupados a los niños. Dibujo, cálculo, trabajo manual.

16. Comprobar las reglas. La abreviación por la operación directa. Las construcciones por la medida.

17. Tener preparada la pizarra, en ella una cuadrícula de 5 cm de lado; los alumnos con papel cuadriculado también.

18. Resumir lo aprendido que deba quedar. (Modelo de expresión, ejercicio de la memoria, ayuda al saber).

19. Hacer notar las ventajas de lo aprendido. Ejemplo: transformar escala de $\frac{5}{100}$ en $\frac{1}{20}$

20. Tener preparados los datos para que no resulten números raros.

21. Emplear un lenguaje preciso y claro para no originar confusiones al niño.

22. Definir por afirmación y negación y comprobar por reconocimiento. Ejemplo el diámetro.

[95]Se refiere a una construcción con papel: Si en dos vértices del lado menor de un rectángulo se dobla en ángulo recto en tres superpuestos, y se corta por los pliegues que forman con la base ángulos de 60°, se obtiene un triángulo equilátero.

23. Lo que se emplee para agradar sea adecuado. Ejemplo: No monigotes para niños de 12 años.

24. Aplicar los conocimientos a las demás ciencias. Ejemplo: esfera, planetas; elipse, órbitas.

25. Una anécdota o historieta en cada lección.

26. Lenguaje ameno (al determinar la altura de una torre se evoca el escalatorres).

27. Procurar la ayuda mutua de los niños. Mediciones, comprobaciones.

28. Emplear números sencillos y reales cuando se explica. No escala $\frac{1}{19}$

29. Es preferible hacer los dibujos en la pizarra a tenerlos preparados (interés del movimiento) los alumnos, convenientemente dirigidos, y actuando despacio, van copiando.

30. No mezclar cosas, y menos, cuanto más afines.

31. Los productos del trabajo de la clase deben quedar para los niños (adquisitividad) el metro confeccionado en cinta, el dm^3 en papel.

32. No iniciar nada que no se complete.

33. Relacionar con el mismo niño. Metro, braza; dm, palmo; cm, dedo.

34. Dejar al niño sentir la dificultad antes de ayudarle a resolverla.

35. Emplear fórmulas adecuadas: $c = \pi d$ es preferible a $2\pi r$; $E = \pi d^2$ lo es a $4\pi r^2$.

36. Las definiciones deben ser adecuadas. Kg = peso, l = vaso. Las unidades espaciales tardan a *verlas* [sic].

37. Educación sensorial. Medidas, pesadas, evaluación a sentimiento.

38. Organizar el trabajo como para 40 niños. Ejemplo: medir altura de la silla, anchura de los barrotes... de cada uno.

39. Experimentar en cuanto sea posible $Dm^3 = l = Kg$.

40. Repasar las nociones que se van a utilizar (apercepción).

41. Máxima precisión en órdenes. Sin ellas es difícil construír [sic] hasta un rectángulo de 5×7.

42. Comprender y utilizar las nuevas nociones antes de pasar a otras. Ejemplo: después de definida la *escala* empleese [sic] reiteradamente.

43. Dejar pasar algún tiempo antes de utilizar un conocimiento como base de otro, más aun [sic] en los inversos. (Cálculo de una dimensión conocida el área y el volumen).

44. Emplear formas de expresión adaptadas Ejemplo: Escala 1 cm. por 20 m. más claro que $\frac{1}{2.000}$.

45. Preparar al menos *tres* ejercicios de cada clase.

46. Problemas reales e interesantes. No lo es calcular la longitud de una arista medible.

47. Dar forma sugestiva y aun misteriosa a los problemas.

48. Actualizar (Deportes, noticias, prensa).

49. Enunciar despacio para copiar, mirando al más torpe.

50. Operar simultáneamente con los alumnos (Guía y comprobación).

Capítulo 7

Las organizaciones didácticas para la enseñanza de las matemáticas en primaria

7.1. El Método de Proyectos

Uno de los dispositivos de formación característico de la Nueva Educación fue sin duda el método de proyectos, que tuvo su origen en Norteamérica. Este método también tuvo influencia en la formación de los maestros y en la enseñanza que recibían desde las Normales, sobre todo en el periodo de mayor renovación de estos centros. Se crearon Patronatos escolares entre los años 1931 y 1934, durante la Segunda República, en diferentes centros e instituciones, en particular en las escuelas anejas a las Normales, con el fin de ensayar los nuevos métodos pedagógicos. Se incrementaba así el número de las llamadas «escuelas de ensayo y reforma», creadas por el gobierno en 1922 como instituciones en las que poner en práctica las ideas de la Nueva Educación[1]. Así los ensayos sobre el método de proyectos, en particular, se

[1]Pozo Andrés, María del Mar del: «La Escuela Nueva en España: crónica y semblanza de un mito». *Historia de la Educación*, 2003-2004, **22-23**, pp. 317–346.

Pozo Andrés, María del Mar del: «The transnational and national dimentions of pedagogical ideas: the case of the project method, 1918-1939». *Paedagogica Historica: International Journal of the History of Education*, 2009, **45(4-5)**, pp. 453–693.

introdujeron en la formación inicial de los maestros. Además, algunas de las obras más difundidas sobre dicho Método fueron escritas precisamente por personas dedicadas a la formación de maestros, como Margarita Comas.

Los tres principales difusores del método de proyectos en España fueron Lorenzo Luzuriaga (al que citan Sáinz y Comas), Fernando Sáinz y Margarita Comas. Según María del Mar del Pozo[2], se situaban en un nivel intermedio entre los pedagogos extranjeros que informaban del método y los maestros que experimentaban en sus aulas. Nos basaremos en sus publicaciones, y en las de David Bayón, quien escribió, junto con Ángel Ledesma, un libro sobre la experiencia de llevar a la práctica el método en una escuela.

En ese momento, las personas interesadas en las pedagogías renovadoras consideran que «el método de proyectos no es uno más»[3].

La mayoría de los autores, en vez de definir el método de proyectos, intentan más bien caracterizarlo. Aún así, la definición más comúnmente aceptada de proyecto, en España, es: «A project is a problematic act carried to completion in its natural setting»[4], definición en inglés, de Stevenson, que Margarita Comas traduce como «la realización como respuesta a un problema, de un acto simple o complejo en su *medio natural*»[5], y en la revista *La Escuela Moderna*[6] como «una acción problemática llevada a su término en su orden natural»[7]. En esta serie de artículos Stevenson destaca las características que David Suedden, en la escuela rural, atribuyó a un proyecto:

---

[2]Ibídem.

[3]Comas Camps, Margarita: *El método de proyectos en las escuelas urbanas*. Losada, Buenos Aires, 6.ª edición, 1963. La edición original es: Madrid, Publicaciones de la Revista de Pedagogía, 1931, p. 7.

[4]Stevenson, John Alford: *The project method of teaching*. The Macmillan Company, USA, 1921. `http://archive.org/stream/projectmethodoft00stevuoft/projectmethodoft00stevuoft_djvu.txt`. Consultado el 10-10-2015.

[5]Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 9.

[6]Es una traducción, publicada en diversos números de la revista, desde septiembre de 1933 hasta diciembre de 1934, de la obra de John Alford Stevenson, *The project method of teaching*, que también cita Margarita Comas.

[7] «El Método de Proyectos en la Enseñanza». *La Escuela Moderna*, 1933-1934, **505, 507, 510, 512, 514, 515, 517**, pp. 470–477, 562–569, 124–134, 230–240, 315–324, 366–378, 469–478. Cita en p. 472 (n.º 507).

> a) la empresa siempre poseía cierta unidad; b) el estudiante entendía claramente el fin práctico o resultado que había que alcanzar y siempre se contaba con que este resultado le interesaba como interesa una partida de juego que debe ser ganada; c) los «standards» de resultados eran claramente objetivos; tanto, que los estudiantes podían, en gran parte, adquirir conocimientos reales en cuanto al valor del producto elaborado, y d) la empresa era de tal naturaleza que el alumno, para lograr los fines deseados, necesariamente tenía que acudir a sus conocimientos y experiencias, quizás hasta ese día no utilizados conscientemente[8].

Por su parte, David Bayón[9], inspector, pensionado por la JAE en 1924, siendo maestro, para estudiar Organización y Métodos de Enseñanza en Francia, Bélgica y Suiza, y Ángel Ledesma[10], exponen las cinco características que, según Dewey, tiene este método: que para el alumno se trate de una verdadera experiencia con interés intrínseco; que sea un problema genuino; que el alumno posea la información y haga las observaciones necesarias para manejarla; que sea él quien genere las soluciones y, por último, que haya oportunidad de aplicar sus ideas, para comprobar su validez y aclarar su significado[11].

Stevenson[12] hace una doble clasificación de los proyectos: en *simples o complejos*, y en *intelectuales o manuales*. En éstos últimos los alumnos aplican a un trabajo práctico la teoría conocida de antemano, mientras que en

[8]Ibídem, p. 566.

[9]Fue pensionado por la JAE en 1924, siendo maestro, junto con el inspector Vicente Valls Anglés y otros maestros, para estudiar Organización y Métodos de Enseñanza en Francia, Bélgica y Suiza. Parece ser que, en 1927, obtuvo beca para visitar las principales escuelas españolas de entonces. Dirigió, junto a Hernanz y Cobos, la revista *Escuelas de España*. «Expediente de David Bayón Carretero. JAE/17-195». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

[10]Solicitó, como maestro, en 1920 una pensión para estudios en el extranjero a la JAE, que le fue denegada. En su expediente expone que había visitado escuelas de niños normales y anormales en Escocia. «Expediente de Ángel Ledesma Martín. JAE/84-116». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

[11]Bayón, David y Ledesma, Ángel: *El método de proyectos*. Imp. de la rev. Escuelas de España, 1934, p. 29.

[12]Citado en: Sáinz, Fernando: *El método de Proyectos*. Losada, Buenos Aires, 1961. La primera edición es de la Revista de Pedagogía, en 1930, p. 35.

los intelectuales van descubriendo la teoría a partir de las experiencias realizadas. Respecto a la clasificación en manuales e intelectuales, Fernando Sáinz no ve clara la frontera entre ambos, ya que ningún proyecto se da solo con actividad manual, lo mismo que no considera pedagógico un estudio puramente formal. Propone más bien, aun sin ver necesaria una clasificación, diferenciar proyectos por materias o disciplinas, o bien hacerlo según el género de saber o experiencia que procuran. En cuanto a la distinción entre simples y complejos, Sáinz da varios ejemplos de proyectos simples, algunos de matemáticas, ejemplos que se parecen mucho a lo que consideramos *problemas*: «en idioma, redactar cartas alusivas a un acontecimiento; [...] en matemáticas, hallar la asistencia media de alumnos a la escuela, confeccionar un presupuesto de excursión, averiguar el número de losas necesarias para arreglar el suelo»[13].

Sin embargo, los defensores del método de proyectos ponen mucho énfasis en diferenciar proyecto y *problema*, y esa diferencia no está tanto en la envergadura, la amplitud o el contenido, sino más bien en la función que desempeñan uno y otro, ya que coinciden en atribuir a los problemas un carácter formalista, sin la intervención de la experiencia y de la acción (sobre todo de llevar la acción a su fin, una característica fundamental del método de proyectos): «Hay varios tipos de proyectos: uno de ellos sólo desarrolla procesos mentales sin ninguna manipulación de material y sin necesidad de expresión exterior; éste es el tipo de problema»[14].

Finalmente se reconocen diferentes grados de aplicación tanto en problemas como en los proyectos. Y lo mismo que se clasifican los proyectos en simples y complejos, los problemas se pueden clasificar en *simples* y *multiproblemas*. Igual que los proyectos complejos pueden subdividirse a su vez en varios proyectos simples, los multiproblemas pueden abarcar muchos problemas y proyectos simples[15]. Los problemas se contemplan como parte de los proyectos, siempre que no sean tan simples que solo requieran la aplicación de principios ya conocidos. Kilpatrick precisa lo siguiente:

> Es evidente que cada problema aceptado y cuya solución exige un

[13]Ibídem, p. 35.

[14]Krackowizer, Alice, citada en: *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, p. 132.

[15]Ibídem.

> proceso natural es, en último término, un proyecto, pero no todo proyecto es un problema; el método de problemas se torna, por consiguiente, un caso especial, con toda seguridad uno de los más importantes del proyecto[16].

7.1.1. Cuestiones asociadas a este Método

El método de proyectos se concibe como respuesta a cuestiones de organización de la escuela y de desarrollo del currículo que habían sido suscitadas por los principios de la Escuela Nueva. ¿Cuáles eran esas cuestiones que se planteaban y qué organizaciones didácticas constituyeron como respuesta?

¿Qué cuestión fundamental se plantea el método de proyectos?

Según Fernando Sáinz, los autores del método se plantean cómo aplicar a la escuela primaria lo que se hace en el ámbito de cualquier profesión o en la enseñanza superior especializada (ingeniería, agricultura, trabajos de taller, etc.). La posibilidad de tal organización es lo que se plantea Fernando Sáinz cuando formula la siguiente cuestión, que podemos considerar la *cuestión generatriz* del Método:

> Q_0: **¿Es posible organizar la escuela siguiendo un plan de quehaceres análogo al que se desarrolla fuera, en la casa, en la calle, en la sociedad?**[17]

Es decir, que la vida escolar reproduzca para el niño la vida fuera de la escuela.

El método de proyectos es una respuesta a esa cuestión, que para poder desarrollarla necesita concretarse en otras:

> Q_1: **Cómo emplear el método de proyectos, qué parte de la actividad escolar desarrollar por este método.**

[16] Kilpatrick, William Heard, en: *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., p. 129.

[17] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 32.

Se encuentran varias formas de ponerlo en práctica: Puede comprender toda la actividad escolar, y tratar todo el programa mediante proyectos. Margarita Comas precisa, para este caso, la necesidad de «decidir los principios y procesos que debe dominar el alumno», considerar los medios disponibles y según esto seleccionar grupos de proyectos, más que proyectos aislados, y planificar su secuenciación de modo que se asegure de que «todos los hechos esenciales, principios y procesos entran en su desarrollo»[18]. Esto conllevará otras tareas didácticas para el maestro.

Pero también caben otros usos intermedios. Fernando Sáinz, pensando en las posibilidades reales de las escuelas españolas y de sus maestros en aquel momento, propone un uso moderado, teniendo en cuenta las condiciones institucionales existentes:

> No parecería razonable que, sin más ni más, nuestros maestros quisieran introducir en sus escuelas el sistema de proyectos de una manera plena, pero tampoco sería progresivo renunciar a un modesto ensayo compatible con el margen de libertad que permite nuestra legislación escolar. Por muchas circunstancias, la escuela primaria actual está impedida para acometer hondas reformas, pero el Método de proyectos no requiere para su ensayo transformar el régimen escolar ni prescindir de otras normas metodológicas[19].

Así, sugiere emplear este Método:

a) Para algunas materias del programa solamente. En este caso, el maestro ha de hacer una selección de proyectos de una materia, y a la hora de trabajar en el aula el proyecto puede referirse al mismo tema, en las diferentes secciones o edades, pero su desarrollo puede comprender diferente nivel de complejidad o de profundidad. Hay que tener en cuenta que se trataba, en la mayoría de los casos, de escuelas unitarias.

b) En unos momentos establecidos en el horario, un tiempo cada día o unos días concretos a la semana para el trabajo con proyectos. En este caso los proyectos no se referirán a una materia concreta, sino a varias, serán proyectos globales o sintéticos sobre alguna cuestión de interés.

[18] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 10.

[19] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 60.

c) En un grado o sección de niños y pone, como ejemplo, con los más adelantados. El maestro dirige al grupo de alumnos que trabaja en el proyecto, pero les deja más libertad y eso le permite al docente atender al resto de los alumnos. En este caso, se presenta el problema de la agrupación y del trabajo en equipo, que comentaremos más tarde. Basándose en el trabajo «La pedagogía del equipo», que Luzuriaga, había presentado al IV Congreso Internacional de Educación Nueva, declara que «las escuelas nuevas sustituyen la unidad artificial *clase* por la unidad real *grupo*»[20], en el sentido de que el criterio para organizar a los alumnos no es agruparlos por su edad, en grupos supuestamente homogéneos.

La otra cuestión que surge es:

> Q_2: **¿Cómo seleccionar el(los) proyecto(s)? ¿Qué proyectos seleccionar?**

Esta cuestión a su vez se descompone en otras:

> Q_{21}: **¿Qué amplitud –en relación con la programación de un curso– debe abarcar un proyecto?**

Para responder a esta cuestión, junto a las ya clásicas formas de aplicar el método de proyectos, *por actividades* o *por materias*, Sáinz destaca otras dos: proyectos *globales* y proyectos *sintéticos*.

Los *proyectos para una materia*, suelen incluir también elementos de otras o incluso diseñarse para más de una disciplina; por ejemplo, la necesidad de construir un patrón para proporcionar a la fundición un modelo de bola de hierro para los ejercicios gimnásticos, conlleva matemáticas, física y trabajo manual a la vez[21]. Quizá por esto, además de las disciplinas o las materias típicas de un programa escolar, incluye las *excursiones* como pertenecientes a este tipo de proyectos.

Los *globales*, más complejos, permiten manejar el programa de todas las materias, fundidas en un número reducido de proyectos: jugar a familias, jugar a tiendas y jugar a pueblos, bastaría para el primer grado.

[20] Ibídem, p. 65.
[21] Ibídem, p.46.

Los *proyectos por actividades* son una manera menos extrema de aplicar el método. Las pautas que da Krackowitzer, también para los niveles de enseñanza más elementales, pasan por estructurar la jornada diaria, asignando una franja horaria a cada una de las actividades que comprende el proyecto, desde la propuesta del tema hasta el registro de los progresos efectuados. Las ideas directrices en torno a las cuales agrupa las series de proyectos que propone en sus escuelas son: 1. El juego como objetivo. 2. Actividades constructivas (relativas a las necesidades del juego, a efemérides, al jardín escolar...). 3. Actividades encaminadas a adquirir la experiencia social (la casa, la comunidad, el caserío, la escuela). 4. Proyectos de finalidad ética. 5. Proyectos encaminados a adquirir la experiencia natural. 6. Proyectos de finalidad literaria. 7. Proyectos sobre las "Materias formales" (consideradas así la lectura, la escritura y el cálculo), «que son el ligamento de todos los demás, de los que no pueden separarse»[22].

En cuanto a los que denomina *proyectos sintéticos*, se limita a describir ejemplos que los caractericen: construcción de una choza india; organización de un festival dramático, elaboración de un periódico escolar..., ejemplos todos ellos en los que intervienen varias materias y se acometen empresas de varias modalidades.

Como reconoce Margarita Comas, «el problema está en sugerirle aquellos que favorezcan su desarrollo físico, intelectual y moral, y escalonarlos de manera que entren en ellos no solo las ramas todas del vigente plan de enseñanza, sino los puntos esenciales de cada una»[23].

Q_{22}: ¿Con qué criterios se debe elegir un proyecto?

La primera discrepancia entre los iniciadores de este método es quién ha de plantear el proyecto. Algunos opinan que solo el maestro estará en condiciones de hacerlo con ciertas garantías de éxito, mientras que otros solo aceptan que la idea del proyecto provenga de los niños espontáneamente. Fernando Sáinz adopta una postura intermedia, admitiendo que es importante aprovechar las propuestas de los niños, pero señalando que en este caso el papel del maestro ha de consistir:

[22]Ibídem, p. 42.

[23]Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 8.

> 1º, en juzgar si el tema merece la pena de ocupar un tiempo y consumir una actividad; 2º, en medir las dificultades de la empresa, no sea que los proyectistas carezcan de los más indispensables elementos de cultura y de técnica para siquiera comenzar; 3º, en apreciar, si el producto es rico en formas de actividad, porque debe huirse de proyectos excesivamente especulativos o mecánicos[24].

Y no duda en aconsejar al maestro que no acepte un proyecto, aunque venga de la clase, si no cumple las condiciones anteriores.

Margarita Comas[25] asume como propias las bases que establece Krackowier para seleccionar un proyecto. Su respuesta a la cuestión planteada viene formulada como una relación de preguntas que debe plantearse el enseñante a la hora de idear o de filtrar los proyectos:

> 1ª ¿Interesa el proyecto a la mayoría del grupo?
>
> 2ª ¿Tiene valor suficiente para que el individuo realice por su medio una definida contribución a su propio desenvolvimiento o al del grupo?
>
> 3ª ¿Abre al individuo o al grupo, consciente o inconscientemente, nuevos horizontes de donde surjan otros problemas que resolver, y por lo tanto proyectos que realizar?
>
> 4º ¿Ayuda a aclarar alguna fase de la experiencia o actividad del niño, que valga la pena de ser fijada y conservada, aunque sea temporalmente?
>
> 5ª ¿Sirve para aumentar gradualmente la capacidad de interés del niño, su poder de atención sostenida?
>
> 6ª ¿Puede este proyecto, mejor que otro, dar la solución de un cierto problema en un momento determinado, aún a través de un resultado que podríamos llamar negativo?

Como vemos, esta respuesta a la cuestión Q_{22} la forman una serie de interrogantes que constituyen a su vez *cuestiones* (en el sentido de la TAD) que se plantean con relación al Método.

Cuando todo el programa se organiza a través de proyectos, Margarita Comas recuerda que hay que determinar los «hechos, principios y procesos»[26]

[24] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., pp. 36-37.

[25] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., pp. 10-11.

[26] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., p. 319.

que deben aprenderse y elegir un conjunto de proyectos que posibilite dicho aprendizaje.

Una vez seleccionado un tema, relacionado con algún centro de interés[27], surge la siguiente cuestión:

> Q_3: **¿Cómo ha de planificar y poner en práctica el maestro un proyecto con sus alumnos?**

Esta cuestión nos lleva a varias *tareas didácticas* para el maestro, asociadas –aunque no exclusivamente– a este método:

> T_1: **Hacer un esquema previo del proyecto**

La *técnica didáctica* que proporciona Margarita Comas para esta tarea consiste en proponer un esquema (que coincide prácticamente con el que ofrece Stone y recoge Stevenson[28]) ejemplificado para un proyecto de ciencias experimentales:

Centro de interés. Tema. Materias que abarca.

I. Experiencia previa del alumno que cabe aprovechar.

II. Principales objetivos del maestro.

III. Diferentes fases de la enseñanza.

    1. Preparando a los alumnos para que sientan la necesidad de aprender.
    2. Capacitando a los alumnos para que adquieran los conocimientos que necesitan.
    3. a) Comprobación de los resultados.
       b) Aplicación de los resultados[29].

[27] Margarita Comas sitúa los proyectos enmarcados en algún centro de interés. Otros autores, como Félix Martí Alpera, estimaban, por el contrario, que un proyecto se podía considerar como un conjunto de centros de interés.

[28] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., p. 566.

[29] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., pp. 11-13.

¿Qué aspectos debe incluir la planificación? Este esquema atiende al contenido del proyecto y a la secuencia de actividades que comprende. Pero no solo eso. La mayoría de los autores que escriben sobre este método, apuntan a la «colocación natural» del proyecto. Una de las tareas del maestro es descubrir «por qué las personas, fuera de la Escuela, estudian o aprenden determinada materia»[30], y posteriormente garantizar la misma colocación natural en la Escuela. Es decir, la tarea del profesor comprende también el trabajo que se señala en el esquema anterior como primera fase de la enseñanza, esto es, hacer que los alumnos sientan la necesidad de aprender, que se interesen por la situación que se les propone, que acepten el reto y lo asuman como propio. Es lo que Guy Brousseau[31] llama la 'dévolution' de la *situación* a los estudiantes, que han de comprender el resultado que se les demanda y afrontar la situación, tal como recogemos en una cita anterior (p. 185), igual que «una partida de juego que debe ser ganada»[32]. Esta 'dévolution' se considera consustancial al método en sí; según Fernando Sáinz una de sus propiedades es que satisface «la necesidad de que el trabajo escolar sea atractivo»[33], y aclara: «El interés nace del asunto, de la oportunidad, del método y de otras muchas circunstancias»[34].

La manera en que los proyectos conectan diferentes ramas de conocimientos y varias formas de trabajo se considera otro de los factores que contribuye a la implicación por parte de los niños, aunque algunas voces advierten de que un proyecto no ha de interesar siempre a los niños, o al menos no a todos de la misma forma[35].

Pero hay otras tareas que el maestro ha de acometer:

T_2: **Gestionar la realización del proyecto por los alumnos**

En este caso, una de las *técnicas didácticas* que caracteriza la enseñanza por proyectos consiste en poner en marcha un dispositivo de ayuda al estudio

[30] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., pp. 315-324.

[31] Brousseau, Guy: *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage, Grenoble, 1998.

[32] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., p. 566.

[33] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 52.

[34] Ibídem, p. 27.

[35] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., pp. 233-240.

Bayón y Ledesma, *El método de proyectos*, op. cit.

o *dispositivo didáctico* que encontramos en todos los ejemplos descritos. Se trata del *trabajo en equipo*. Si una de las ideas inherentes al método de proyectos es el trabajo autónomo de los niños, bajo la dirección del maestro, la otra es el trabajo en grupo. Ambas están relacionadas, el trabajo en grupos pequeños es una forma de trabajo autónomo. Fernando Sáinz considera el trabajo colectivo como uno de los problemas que el nuevo método resuelve de manera más eficaz; en lugar de actuar los niños como una masa frente al único actor, que era el maestro, ahora las ayudas provienen tanto del maestro como de los compañeros. De hecho, el trabajo en grupo no anula en los niños la iniciativa individual, todo lo contrario:

> Hasta ahora eran los maestros quienes hacían cosas con los niños, y ésa era la causa de que aquéllos [la conciencia de grupo y la idea de solidaridad] permanecieran inéditos. Si se invierte el orden y se pone a los niños a que hagan cosas, inmediatamente se individualizan, aportan sus iniciativas, sus puntos de vista, su responsabilidad, cosas todas esenciales a una educación racional y respetuosa con el sujeto[36].

En todos los ejemplos publicados, aunque el proyecto sea planteado y realizado por la clase al completo, en las diferentes fases o partes de que consta, hasta su terminación, la clase se divide en grupos más pequeños, y normalmente hay una división del trabajo, con varias puestas en común para compartir lo que se ha venido realizando y planificar las siguientes actuaciones, los aspectos sobre los que seguir buscando información o en los que seguir trabajando. El trabajo en grupos pequeños es una modalidad de trabajo autónomo, un modo particular de promover el que los alumnos investiguen[37]. Todos los defensores del método de proyectos atribuyen numerosas ventajas a este dispositivo pedagógico, y suelen hacer observaciones –a menudo intercaladas en los ejemplos de realizaciones del Método– sobre cómo gestionar, por parte del maestro, esta parte de 'trabajo autónomo' de los grupos.

Algunas ideas que apuntan Bayón y Ledesma o Comas son la posibilidad de dedicar más o menos tiempo a cada equipo, según la necesidad; u

[36] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 54.

[37] Robert, Aline: «Laisser chercher les élèves? Les faire travailler en petits groupes?» *L'Ouvert*, 2008, **117**, pp. 31–46.

organizar el trabajo para que los equipos no estén usando a la vez un mismo material –los libros para consulta no abundan en las aulas–. Otras veces los *gestos didácticos* que se proponen tienen como finalidad evitar conflictos disciplinarios durante el trabajo en el seno de un grupo o entre ellos: elegir (o hacer que elijan) responsables de grupo; fomentar una sana competitividad, no reñida con el espíritu de colaboración, entre los diferentes equipos. Asimismo, proporcionan consejos sobre cómo formar los grupos o acerca de la distribución del trabajo entre ellos. También son prudentes a la hora de advertir al maestro de cómo gestionar la disciplina con esta nueva forma de trabajo, sobre todo en lo que respecta a sustituir la disciplina externa por la interna, y «no asustarse del desorden aparente, rumor de colmena, propio de la escuela activa, que contrasta con el silencio sepulcral, el *non plus ultra* del éxito en los métodos clásicos de enseñanza»[38].

En lo que todos coinciden es en la importancia de la colaboración entre los niños y en la necesidad de implicarlos para alcanzar un fin común. El trabajo en equipo no es una componente más del Método; por ello la formación de equipos ya no es una contingencia y su gestión se considera fundamental: «Las escuelas nuevas sustituyen la unidad artificial *clase* por la unidad real *grupo*, perdiéndose el sentido intelectual exclusivo de la clasificación y dando a la colectividad un sentido más vital»[39]. Pero no es una visión ingenua, se introducen nuevos dispositivos con los gestos asociados, en contraposición con los habituales, pero de una manera integradora, no acrítica:

> Para que un proyecto llene verdaderamente su objeto, eduque y prepare para la vida, debe utilizar las cuatro formas de trabajo posibles por parte de los alumnos: individual regulado, colectivo regulado, individual libre y colectivo libre también, pues cada uno de ellos tiene fines distintos[40].

Conscientes además de las condiciones institucionales en las que se puede aplicar este sistema de enseñanza en España, se plantean igualmente cues-

[38] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 19.

[39] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 65. Fernando Sáinz refleja, como él mismo reconoce, las ideas que había expuesto Lorenzo Luzuriaga en «La pedagogía del equipo», texto presentado al IV Congreso Internacional de Educación Nueva.

[40] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 16.

tiones '*ecológicas*'; en particular, considerando que las escuelas aún no son en general graduadas. Por ello, a la vez que apuntan a que el maestro haga trabajar a un grupo de niños en un proyecto, y así poder prestar una atención mayor al resto de sus alumnos –de menos edad o de menor nivel–, no pierden de vista la idea de la escuela como una comunidad de estudio, y para el caso de las escuelas unitarias el maestro ha de conseguir llevar el espíritu del equipo a la vida de la escuela, ya que opinan que

> la escuela no puede perder su unidad superior, y el grupo o los grupos han de procurar siempre comunicarse con sus compañeros, informarles de su labor y darles la sensación de ejemplaridad en el trabajo. Tampoco ha de perderse la responsabilidad de cada niño ni de cada grupo en el anónimo[41].

Otra de las tareas didácticas del maestro tiene relación con la validación y la institucionalización de los conocimientos:

> T_3: **¿Cómo promover la validación y la institucionalización de los conocimientos manejados?**

Las principales referencias a las acciones de validación –así como a las de institucionalización– las encontramos en Comas y en Bayón y Ledesma, quizá porque en sus libros exponen con más detalle algunos ejemplos concretos. Suelen hacer referencia, tal y como recoge el esquema que propone Comas y que hemos citado anteriormente, a la 'comprobación' y la 'aplicación' de los resultados. Cuando el proyecto consiste en algún tipo de realización manual o conlleva el hacerla, la validación suele identificarse con la comprobación del buen funcionamiento de aquello que se ha elaborado.

En los casos de proyectos en los que se trata más bien de buscar información y elaborar un informe –que puede contener dibujos, estadísticas y gráficos– reelaborando (recopilando y sistematizando) la información reunida entre todos, la validación normalmente consiste en la puesta en común de los resultados obtenidos, y en contrastar las diferentes fuentes de información. Lo usual es que quede incluida en la institucionalización de lo aprendido e implícitamente se confunda con ella.

[41] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., pp. 65-66.

En cualquier caso, una *dialéctica de la validación*, tal y como se entiende en la Didáctica de la Matemática[42] no la hallamos en la exposición del método de proyectos ni tampoco en los ejemplos publicados. Por otra parte, si se tiene en cuenta que ninguno de estos ejemplos es un proyecto de matemáticas propiamente, aunque muchos conlleven alguna clase de trabajo matemático o intervengan en ellos de alguna manera conocimientos matemáticos, es normal que la validación esté más cercana a la comprobación experimental o a argumentaciones de tipo inductivo, y que no veamos en estas realizaciones de proyectos trazas de las formas de hacer que serían más propias del quehacer matemático.

En lo que sí insisten los promotores del método de proyectos es en la necesidad de lo que, en la terminología que empleamos, se denomina *institucionalización* de lo aprendido.

> Es muy importante para el éxito del método que nos ocupa no dejar que las cosas aprendidas queden, como se dice vulgarmente, flotando en el aire, y por eso conviene hacer al final de cada proyecto, en la forma más natural posible, una especie de balance de las nuevas adquisiciones[43].

Esta institucionalización se da a través de varios dispositivos por parte del maestro: resúmenes e informes, cuadernos, libro colectivo. Encontramos en los ejemplos relatados frecuentes alusiones a la necesidad de hacer balance de los nuevos saberes adquiridos. La *técnica didáctica* para conseguirlo consiste en promover la realización por parte de los niños, durante y al final del proceso, de recopilaciones y síntesis del trabajo realizado. Esta técnica no obstante puede realizarse de varias formas.

Margarita Comas hace suya la propuesta que Adolphe Ferrière recomienda para las escuelas activas: ir confeccionando, a medida que se va desarrollando el proyecto, el *Libro de la Vida*[44], una especie de dosier donde los niños van reflejando todo su trabajo, estructurado con un índice y tantos sobres como epígrafes, para guardar fotografías, recortes, esquemas y otros materiales hallados o elaborados, por ejemplo, resúmenes de lo que se va aprendiendo. Este

[42] Brousseau, *Théorie des situations...*, op. cit.
[43] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 17.
[44] Ibídem, p. 17.

libro, cuyos epígrafes pueden ampliarse en cualquier momento, contendrá no solo el trabajo de cada niño, sino las aportaciones de los compañeros.

Además están las *monografías* que, a modo de cuadernos colectivos, se pueden confeccionar al final del proyecto, o mejor, tras finalizar cada capítulo. La *técnica didáctica* conlleva los siguientes *gestos* por parte del maestro: primero una discusión colectiva en la que se determine cuál ha de ser el contenido; después se hará una primera redacción por parte de cada uno de los niños encargados de cada epígrafe o capítulo; tras ello tendrá lugar la lectura de ese primer borrador ante los compañeros, para mejorar el texto inicial con las aportaciones de los otros tanto sobre el contenido como sobre los aspectos formales; por último, se escribirá la versión definitiva, que quedará como obra de la clase y para disponibilidad de todos.

Otros autores proponen, para algunos proyectos, dividir la clase en tres equipos (técnico, administrativo y obrero); y que cada uno de ellos nombre a un secretario que elabore un cuaderno o «Diario de la realización», en el que se refleje esquemáticamente el resumen de la labor llevada a cabo, de la información hallada o de los objetos que necesitan o han de elaborar, incluso con dibujos cuando sea pertinente. Estos cuadernos no solo serán de utilidad para el proyecto de que se trate, sino que

> este cuaderno [correspondiente al equipo obrero], dedicado a vocabulario, lenguaje y grafismo, de objetos tan usuales en la vida, que el niño tanto ha de emplear en su hacer, es de verdadero interés escolar, y su ejecución constituirá, a la vez que el trabajo manual que exija la realización, la labor de este equipo[45].

Además de estos diarios, tras la exposición de cada grupo ante la clase, cada niño irá anotando en su cuaderno escolar lo referente a la labor realizada por los grupos, enriquecida por la exposición y el debate ante los demás.

En la confección de estos libros, donde el maestro desempeña –igual que en todo el proceso– funciones de dirección y coordinación, así como en las discusiones colectivas, aunque no solo, se concentra la mayor parte de los periodos de institucionalización –y en ocasiones de validación–; por ello, las

[45] Bayón y Ledesma, *El método de proyectos*, op. cit., p. 112.

personas más críticas o menos ingenuas respecto a la utilización de este sistema de enseñanza, consideran que no se puede prescindir de estas elaboraciones colectivas, por considerarlas «un excelente medio para afianzar los conocimientos adquiridos en el desarrollo del proyecto, evitando uno de los inconvenientes que se achacan al método, el de la vaguedad y poca firmeza»[46].

7.1.2. Planteamientos teóricos del Método de Proyectos

7.1.2.1. Contexto histórico y pedagógico

Considerar el momento histórico y las condiciones institucionales en los que se estudia un hecho educativo, es parte del *análisis ecológico*, que complementa el análisis de las prácticas didácticas o *análisis praxeológico*[47]. En este sentido, Margarita Comas, en la Introducción de su obra *El método de proyectos en las escuelas urbanas*, considera la aparición en aquel momento de métodos y sistemas de enseñanza nuevos «un producto del dinamismo de nuestro tiempo»[48].

En un contexto de crisis en los sistemas educativos, era natural que penetraran con facilidad ideas nuevas, al menos en los sectores con más tendencia a la renovación, y en las personas más informadas y con mayores inquietudes. Esas ideas renovadoras en la educación habían de tener su base en concepciones filosóficas. John Dewey fue quien inspiró el método de proyectos, y William H. Kilpatrick quien lo desarrolló[49]. En las ideas filosóficas de Dewey no solo se encuentran los fundamentos del método de proyectos, sino también los de la *escuela activa*.

Para Dewey la escuela necesitaba cambios en las materias del programa, en el modo de enseñarlas y en el modo de estudiarlas[50]. Se trataba de luchar contra una enseñanza de tipo intelectualista, en la que el libro de texto, los

[46] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 129.

[47] En el sentido de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

[48] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 7.

[49] En realidad, una de las características del método de proyectos es que no puede asociarse a una persona, aunque varios pedagodos, entre ellos Dewey, reclamasen su autoría. Esto y la ausencia de un marco teórico (conceptual y pedagógico) están en el fondo de la indefinición del método de proyectos. Pozo Andrés, *The transnational...*, op. cit.

[50] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 54.

libros en general, se habían convertido en la única *fuente* de información o de consulta y a la vez en el único *medio* de enseñanza, una enseñanza basada en la memorización y la verbalización. En relación con el carácter formal y abstracto que había ido adquiriendo la enseñanza desde que se trasladó a la escuela como una institución independiente del hogar, dice Stevenson:

> La educación impartida por hombres que habían perdido el contacto con el mundo culminó en un sistema tan sin conexión con los asuntos de la vida diaria, que en la actualidad nos vemos obligados a hacer un esfuerzo para formular un método que aproveche algunos de los puntos buenos de la institución desarrollados en el hogar antes de la implantación formal[51].

En muchos sectores se apreciaba la necesidad de cambiar no solo los fines de la escuela, sino los métodos para lograrlos. Pero para ello era necesario modificar también la organización interna de la escuela y las relaciones entre el docente y el alumno. Los métodos activos, y en particular el método de proyectos, son una respuesta a esta necesidad, que aparecía no solo como una necesidad pedagógica, sino social. Detrás se sitúan las teorías del conocimiento de Dewey y la función social que, según él, había de tener la escuela.

¿Qué condiciones ecológicas favorecían la difusión de este método? Aparte de las nuevas ideas pedagógicas, hemos de tener en cuenta los esfuerzos desde las instituciones oficiales durante la Segunda República por renovar la escuela, lo que incluía la formación de los maestros; eso propiciaba un entorno favorable para la experimentación de nuevas propuestas. Además, está la ausencia de programas y de evaluaciones regladas en la enseñanza primaria; es decir, no había resultados objetivos sobre cada alumno ni sobre la clase. Es cierto que se estaban divulgando los test para evaluar a los alumnos, pero ponían la atención, más que en evaluar el proceso de enseñanza o el resultado, en medir las cualidades intelectuales del alumno. Precisamente el método de proyectos propicia la consideración de objetivos didácticos menos inmediatos que los de la enseñanza tradicional. La falta de presión institucional y social sobre la evaluación de los alumnos pudo ser un factor que contribuyera

[51] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., cita en p. 473.

a favorecer la implantación de los proyectos, en los que se mostraba a 'la sociedad', normalmente concretada en el resto de la escuela y los padres, los resultados del trabajo realizado colectivamente (representaciones teatrales, periódicos escolares, exposiciones con las monografías o libros colectivos y los materiales elaborados, etc.).

7.1.2.2. Principios en los que se basa el Método de Proyectos

Los principios teóricos en los que se basa el método –la importancia de la *acción* como base para el aprendizaje y el *carácter social* de la educación– no son exclusivos de los proyectos; de hecho son compartidos por muchos de los llamados métodos activos que se desarrollaron y difundieron durante aquel periodo, como los de Decroly, Dalton o Winnetka. Métodos que también respaldan y recogen en sus obras algunos defensores del trabajo por proyectos, como Margarita Comas quien, además, relaciona precisamente el método de proyectos con los centros de interés de Decroly: «El taller puede ser en la escuela urbana lo que el campo escolar en la rural: un centro de interés de gran amplitud del cual vayan surgiendo durante uno o más cursos proyectos sugestivos que engloben todas las materias»[52]; recomienda al maestro tener en cuenta la teoría de los *centros de interés*, a la hora de ejecutar un proyecto.

El método de proyectos se propone reformar los viejos métodos de enseñanza, fundamentalmente en cuatro direcciones: sustituir la memoria por el razonamiento; anteponer el problema a los principios; información para la realización versus información como finalidad y, lo más importante, que el proyecto se desenvuelva en su medio natural[53]. Y frente a la situación anterior, en la que

> las leyes, los principios, las definiciones y los efectos se han dado a priori en lugar de ser inducidos; el trabajo ha presentado una serie de estancias inconexas sin que lo presidiera una unidad de objetivos y de acción; al alumno no se ha propuesto un fin, no ha sabido a dónde lo llevaban sus investigaciones; no ha sido nunca requerido ni se le concedió facultad para juzgar sobre la bondad, utilidad o eficacia de lo que realizaba...[54]

[52] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 37.
[53] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 34.
[54] Ibídem, p. 33.

En el método de proyectos se parte de un proyecto para procurar el conocimiento, en lugar de echar mano de conocimientos y técnicas como punto de partida; se sustituye el predominio de la memoria por el del razonamiento; la instrucción es vista como un instrumento y no como un fin en sí misma y, además, el ambiente artificioso en la enseñanza se reemplaza por un ambiente natural.

El *pragmatismo*, base de la filosofía de Dewey, concede la mayor importancia a la acción, considerada como fuente para el conocimiento y éste a su vez como instrumento que ha de dirigir aquélla. Las actividades escolares han de tener un paralelismo con las situaciones sociales:

> Los métodos que son permanentemente eficaces en educación formal [...] retroceden al tipo de situación que suscita la actividad reflexiva fuera de la escuela en la vida ordinaria. Ofrecen a los discípulos algo que hacer, no algo que aprender, y el hacer es de tal naturaleza que exige el pensamiento o la observación intencional de las conexiones; el aprendizaje resulta aquí naturalmente[55].

Junto al papel de la acción en el aprendizaje, no es menos importante el segundo principio, que hace referencia a la *responsabilidad social de la escuela* y al fin social que ha de perseguir la formación. Un programa educativo tal «debe presentar situaciones en las que los problemas dependan del problema de la vida en común y en las que la observación y la información estén calculadas para desenvolver la visión y el interés social»[56]. Este sentido social que el método pretende dar a la escuela, además de guiar la elección de los temas de los proyectos, se logrará mediante el trabajo en equipo.

Para atender a los dos principios teóricos señalados, estas actividades deben cumplir dos propiedades, resultar problemáticas y desenvolverse en su ambiente natural. Pero esto es precisamente lo que caracteriza a los proyectos.

7.1.3. Críticas realizadas al Método de Proyectos

Como método renovador, y alternativa a metodologías tradicionales, individualistas y basadas en la repetición y en la memorización como principales

[55]Dewey, John. En: Bayón y Ledesma, *El método de proyectos*, op. cit., pp. 28-29.
[56]Dewey, John. En: Ibídem, p. 25.

signos de identidad, los proyectos son objeto de escritos, como los citados, que destacan sus ventajas y aportaciones. Pero no podemos ignorar el hecho frecuente de que las evaluaciones de las innovaciones «por lo general se realizan por el entusiasmo de los pioneros militantes. La necesidad de convencer hace que se deje a un lado la importancia de un análisis riguroso del funcionamiento de la innovación y de sus efectos»[57]. No obstante, surgieron otras voces que intentaban poner de manifiesto las carencias de este sistema o simplemente algunos de los problemas que presentaba su puesta en práctica. El propio Fernando Sáinz, una persona comprometida con el método, recoge en su libro algunas de las críticas e intenta contestarlas[58].

En primer lugar, hay quienes atribuyen a la organización por proyectos falta de sistematización y rigor lógico, en el sentido de que la falta de organización clásica de la enseñanza por materias puede ocasionar que se dejen sin estudiar conocimientos considerados indispensables, en favor de otros que ocasionalmente hayan ido surgiendo. A esto responde Sáinz aduciendo que el rigor lógico, más que un punto de partida, es un fin al que aspirar. Destaca la función del maestro para completar unos proyectos con otros y así tratar los conocimientos que considere indispensables en cada una de las materias.

Sin embargo, Stevenson sí observa una cierta carencia cuando el programa de una materia se ha organizado íntegramente por proyectos, y sugiere completarlo con una organización sistemática, ya que «el punto de vista sistemático o lógico daría al estudiante mayor capacidad para resolver nuevos problemas»[59]. E insiste: «primero, el proyecto se utiliza para aproximarse a todas las asignaturas, siguiendo luego un estudio sistematizado que comprenda el desarrollo de lo fundamental»[60]. La mención a la función del conocimiento adquirido en la resolución de problemas nuevos está ligada a una 'dialéctica de la institucionalización'. Efectivamente, la existencia de momentos de institucionalización en cada uno de los proyectos no garantiza que el

[57] Artigue, Michelle. «La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos». En: Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericano, 1995, pp. 97-140, cita en pp. 98-99.

[58] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., pp. 57-59.

[59] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., cita en p. 869.

[60] Ibídem, p. 370.

conjunto de ellos dé lugar a un saber organizado, si no se efectúan los gestos didácticos que lo garanticen.

Otra de las críticas que comenta Sáinz se refiere a la posibilidad de que el no diferenciar las materias en el programa lleve a que éstas se entremezclen de manera más bien caótica. Este autor rechaza que ésta sea la única opción ante la enseñanza en las que las materias son compartimentos estancos y frente a estas posturas extremas adopta una intermedia:

> Que el maestro al explicar historia diga muchas cosas de geografía o de ciencias no quiere decir que esas cosas que él relaciona con gran oportunidad hayan de estar colocadas paralelamente en el programa. Lo que precisamente no se concibe es que se den lecciones exclusivas de una materia, ni que, a su vez, lo que el maestro toca ocasionalmente tenga que haber sido previsto en algún programa[61].

Ante la objeción de que los proyectos alteran la organización temporal de la enseñanza, e impiden desarrollar una planificación estructurada por horarios y materias, la respuesta consiste en recordar que la reforma ha de implantarla el maestro según su criterio y en la medida que vea conveniente o necesario, ya que el maestro tiene la opción de inventar un proyecto y decidir cómo va a llevarse a cabo, para la cuestión que le interesa tratar. Por otra parte, aquellas cuestiones que por las características del método no queden suficientemente fijadas, pueden tratarse en otro momento con más profundidad o volverse sobre ellas quizá en otros proyectos, aunque se hayan anticipado antes. Relacionada con esta crítica, también se hace eco de las objeciones a los proyectos demasiado extensos, que hacen perder de vista el problema inicial. Ante el peligro de desviarse demasiado de la cuestión inicial, propone retomar el problema si es necesario y, sobre todo, aceptar que el trabajo que pueda desarrollarse de manera imprevista quizá interese por la actividad que contribuya a desarrollar.

Otros autores, desde la práctica en la escuela, pusieron de manifiesto algunas dificultades y limitaciones del método, y efectuaron críticas que, en algunos casos, matizaban las opiniones de quienes pueden considerarse 'expertos'. Es el caso de David Bayón y Ángel Ledesma, ya citados.

[61] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 58.

A veces son aclaraciones a algunas posibles interpretaciones sobre qué ha de ser o cómo ha de elegirse un proyecto o sobre la utilización del método. En este sentido, el propio Sáinz reconoce que respetar absolutamente la actividad espontánea del niño impediría a la escuela cumplir su misión:

> Unas cosas porque nunca habrá forma de hacerlas agradables; otras porque corresponden a un mundo de intereses que el niño, ni el adulto abandonado a sí mismo, llegarían a descubrir; otras porque llevan aparejados el sacrificio, el renunciamiento, a que tanto se resiste la rudimentaria sensibilidad del analfabeto[62].

Sugiere motivar aquello que espontáneamente no agrade haciendo sentir la necesidad, la utilidad, la conveniencia, incluso como herramienta, y sugerir las cuestiones que de manera natural no hayan de surgir.

Precisamente, el excesivo énfasis en la espontaneidad en el método de proyectos, que llega a identificar ingenuamente la escuela con la vida fuera de ella, es lo que se critica a veces, considerándolo una «verdad a medias», ya que se considera que la actividad de la escuela debe ser intencional, y por ello cuando se pretende organizar toda la actividad mediante proyectos, es precisamente cuando el método se aleja de su propósito, y aparece la que David Bayón considera una limitación fundamental, ya que «es un recurso de enseñanza excelente, eficaz, pero lento»[63], y por ello debe combinarse con otros métodos o tipos de tareas «que abrevien el tiempo de adquisición de una información que la comunidad civilizada exige de todos sus miembros»[64]. Apela al tiempo que la humanidad ha tardado en construir saberes que en toda una vida no se construirían de manera espontánea, sin un aprendizaje especial, y recuerda que «la *técnica* de la educación tiene que ofrecer expedientes de abreviación, medios de acortar el camino que la comunidad sigue en la incorporación natural de los individuos a su cultura»[65]. Los niños deben aprender de manera natural, sí, pero recuerda que hay informaciones, principios y técnicas que están alejados de los intereses y de la vida de los niños.

[62]Ibídem, p. 28.
[63]Bayón y Ledesma, *El método de proyectos*, op. cit., p. 80.
[64]Ibídem, p. 37.
[65]Ibídem, pp. 37-38. La cursiva es nuestra.

En el fondo lo que está en juego es la concepción de la escuela y la función de la escuela en la sociedad:

> Nosotros creemos que cuando se dice que la escuela ha de ser un reflejo de la vida se expresa solamente una verdad a medias. [...] La escuela comenzará siendo una imagen de la vida; mejor dicho, la vida misma; pero una vida con aspiraciones a ser mejor que la que nos rodea; ha de ser un constante esfuerzo por mejorar el tono de nuestra existencia. Si no fuese así, no merecería llamarse escuela[66].

Se considera que la escuela debe plantear objetivos superiores a los que supone la vida ordinaria fuera de ella.

También se critica la pretensión de algunos de que toda la enseñanza se organice alrededor de proyectos, pues es precisamente entonces cuando quienes más incitan a emplear este método, lo desvirtúan, actuando en contra de lo que se considera su principal característica: el interés del niño. En este sentido, Bayón critica precisamente las obras *El Método de proyectos en las escuelas rurales*, de Fernando Sáinz, y *El método de Proyectos en las escuelas urbanas*, de Margarita Comas; pues aunque ve acierto en la elección de los temas, los ejemplos de proyectos que describen, sobre todo el segundo de estos libros, incluyen contenidos que se alejan bastante del asunto central o de la cuestión inicial que motivaba el proyecto y, por ello, pone en tela de juicio que los niños siquiera vislumbren el interés que provoca el estudio de dichas cuestiones, que el maestro se empeña en incluir, para que los proyectos puestos en práctica puedan abarcar todo el programa del plan de estudios. Considera que estos proyectos realmente no son tales, sino más bien *centros de interés* «en los que nos encontramos autorizados para incluir lo divino y lo humano y algo más que se presente»[67]. Proponen diferenciar lo que sería estrictamente el proyecto y sus fundamentos científicos, de los estudios relacionados que se articulan en torno a un proyecto y que de confundirse con él, el artificio con el que se habrían de añadir haría que su tratamiento no se apartara tanto de la enseñanza tradicional.

Finalmente, hay algo en lo que coinciden los principales entusiastas del método y las personas que, aun reconociendo sus ventajas, cuestionan sobre

[66] Bayón y Ledesma, *El método de proyectos*, op. cit., pp. 75-76.
[67] Ibídem, p. 96.

todo la manera en la que se interpretan los principios, así como algunas realizaciones. Se trata de la necesidad de verdaderos ensayos, teniendo en cuenta las condiciones 'ecológicas' que acompañan a su puesta en práctica, en el caso de una institución concreta, la escuela primaria española de la época.

La propia Margarita Comas reconoce la inadecuación de los proyectos realizados en Estados Unidos a las condiciones de nuestro país: falta de graduación del alumnado; alto número de alumnos a cargo de un mismo maestro; escuelas separadas por sexos, sin coeducación; y también la falta de medios, en particular de 'média'[68], en los que los alumnos puedan investigar de manera autónoma para ir construyendo respuestas a la cuestión planteada y a las que pueden surgir en el proceso de investigación. Por otra parte admite que los proyectos susceptibles de realizarse en escuelas rurales no lo han de ser en otras urbanas y viceversa; si éstas suelen carecer de patio o de espacios en el entorno de la escuela en los que experimentar, aquéllas no disponen de bibliotecas, museos o ciertas empresas o comercios en los que recabar información. David Bayón y Ángel Ledesma insisten justamente en la necesidad de ensayos, pero que tengan en cuenta las condiciones de las escuelas españolas, como la falta de taller para las realizaciones del proyecto o la carencia de medios de información. Incluso la dificultad de readaptar la colocación del mobiliario escolar para que facilite el trabajo en grupo. También señalan otras dificultades, derivadas del modelo pedagógico usual, como el hecho de que los niños no estén habituados a trabajar en equipo.

Demandaban mayor cantidad de experiencias o realizaciones con ejemplos adaptados a las escuelas de nuestro país, que ofrecieran información más realista a los maestros sobre cómo poner en práctica esta nueva metodología, ya que la mayoría de la información proviene de la traducción de obras extranjeras. Ejemplos que pusieran de manifiesto las ventajas del método y sus limitaciones, derivadas éstas del propio método pero también de las restricciones institucionales, en este caso de las escuelas españolas. Es lo que pretende, por ejemplo, Martí Alpera con su libro, también de 1934, en el que no hay en sus páginas «ni información inédita de experiencias pedagógicas

[68]Sobre los 'média', ver p. 389.

realizadas en tierras remotas, ni crítica implacable y enfática de teorías que otros elaboraron»[69].

Lamentablemente, tras un breve periodo republicano en el que se hacen verdaderos esfuerzos por experimentar y difundir entre los maestros y, sobre todo, entre los alumnos normalistas, las metodologías renovadoras, en particular las relacionadas con las ideas de la Escuela Nueva, la Guerra Civil y el franquismo provocaron la interrupción brusca de todo proceso renovador en la enseñanza. Tras la época de máxima difusión e implantación del método (como toda propuesta innovadora, siempre en ambientes de renovación, con aquellos maestros que sentían ciertas inquietudes por cambiar la escuela), no hubo ocasión de hacer un análisis con cierta perspectiva ni se desarrollaron otros indicadores para su evaluación.

7.1.4. El Método de Proyectos y las matemáticas. Análisis didáctico

Nos preguntamos ahora por las aportaciones y las limitaciones del método de proyectos en relación con el aprendizaje de las matemáticas. Para ello, tendremos en cuenta las características del método y los planteamientos teóricos descritos, en particular los elementos de la ideología pedagógica de referencia, junto con el modelo epistemológico de las matemáticas que se desprende de los ejemplos recogidos en las obras publicadas. En particular, el análisis didáctico informará sobre la relación entre el estudio de la matemática que posibilitaba o inducía el método y la 'ecología' y 'economía' de la epistemología dominante[70].

Para estudiar la ecología del método de proyectos como propuesta didáctica, consideraremos las restricciones que existen en los primeros niveles de codeterminación matemático-didáctica (figura 1.1, p. 17), es decir, en los niveles de *Sociedad* y *Escuela* las que resultan de la pedagogía dominante en las instituciones relacionadas con la enseñanza primaria, en particular la forma concreta y generalizada en que se interpreta el *aprender y enseñar matemá-*

[69] Martí Alpera, Félix: *Ensayos del método de proyectos*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1934, p. 5.

[70] Sobre el análisis ecológico, ver p. 16 y sig.

ticas, y las derivadas del propio modelo epistemológico de las matemáticas que prevalecía en dichas instituciones. Este análisis permitirá, por un lado, comprender mejor las aportaciones del método de proyectos a la enseñanza y, por otro, determinar las causas de las dificultades u obstáculos que pueden observarse en relación con las matemáticas, algunos de los cuales ya habían percibido las personas que defienden y difunden el método.

Como ya hemos comentado en un apartado anterior, los impulsores del método de proyectos, señalan algunas de las características de la que había sido la pedagogía dominante en la práctica escolar hasta aquel momento, en particular la memorización y el verbalismo, con una enseñanza individualista basada principalmente en el libro de texto. Frente a esta situación, el método de proyectos parte de unas nuevas ideas pedagógicas, relacionadas con la *Escuela Nueva*, como la consideración de que el niño es el centro de la escuela, ideas nuevas solamente en cuanto a su aplicación en las aulas; el propósito de este nuevo *dispositivo didáctico*[71], con sus correspondientes *gestos del estudio*, es precisamente conseguir que los alumnos realicen aprendizajes más funcionales, teniendo en cuenta los condicionantes del sistema de enseñanza en las escuelas.

7.1.4.1. Restricciones que ayuda a superar el Método de Proyectos

En primer lugar, frente al estudio de contenidos cuya razón de ser el alumno no conoce, que no responden a cuestiones que interesen a los niños, lo que Chevallard denomina pedagogía *monumentalista*[72], que presenta los saberes como monumentos acabados que se 'visitan', sin que haya necesidad de motivar su estudio, ni de conocer su razón de ser, los proyectos han de interesar a los niños, a veces incluso surgen –o los propone el maestro– a partir de situaciones 'reales'. Las disciplinas no se estudian ya de forma totalmente separada e independientes unas de las otras, –salvo para aplicar algún principio aprendido previamente– sino que aparecen relacionadas a través de

[71] Sobre las técnicas didácticas como dispositivos y gestos, ver p. 362.

[72] Chevallard, Yves: «Steps towards a new epistemology in mathematics education». En: *IV Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 4. Sant Feliu de Guíxols, 2005.

problemas que, al tener su origen en la vida misma, no se plantean ni se circunscriben al ámbito de una única disciplina.

Cuando los contenidos de la enseñanza están fijados de antemano, el profesor puede proporcionar las respuestas definitivas, y las posibles respuestas provisionales de los alumnos normalmente no son relevantes para el proceso de estudio. En cambio, en el método de proyectos los estudiantes buscan por sí mismos información, incluso deciden qué información necesitan, discuten entre ellos sobre si es relevante o apropiada, ponen en común los resultados que van obteniendo, comparten y a la vez contrastan sus datos, sus hallazgos, sus opiniones, sin que el profesor sea el que imponga las respuestas a las cuestiones planteadas, como las únicas válidas o pertinentes:

> El proyecto en la escuela no echa mano del saber, ni de la técnica para obtener el producto, sino a la inversa, la escuela finge un proyecto para proporcionar el saber y la experiencia juntamente con otros resultados que más tarde analizaremos. El profesional o el científico idea un proyecto porque sabe; a los niños se les va a sugerir proyectos para que sepan[73].

Por otra parte, las fuentes de documentación en el método de proyectos no quedan restringidas a un único libro de texto, sino que se amplían con otros 'media', tales como prensa, bibliotecas y en general libros de consulta, entrevistas a profesionales o a expertos, etc.

Además, de una concepción individualista de la enseñanza, se pasa en el método de proyectos a un proceso de estudio colectivo, en el que la clase trabaja como una verdadera 'comunidad de estudio', en el sentido de la TAD, donde la construcción de los conocimientos se hace mediante la interacción de los niños en equipos y la de éstos entre sí, bajo la dirección o la vigilancia del maestro. Está en la mente de los creadores y difusores del método el desarrollo de una dialéctica individuo-grupo, como se observa en algunas realizaciones del método, normalmente ejemplos de ciencias experimentales o sociales.

[73] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 33.

7.1.4.2. Limitaciones del Método de Proyectos en relación con la Matemática

Podemos decir, según lo anterior, que el método de proyectos propicia un cambio en la pedagogía dominante en aquel momento. No obstante, a las preguntas de si existe un *cuestionamiento pedagógico* suficientemente ligado a los contenidos (en particular matemáticos) concretos, o si se consideran las características de cada disciplina escolar a la hora de llevar a cabo un proyecto y cómo se hace esto, la respuesta no puede ser del todo afirmativa, al menos en el caso de la matemática. De hecho, parece haber un nuevo modelo pedagógico de referencia en el que los creadores o difusores del método se inspiran, para superar las restricciones que presentaba el modelo pedagógico anterior [la enseñanza tradicional], pero no observamos de la misma forma un cambio en la forma de interpretar las matemáticas, que indique una evolución hacia un nuevo Modelo Epistemológico de Referencia de las Matemáticas. Sin embargo, ambos constituyen dos componentes esenciales de la ecología escolar[74]. Es más, una de las características de la pedagogía que inspira el método de proyectos es que se trata de un modelo pedagógico denominado 'generalista', que considera el proceso de enseñanza y aprendizaje como algo independiente, o casi, de los contenidos de la enseñanza. Mientras que lo primero se considera un problema para el que se ha de buscar una solución o una respuesta –en este caso la respuesta es el método de proyectos–, lo segundo se considera 'transparente', en el sentido de no problemático[75].

De hecho, Margarita Comas recomienda comenzar por implantar el método en las ciencias experimentales, «que por no considerar el público en general obligatoria su enseñanza y no exigirse por lo tanto, un contenido determinado, ofrecen al maestro la mayor libertad»[76], y solo después introducir otras disciplinas. Esta observación la recoge y hace suya Pedro Chico[77].

[74] Ruiz Munzón, Noemí: *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2010, p. 353.

[75] Barquero, Berta: *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2009, cap. 5.

[76] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 14.

[77] Chico Rello, Pedro: *Metodología de la Geografía*. Reus, Madrid, 1934. Cita en p. 675.

7.1.4.3. La presencia de la Matemática en los proyectos.

Los defensores de los proyectos reconocen una cierta especificidad a las materias instrumentales –lectura, escritura y cálculo–, pero no ven imprescindible hacer proyectos para trabajarlas, porque están presentes en todos los que se hagan:

> y como el lenguaje (lectura y escritura), lo mismo que la aritmética, entran en todo, [...] resulta que serán ya cuatro las materias del programa en que intervengan los proyectos, aunque no se haga por el momento ninguno especial para cálculo o gramática[78].

Otras veces destacan la necesidad de dedicar momentos específicos al aprendizaje de estos saberes, fuera de los proyectos: «en la posición moderada por que nosotros abogamos, el maestro tendrá que haber dado previamente conocimientos básicos de todas las materias elementales, pues de lo contrario un proyecto complejo duraría toda la vida»[79].

En relación con las matemáticas, parece, por los ejemplos que se describen, que cuando se precisan conocimientos o técnicas que no se poseen previamente, se enseñan en ese momento, bien haciendo una parada en el desarrollo del proyecto, desplegando lo que Margarita Comas llamaba 'proyectos concomitantes' o 'proyectos parciales incluidos' (Bayón criticaba estos estudios auxiliares cuando su extensión hacía desviarse del proyecto principal), bien proporcionando el maestro la técnica o la herramienta matemática necesaria. Por ejemplo, cuando se propone calcular la capacidad del pilón de una fuente para construir una alberca[80]:

> Después les dicto el siguiente trabajo:
>
> «Calculad los litros de agua que caben en las albercas que tenéis en la huerta. Tienen forma de paralelepípedo. Vosotros tomaréis las dimensiones. Tenéis que medir lo largo, lo ancho y lo profundo»[81].

[78] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 14.
[79] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 37.
[80] Bayón y Ledesma, *El método de proyectos*, op. cit., pp. 64-68.
[81] Ibídem, pp. 54.

> He puesto en el encerado estas fórmulas para ayudarles[82] [fórmulas para calcular la longitud de la circunferencia, el área del circulo y el volumen del cilindro].

En el proyecto consistente en construir bolas de madera para la fundición que había de fabricarlas en hierro, que comenta Fernando Sáinz, «la clase de geometría *dijo cómo* habrían de hallar el volumen de las esferas»[83].

No hay indicios de que esto se haga por un método que se diferencie mucho del tradicional, pero en este caso la validación podría hacerse incluso con lo que se llama un 'argumento de autoridad'[84]. Un aspecto positivo es la aplicación a la situación concreta, que en algunos casos se limitaría a una comprobación de que la técnica funciona. Por otra parte, ejemplos como el que cita Margarita Comas, de estudiar cómo dividir la circunferencia en partes iguales, aprovechando que se necesitaba para construir el disco de Newton[85], y las «nociones relacionadas», parecen insertados de una manera forzada, cuando menos.

Un ejemplo de introducción anecdótica de las matemáticas la hallamos en el proyecto titulado «Estudio monográfico de los insectos», que recoge Martí Alpera. Tras todo un plan de trabajo en el que se estudian diferentes características morfológicas y fisiológicas de los insectos, los hábitos, el hábitat, las relaciones con otros animales y con el hombre, etc., comienza un estudio de los dípteros, primero la mosca y después el mosquito. Pues bien, a punto de acabar lo relativo al proyecto, aparece, sin más, este problema[86]:

---

[82] Ibídem, pp. 67.

[83] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 46. La cursiva es nuestra.

[84] Cabassut, Richard: *Démonstrations, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et an Allemagne*. Tesis doctoral, Université Paris 7, París, 2005. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009716`. Consultado el 10-10-2015.

[85] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 76. Se trata de un disco dividido en partes iguales y pintada cada una con un color del arco iris, para ver la descomposición de la luz blanca al hacerla girar rápidamente.

[86] Martí Alpera, *Ensayos de...*, op. cit., p. 76. Hay un error en esta operación. El resultado es 12 000 huevos.

Problema.

Si tres moscas ponen 900 huevos en dos días, ¿cuántos huevos pondrán diez moscas en ocho días?

Solución.

Si 3 moscas 2 días 900 huevos.
10 » 8 » x »

$$\begin{matrix} 3 : 10 \\ 2 : 8 \end{matrix} :: 900 : x$$

$$3 \times 2 : 10 \times 8 :: 900 : x$$
$$6 : 80 :: 900 : x$$

$$x = \frac{900 \times 80}{6} = 16.000$$

Resultado: Pondrán 16.000 huevos.

Ello a pesar de que el autor de la obra recuerda, y asume, que el proyecto es un problema que ha de desenvolverse «en su orden natural» y destaca la importancia de que el niño pueda ver el paralelismo entre la enseñanza y su propia vida fuera de la escuela. Presenta los ejemplos del método de proyectos como una técnica didáctica innovadora, y podemos considerarlo así en todos los ejemplos que hay en su libro en cuanto a las ciencias naturales y las ciencias sociales, sobre todo, pero cuando nos fijamos en las matemáticas el problema que propone es un ejemplo típico justamente de todo lo contrario.

No obstante, es justo tener en cuenta que Martí Alpera formaba parte de esos 'intermediarios'[87] entre la 'alta pedagogía' y la pedagogía como arte profesional. Él no describe la planificación de un proyecto ideado para llevar al aula, sino un ejemplo de proyecto realizado realmente pero, sobre todo, realizado probablemente en el marco del desarrollo de las clases de todo un curso académico. Los ejemplos mencionados en este capítulo corresponden a personas que, como Margarita Comas, intentan proporcionar ejemplos de proyectos para trabajar ciertos contenidos, mientras que la maestra cuya actuación describe Martí Alpera ha de ocuparse de la enseñanza de los contenidos matemáticos que considera relevantes o imprescindibles para sus alumnos, incluidos en un proyecto si esa es la metodología –innovadora– que están poniendo en práctica. Ello la lleva a 'encajar' un problema de pro-

[87] Ver p. 152, del apartado 2.7.

porcionalidad en alguno de los proyectos llevados a cabo durante el curso, probablemente el que se estuviera desarrollando cuando los niños estaban en condiciones de abordar este objeto matemático, o era coherente ocuparse de él, según la secuencia de conocimientos matemáticos estudiados hasta entonces. Quizá la necesidad de desenvolverse en el 'mundo real' –algo que no era igual para los introductores del método, profesores de escuela Normal e inspectores– la indujese a forzar la planificación del proyecto[88].

Ejemplos como este no hacen sino poner de manifiesto la falta general de reflexión respecto a la manera de trabajar las matemáticas por proyectos.

En cambio Eyaralar, menos entusiasta respecto a las bondades del método de proyectos para aprender matemáticas, califica de problema 'impropio', en general, el siguiente: «Un montón de tierra tiene 4 m. de diámetro y 2 m. de altura; hallar su volumen»[89], aduciendo que los datos reales –los que se podrían medir en la realidad– son la generatriz y la inclinación de las tierras.

7.1.4.4. La secuenciación de los conocimientos matemáticos

Otro de los rasgos de los proyectos, al parecer derivados de una pedagogía de tipo generalista, como la que parece inspirarlos, es que no es una cuestión primordial la manera de seriar los conocimientos[90]; no se suele tener en cuenta que existen ciertas restricciones a la hora de organizar el estudio de la matemática, derivadas de la propia naturaleza de esta ciencia, en la que unos conocimientos precisan haber estudiado antes otros principios o técnicas. Así se reconoce en algunas ocasiones:

> Ocurre en la vida que las lecciones de Geometría y Dibujo geométrico que proporcionamos en la escuela no llegan a tener ningún valor, porque las enseñamos desarticuladas y sin enlazarlas con una labor en

[88] En su obra *Metodología de la Aritmética y la Geometría*, Margarita Comas propone un proyecto de geometría para los primeros ciclos, pero cambia de metodología para el tercer ciclo, probablemente debido a los contenidos matemáticos involucrados (ver p. 261). Comas Camps, Margarita: *Metodología de la Aritmética y la Geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1932.

[89] Eyaralar Almazán, José María: *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría. Normas para su planteo y resolución*. Sardá, Guadalajara, 1936. Cita en p. 121.

[90] Sáinz, *El método de Proyectos*, op. cit., p. 56.

> donde tengan su aplicación o su sentido. En este proyecto de construcción de cabañas se nos presentaba ocasión de vernos ante la necesidad de tener que hacer un estudio de cuestiones importantes de Geometría; *pero nos faltan instrumentos de trabajo*, y para hacer una labor a estilo pastor no precisan para nada la Geometría, ni aun siquiera la escuela[91].

La 'espontaneidad' con la que van apareciendo los contenidos, en particular matemáticos, determinados por el asunto que motiva el proyecto, habitualmente extramatemático, aun si se pone cuidado al planificar para que vaya apareciendo todo aquello que se considere relevante para la formación de los alumnos, no garantiza un proceso de estudio que permita construir dichos contenidos o, en todo caso, no de una manera muy distinta a la tradicional. Lo más cercano a un 'análisis a priori' de un proyecto, que incluya un análisis por parte del maestro de los prerrequisitos o conocimientos previos que ha de poseer el alumno, necesarios para abordar el problema o la tarea que se pretende proponer, es el análisis de la «experiencia previa del alumno que cabe aprovechar», que aparece en el esquema que asume Margarita Comas, y que concuerda, otra vez, con los requisitos didácticos para las ciencias experimentales, pero que es claramente insuficiente si se trata de una disciplina como la matemática, en la que la distancia entre los conocimientos objeto de estudio y los conocimientos 'a priori' de los alumnos es un asunto crucial.

Stevenson no ve incluso inconveniente en que durante el desarrollo de un cierto proyecto se ponga de manifiesto la insuficiencia o la carencia de lo que él denomina hábitos y prácticas –que suelen ser técnicas o procedimientos– para llevar adelante el trabajo. En este caso, lo que propone es realizar en ese momento un proyecto específico para adquirir las técnicas necesarias, que considera que no pueden olvidarse en los proyectos[92]. Sin embargo los ejemplos que describe son: uno la necesidad de ecuaciones algebraicas por parte de alumnos que hacía dos años que no las estudiaban, y otro la falta de fluidez en la ejecución de sumas. En ambos casos considera que la inserción, cuando esto se detecta, de otro proyecto que permita a los alumnos ejercitarse en la técnica necesaria resuelve el problema. Lo que ocurre es que en los ejemplos

[91] Bayón y Ledesma, *El método de proyectos*, op. cit., p. 71. La cursiva es nuestra.
[92] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, pp. 232-240.

que considera, se requiere tan solo que los alumnos revisen y automaticen procedimientos conocidos, no que aprendan una nueva técnica o un nuevo conocimiento, lo cual hubiese podido requerir, como mínimo, un proyecto de tanta o más envergadura que el original.

7.1.4.5. La función de los conocimientos matemáticos

Los defensores del método de proyectos promueven la puesta en marcha de un dispositivo al que se le asigna la capacidad de cumplir ciertas funciones. Pero no nos ha llegado un análisis que permita determinar si todas las funciones atribuidas al método de proyectos se asocian a todos los tipos de proyectos, ni hay referencias a la función de este dispositivo en el caso concreto de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En definitiva, el estudio de los cambios que tal dispositivo puede provocar en la actividad matemática de los alumnos no parece estar siquiera en la mente de quienes impulsaron el método.

Así, el trabajo por proyectos lleva asociados gestos didácticos por parte del profesor, como el de hacer a los alumnos trabajar en grupo. Pero, ¿se hace un verdadero análisis didáctico acerca de esta modalidad de trabajo de los alumnos en relación con la matemática? Hay dos tipos de variables que determinan las elecciones del enseñante a la hora de proyectar el trabajo autónomo de sus alumnos: por una parte las que tienen que ver con los contenidos seleccionados; por otra, las referidas al desarrollo o la gestión del proceso de enseñanza[93]. Ciertas formas de organizar el trabajo de los alumnos se adaptan mejor que otras a según qué tipo de problemas. Y aunque se diferencian proyectos de tipo intelectual (a los que se les atribuye una función más ligada a la adquisición de principios) y proyectos manuales (destinados a la aplicación de principios ya conocidos o a la adquisición de técnicas), no hallamos para las matemáticas proyectos que garanticen estas dos funciones. Para lo primero, además de una adecuada gestión por parte del profesor del trabajo en pequeños grupos o en gran grupo, sería esencial ante todo elegir y confrontar a los alumnos con un problema 'adecuado', que permitiese no solo

[93] Robert, Aline; Penninckx, Jacqueline y Lattuati, Marie: *Une camera au fond de la classe de mathématiques*. Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon, 2012, cap. 3.

dar sentido a una nueva noción matemática, sino también ir construyendo respuestas, en principio parciales y provisionales, que llevaran finalmente a la génesis o introducción de dicha noción; hay que tener en cuenta el carácter jerárquico del conocimiento matemático. Pero en las propuestas de análisis previo por parte del profesor no está contemplada esta necesidad.

El problema no es el hecho de que las matemáticas aparezcan principalmente en los proyectos como auxiliares para otras ciencias, sino más bien la observación de ciertos rasgos de la epistemología subyacente, que coinciden con algunos de los atributos pertenecientes a lo que se ha llamado 'aplicacionismo'[94]; concretamente una separación entre las ciencias sociales o experimentales y las matemáticas, que se supone que tienen la función de proporcionar a aquéllas una herramienta cuantificadora para el estudio de los fenómenos sociales o científicos. Desde esta concepción de las matemáticas y de su enseñanza no se puede lograr una evolución de los modelos matemáticos que se estudian, ya que no se cuestiona su adecuación para el estudio de un cierto fenómeno –no se usan y se comparan varios modelos matemáticos, por ejemplo una representación gráfica u otra, o el uso de unos u otros indicadores estadísticos para obtener cierta información– viendo el campo de aplicación y a la vez sus limitaciones, ni se generan nuevos modelos matemáticos modificando los ya existentes. Ya hemos comentado que, en algunos casos, el trabajo matemático aparece separado del proyecto principal constituyendo por sí un proyecto complementario y, con frecuencia, prescindible.

Así pues, este método favorece una matemática con predominio de las aplicaciones, frente a la elaboración de los conocimientos matemáticos. En el caso de las técnicas aritméticas, por ejemplo, los proyectos conllevan la realización de cálculos de costes, ganancias, razones, porcentajes, etc., pero no hemos hallado ninguno que incluya entre sus objetivos la elaboración de esas técnicas y aún menos su justificación:

> *Cuando el proyecto vaya perdiendo interés* puede darse por terminado, invitando a las otras secciones, a los padres, amigos, etc., para que vayan a verlo. El reparto de invitaciones y preparación de los últimos detalles *dará motivo para ejercicios de aritmética* (cálculo de las

[94] Barquero, *Ecología de la...*, op. cit., cap. 5.

> tarjetas necesarias según las que pida cada niño, contar las que se vayan haciendo, amontonarlas por decenas, ver cuántas salen por hoja de papel y deducir las hojas que serán precisas, etc.), de lengua...[95]

Los proyectos pueden 'motivar' los conocimientos matemáticos, pero no están pensados para acceder a ellos, solo para proporcionarles un contexto que les dé una 'razón de ser'. Es un ejemplo de cómo los dispositivos de ayuda al estudio –en este caso el método de proyectos– van íntimamente ligados a los objetos mismos del estudio[96], las cuestiones de 'aplicación' de las nociones matemáticas ya introducidas.

El predominio del carácter instrumental sobre el formativo afecta al estatus que pueden tener las nociones matemáticas estudiadas, en el sentido de que se privilegia la función de los objetos matemáticos como 'herramientas' (instrumento para resolver un problema), frente a la consideración como 'objetos' de estudio, que se sitúan en la construcción de un saber organizado[97].

Estas carencias del Método fueron señaladas por José María Eyaralar quien, aunque propone en algún momento la «confección de *proyectos* de tipo matemático en que pueda intervenir la clase colectivamente»[98], duda de las supuestas bondades del método de proyectos cuando se pretende enseñar la aritmética exclusivamente por él:

> Puede ser considerado como una parte importante de la enseñanza, incluso como la base de la misma, lo que no puede hacer es sustituir a la enseñanza metódica del cálculo [...] no a la parte sistemática de nuestra ciencia que le da la mayor parte de su valor educativo, a no ser que entre los *proyectos* entre el de dominar el cálculo o el de sistematizar los conocimientos[99].

Este autor, en otra de sus obras, propone ejemplos de proyectos, en el

[95] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 28. La cursiva es nuestra.

[96] Chevallard, Yves: «Organiser l'etude: 1. Structures & Fonctions». En: *XIe école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3–32. La Pensée sauvage, Grenoble, 2001.

[97] Douady, Regine: «Jeux de cadres et dialectique outil-objet». *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 1986, **7(2)**, pp. 5–31.

[98] Eyaralar Almazán, José María: *Metodología de la Matemática*. Reus, Madrid, 1933, p. 143.

[99] Ibídem, p. 256.

ámbito de la matemática, que comparten algunas de las características del método:

> En relación con el denominado método de proyectos, es recomendable proponer una serie de problemas que versen sobre el mismo asunto: el que sea base del proyecto; problemas que pueden ser de dificultades muy distintas, y que forzosamente han de serlo cuando en el Proyecto actúen varios grados. Lo interesante son, en este caso, los datos que se proporcionan y las relaciones entre ellos que se obtienen[100].

Después ofrece un ejemplo de 14 problemas relacionados con el trigo, bajo la denominación 'Problemas sobre un proyecto'[101]. Todos los problemas de esta colección están contextualizados, la mayoría en la España de la época, con datos reales geográficos, económicos, agrícolas..., y el último recoge un problema lúdico histórico. Otras veces el centro de interés es un objeto matemático, aunque sea materializado en un objeto del mundo físico (extramatemático):

> Cada figura de uso corriente puede constituir, por sí sola, un pequeño centro de interés, capaz de hacer trabajar, gustosamente a todo un grado y aun varios que colaborasen, repartiéndose los problemas de diferente dificultad, proporcionando un grato repaso de muchos conocimiento y llamando la atención del alumno sobre los múltiples aspectos que presenta un objeto al parecer insignificante[102].

Y a continuación propone como ejemplo 12 cuestiones que componen lo que llama 'Estudio geométrico de un vaso de agua'[103].

7.1.4.6. Cambios que introduce el Método de Proyectos en la actividad matemática

Se puede decir que los proyectos proporcionan un medio de aplicar la matemática previamente estudiada, o de ejemplificar algunas herramientas o técnicas matemáticas en contextos extramatemáticos que promuevan el interés intrínseco de los niños y permitan mostrar su utilidad. En este sentido,

[100] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 56.

[101] Tal como lo presenta, esta secuenciación de problemas se parece más a un centro de interés que a un proyecto.

[102] Ibídem, pp. 119-120.

[103] Ibídem, p. 120.

se puede señalar la consideración de las variables didácticas relativas a la gestión del trabajo autónomo de los alumnos: hay un cuestionamiento didáctico sobre la gestión de los grupos, aunque es siempre en general, sin que intervengan especialmente las matemáticas. Se trata por tanto de un cuestionamiento insuficiente, sin que la pregunta sobre el 'contrato didáctico'[104] o reparto de la responsabilidad matemática entre el profesor y los alumnos en el trabajo por proyectos, sea una cuestión central del análisis didáctico.

Para identificar los cambios que introduce realmente el método de proyectos en el proceso de estudio de las matemáticas, usaremos como modelo la noción de Recorrido de Estudio e Investigación, introducida por Chevallard[105] en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), no solo como modelo para idear, diseñar y describir procesos de estudio, sino también como referente para el análisis de éstos, tal como la utilizamos aquí. Un Recorrido de Estudio e Investigación parte de una cuestión crucial, llamada 'cuestión generatriz', susceptible de generar diversas organizaciones matemáticas con las que ir respondiendo a las preguntas que han motivado que se construyan estas organizaciones, y esto de una manera funcional, en la que el trabajo de modelización matemática está presente en todo el proceso.

Veamos qué cualidades de los Recorrido de Estudio e Investigación[106] comparten o no los proyectos:

---

[104] Brousseau, *Théorie des situations...*, op. cit. Capítulo 5: «Le contrat didactique: L'enseignant, l'élève et le milieu», pp. 299-327.

[105] Chevallard, Yves: «La place del mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire». En: *3e Université d'été Animath*, Saint-Flour, 2004.

Chevallard, *Steps towards...*, op. cit.

Chevallard, Yves: «La problèmatique anthropologique en didactique, de hier à demain». En: *Actas del I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Baeza (España), 2006.

Chevallard, Yves: «Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire». En: *Journées de didactique comparée*, Lyon, 2004. `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45`. Consultado el 10-10-2015.

[106] Barquero, *Ecología de la...*, op. cit., cap. 2.

Sierra Delgado, Tomás A.: *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid, 2006, cap. III.

- En ambos se estudian problemas genuinos, 'reales', del entorno de los alumnos y cercanos a su interés, lo que propicia una motivación intrínseca. Los problemas matemáticos tienen su origen en el mundo, no en la escuela.

- Sin embargo, en lo que se refiere a las matemáticas en los proyectos, no existe una verdadera 'cuestión generatriz' (o varias) en el sentido de los Recorrido de Estudio e Investigación; es decir, no se parte de una cuestión o problema tal que resolverlo suponga construir una organización matemática (que incluya tipos de problemas y técnicas que los resuelvan, que además deben poderse no solo explicar, sino justificar), ya que no están diseñados en general con el fin de hacer emerger nuevos saberes en el caso de las matemáticas; aunque sí podemos considerar que existe, en cierto modo, una cuestión con características parecidas para otras disciplinas, sobre todo aquellas que subyacen a la temática del proyecto.

- La enseñanza en el marco de un Recorrido de Estudio e Investigación ya no se concibe como un proceso que ha de organizarse de manera individual, sino que los conocimientos son generados en una 'comunidad de estudio'. Asimismo, en el método de proyectos la concepción individualista del estudio es superada por un diseño del proceso que contempla el trabajo individual, en equipo y en el grupo-clase.

- Una característica de los Recorrido de Estudio e Investigación es que el momento de la elaboración de una técnica –quizá no definitiva y no estandarizada–, lo que se denomina 'momento exploratorio', está orientado por la propia situación problemática, y aunque el profesor siga teniendo un papel de guía, no proporciona sin más la técnica definitiva. Algún rasgo parecido hallamos en el método de proyectos, al menos así se declara: «cada nuevo problema o experiencia en el proyecto lo conduce a cambiar sus procedimientos para encontrar y resolver la [sic] dificultades»[107]. Pero mientras que para otras disciplinas, el alumno busca las respuestas en numerosas fuentes de información y va

[107] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., cita en p. 235.

recopilando datos y elaborando argumentos en interacción con el grupo o la clase, en el caso de la matemática vemos en los ejemplos descritos en la bibliografía existente, cómo en general las cuestiones problemáticas que surgen durante el proyecto no bastan para generar las técnicas matemáticas necesarias para abordarlas, ni los elementos justificativos, y la fuente principal de información suele ser el maestro:

> De vuelta a clase dan cuenta los comisionados de los resultados obtenidos, y como parece que sería interesante averiguar además del número de coches de cada una de ellas la relación en que estos números están entre sí, preguntan al maestro la manera de hacerlo (si a ellos no se les ocurre procurará éste sugerírselo)[108].

No queda claro en los ejemplos cómo garantiza el método de proyectos la creación y el dominio de las técnicas matemáticas. Margarita Comas dice que el método de proyectos se implanta con más facilidad si se combina con «sistemas de enseñanza individual para el aprendizaje metódico de las técnicas escolares»[109]. Pero los ejemplos que pone (mientras ella atiende a los niños que trabajan en un proyecto, dejar a los demás aprendiendo técnicas, solos, con las tarjetas de lectura Mackinder o con abalorios para aprender a contar) no permiten la construcción de técnicas –de lectura o de cálculo– sino la práctica y la automatización, en todo caso. Además estas técnicas se trabajan precisamente 'fuera' del proyecto, por los niños que no están en él.

- Como consecuencia de lo anterior, el papel del maestro como director del proceso de estudio, mucho más claro en el caso de trabajar en proyectos de humanidades o de ciencias experimentales, no se mantiene igual cuando surgen cuestiones de matemáticas. Sobre todo cuando aparecen verdaderas cuestiones para las que la comunidad de estudio –en este caso quienes participan en el proyecto– no dispone de respuestas o de técnicas previas.

[108] Comas Camps, *El método de proyectos...*, op. cit., p. 35.
[109] Ibídem, p. 18.

- La estructura de los Recorrido de Estudio e Investigación es arborescente, ya que la cuestión inicial va derivando en otras, cuyas respuestas ayudan a construir la respuesta buscada. También en los proyectos van surgiendo numerosas cuestiones motivadas por el trabajo que se va desarrollando, pero no siempre son determinantes para construir una respuesta a la cuestión inicial; muchas veces constituyen cuestiones complementarias, que enriquecen el proyecto, pero podrían suprimirse.

- Esta relativa independencia de las cuestiones matemáticas que se estudian en los proyectos dificulta que pueda darse otro de los rasgos de los Recorrido de Estudio e Investigación, lograr que las organizaciones matemáticas que se vayan construyendo puedan integrarse en otras más complejas y generales. Esto supone reorganizar conocimientos antiguos integrando a la vez los nuevos.

- En un Recorrido de Estudio e Investigación ha de haber instrumentos de contraste y de validación de las respuestas, no solo al final, sino durante el proceso de estudio. Uno de los argumentos para defender el método de proyectos es que el conocimiento debe ir asociado a su función, para favorecer el razonamiento. Según Dewey el método está pensado para que el estudiante

  > planee soluciones de las que deba ser responsable y las desarrolle de una manera metódica. Y [...] para que tenga oportunidad y ocasión de probar sus ideas, aplicándolas de manera que se aclare su significado y descubriendo por sí mismo su validez[110].

  La dialéctica entre las cuestiones y las respuestas requiere disponer de los 'medios'[111] (en el sentido de la Teoría de las Situaciones Didácticas) convenientes, que permitan someter a prueba las respuestas aportadas. Sin embargo, observamos a veces que, para algunas cuestiones matemáticas, es el profesor el que proporciona las respuestas, en forma de

[110] *El Método de Proyectos... (La Escuela Moderna)*, op. cit., cita en p. 236.

[111] Fregona, Dilma y Orús Báguena, Pilar: *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas.* Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2011.

procedimientos o técnicas, como en los ejemplos descritos anteriormente, en los que el profesor aportaba la fórmula u organizaba una clase especial para ello, convirtiéndose así en el principal medio de validación, en contra de lo que propugnan los Recorrido de Estudio e Investigación.

Es cierto que el gesto didáctico del maestro de solicitar a los alumnos la elaboración de informes por parte de los equipos que trabajan en el proyecto se puede aprovechar para que se contrasten las respuestas y surja la necesidad de argumentar para defender las propias, cuando los equipos trabajan en las mismas cuestiones y luego ponen en común el trabajo realizado; aunque hay que decir que en los proyectos que se ofrecen como ejemplo, a menudo se distribuye el trabajo entre los grupos, y cada uno se encarga de una parte, lo que dificulta el contraste de las respuestas provisionales de cada grupo en la discusión colectiva.

- Por último, tanto los Recorrido de Estudio e Investigación como los proyectos sobrepasan el ámbito de la disciplina. Incluso los proyectos que se enmarcan en alguna disciplina, en particular la matemática, no se circunscriben a ella.

- Se considera asimismo que el conjunto de los Recorrido de Estudio e Investigación –lo mismo que los proyectos– a lo largo del año escolar debe abarcar el programa completo, aunque haya redundancias consideradas necesarias.

El análisis realizado permite caracterizar hasta cierto punto el proceso de estudio de las matemáticas en el marco del método de proyectos. Sin embargo, los Recorrido de Estudio e Investigación proporcionan un dispositivo para la construcción de organizaciones matemáticas –aunque esto incluya también la reorganización de conocimientos anteriores–, mientras que, como habíamos observado, la principal virtud de los proyectos, en lo que se refiere a esta disciplina, no era la de permitir elaborar conceptos o técnicas, algorítmicas o no, ni construir una organización matemática que suponga reorganizar y sistematizar los conocimientos, sino más bien la de proporcionar ocasiones que motiven la necesidad de emplearlos.

Las actividades matemáticas que se realizaban en el ámbito de los proyectos en general no parece que se propusieran inmediatamente después o durante el estudio de una cierta cuestión matemática; por ello, siempre que la formulación de un problema en el seno de cualquier proyecto, si se hacía por parte del maestro, no contuviese indicaciones que indujeran el uso de un determinado objeto o herramienta matemática, los proyectos podían servir para que conocimientos matemáticos que Aline Robert denomina 'movilizables' (el alumno puede recurrir a ellos si se lo invita o si el problema hace referencia explícita) pasaran a estar 'disponibles'[112] (lo bastante asentados como para que el estudiante pueda recurrir a ellos sin que se le sugiera). Es una de las características que esta investigadora en Didáctica de la Matemática[113] atribuye a los problemas transversales. Pero para que pueda darse ese proceso, se requiere que el maestro incluya en el análisis a priori de un proyecto, no solo la relación de conocimientos matemáticos involucrados, como sucede en los ejemplos de los que aquellos profesores dejaron constancia escrita, sino sobre todo: un cuestionamiento sobre los conocimientos que habrían de ser movilizados; si la situación requiere que estén disponibles al menos para una parte de los alumnos, o qué variables ha de manejar el enseñante y cómo para crear la necesidad de que pasen a serlo; diferenciar estos conocimientos matemáticos estudiados previamente de aquéllos cuya adquisición es el objetivo del proyecto; averiguar si esos conocimientos se encuentran en la zona de 'desarrollo próximo' de la clase, etc.

La cuestión es: ¿podía el dispositivo basado en el trabajo por proyectos conseguir un proceso de estudio de las matemáticas que superara las restricciones que hemos ido señalando? ¿En qué se diferenciarían tales proyectos de los Recorrido de Estudio e Investigación? Hoy en día se han retomado los proyectos en la enseñanza, atribuyéndoles propiedades muy parecidas a las del periodo que estudiamos, aunque sin que parezca haber tampoco un cuestionamiento 'fuerte' que permita determinar qué conocimiento matemático posibilitan, y bajo qué condiciones de diseño y puesta en práctica –a veces esto ni siquiera se considera una cuestión primordial–. Por ello resultan esenciales las investigaciones sobre el diseño y la implantación de los Recorridos

[112] Robert, Penninckx y Lattuati, *Une camera...*, op. cit., cap. 1.
[113] Robert, *Laisser chercher...*, op. cit.

de Estudio e Investigación, en particular en la enseñanza elemental y en la formación de maestros.

7.2. Los materiales de enseñanza

Los profesores de Escuela Normal más renovadores resaltan la importancia de las acciones que conllevan actividad manual. Aurelio R. Charentón aconseja realizar cada lección en la escuela

> respetando todo el proceso natural del alumno; esto es, dando todo el margen posible a su actividad sensorial y manual, poniendo cosas a su alcance para que manipule con ellas, las combine, las descomponga, las observe y compare con otras, las construya y las represente gráficamente[114].

Algo similar formula en el caso de la enseñanza de las ciencias: «Desenvolviendo su habilidad manual mediante la manipulación y construcción de aparatos»[115]. Y no se queda en una declaración de intenciones; las lecciones que desarrolla en los dos libros de matemáticas para primaria respetan este principio. Así, a propósito de la suma, hace esta observación a los maestros: «Hay una gran ventaja en que el niño opere materialmente con cajitas, en la forma indicada anteriormente, antes de escribir el resultado»[116] (figura 7.1).

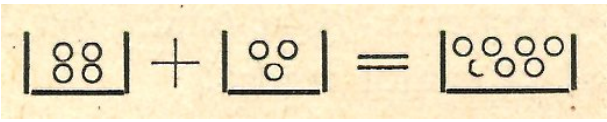


Figura 7.1: Charenton. Suma con objetos

[114] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?, p. 8.

[115] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Las ciencias en la escuela: libro de lectura y de iniciación al estudio de la física, química e historia natural.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid, 4.ª edición, 1926, p. 11.

[116] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado elemental. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?, p. 98.

El origen y la naturaleza de los materiales de los que se sirven estas personas para la enseñanza de la matemática son muy variados; encontramos desde instrumentos de dibujo, hasta material de diferentes oficios o artes y materiales de uso común procedentes del entorno y de los juegos clásicos. Y, por supuesto, materiales elaborados ex profeso, a partir de otros básicos: cartón, papel, cuerdas o hilos, alambre, libros, tijeras, cuentas o botones, cajas y recipientes, arena...

Por otro lado, hallamos que un mismo concepto es tratado utilizando materiales variados y, sobre todo, técnicas diferentes. Es ilustrativo poner la atención en las *tareas* que se plantean con materiales y las *técnicas* propuestas para realizarlas. De esa manera, se advierte que estos materiales aparecen, tal y como afirma Pedro Luis Moreno, siguiendo a Hernández Díaz, como «huellas del pasado que nos informan de la intrahistoria de los procesos educativos, las prácticas, las metodologías de enseñanza, la organización de las escuelas, las relaciones entre los alumnos, los docentes...»[117].

7.2.1. Funciones del material

Margarita Comas[118] señala, como idea básica de la nueva orientación en la enseñanza, la preocupación por adaptarse al desenvolvimiento intelectual del alumno, lo que se traduce en el interés por las demostraciones intuitivas, es decir, por dar un carácter más experimental a las matemáticas. Otras componentes de la nueva orientación son la atención hacia la historia de las matemáticas, la relación entre las distintas partes de la matemática, antes estudiadas por separado, la predilección por una geometría dinámica y, por último, el carácter real de la enseñanza.

La *cuestión* que se plantean estos profesores, en relación con la enseñanza de las matemáticas, es en palabras de Comas:

«¿Cómo pueden estos principios llevarse a la práctica en la Escuela? En otras palabras: ¿qué plan y qué método debe seguir el maestro?»[119].

[117] Moreno Martínez, Pedro Luis: «Rosa Sensat, la cultura material de la escuela y el material de enseñanza». *Temps d'Educatió*, 2013, **44**, pp. 77–44. Cita en p. 78.

[118] Comas Camps, Margarita: «La enseñanza de las Matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1922, **6**, pp. 215–220.

[119] Ibídem, p. 218.

Cuestión que a su vez se puede desglosar en otras más específicas:

¿Cómo hacer más intuitivas las demostraciones?

¿Cómo trabajar las matemáticas de una manera experimental?

¿De qué forma relacionar la aritmética y la geometría?

¿Cómo relacionar las matemáticas con la vida real?

En las praxeologías didácticas que elaboraban los profesores más renovadores como respuesta a estas cuestiones aparece el uso de material de enseñanza bien en los tipos de tareas propuestas, bien en las técnicas utilizadas en su resolución. Veamos algunos ejemplos de uso de material agrupados según el tipo de tarea didáctica a que se asocian[120]:

- *Introducir nuevos objetos matemáticos o ayudar a comprender las definiciones de los objetos matemáticos.*

  Ejemplos de estos procesos los describen Margarita Comas[121] en el análisis de líneas y A.R. Charentón al definir el ángulo recto[122], o cuando propone clavar un cuadrado con un alfiler en cada vértice, rodear con un hilo, cortar lo que sobre, y medir la longitud del hilo, una vez rectificarlo, para entender lo que significa medir el perímetro[123]. José María Eyaralar cita como ejemplo el caso de la construcción de la circunferencia usando una cuerda (fijando un extremo y desplazando el otro manteniendo la cuerda tensa), que permite llegar a la definición de la circunferencia como lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno fijo[124].

[120] Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «El material de enseñanza en las praxeologías de formación de maestros en España (1920-1936)». En: *IVe Congrès International sur la TAD*, IUFM de l'Academie de Toulouse, Toulouse (Francia), 2013. En prensa.

[121] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., pp. 53-55.

[122] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., pp. 84-85.

[123] Ibídem, p. 198.

[124] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 66-67.

En las definiciones basadas en la observación o en las acciones con materiales, se hace necesario diferenciar entre objetos 'reales' o sus representaciones, y objetos 'abstractos' o definiciones, y por ello los autores considerados insisten en la necesidad de ir afinando los conceptos.

- *Hacer que los alumnos comprueben intuitivamente una propiedad*

  Una de las tareas didácticas que el material puede facilitar es la de *descubrir o comprobar una propiedad matemática*, como cuando Charentón usa la técnica del recortado de papel para ver que la diagonal de un rectángulo divide a éste en partes iguales[125], o que el ángulo formado por la vertical y la horizontal es recto, suspendiendo una plomada sobre el agua de un cubo[126].

  Puede ser antes de demostrar la propiedad o, simplemente, para aclararla una vez demostrada. Sáiz Salvat pone como ejemplo la verificación intuitiva del teorema de Pitágoras con la cuerda de nudos, o la de la igualdad $1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$ con recortes de cartulina[127].

  En el *Nuevo Tratado de Geometría*[128] de Eyaralar figuran, tanto materiales e instrumentos geométricos para construir los propios alumnos, como cuestiones que hacen referencia a materiales conocidos, para reflexionar sobre importantes propiedades geométricas. Por ejemplo, sobre la indeformabilidad del triángulo, la figura 7.2 (p. 457) donde aparece dibujado un triángulo hecho con tres piezas de 'mecano' con juego libre en los puntos de unión y pregunta: «Si la figura siguiente está constituida por barras de hierro con juego libre en los puntos de unión, ¿constituye un sistema rígido? *¿por qué?*»[129] En este caso no solo se constata la propiedad, también el material sirve para plantear su justificación.

[125] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 150.
[126] Ibídem, p. 85.
[127] Sáiz Salvat, Felipe: «El sentido de la Normal». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **25**, pp. 176–177. Ver figura 8.3, p. 558.
[128] Eyaralar Almazán, José María y Cebrián, Francisco: *Nuevo Tratado de Geometría*. Reus, Madrid, 1924.
[129] Ibídem, p. 87.

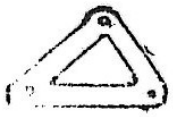


Figura 7.2: Eyaralar. Triángulo con mecano.

El aparato denominado 'Arquímedes' (figura 7.12, p. 474), inventado por Eyaralar y que describimos después, permite comprobar la relación entre los volúmenes de algunos cuerpos geométricos.

- *Ayudar a promover el razonamiento matemático en los alumnos y a iniciarse en las demostraciones matemáticas*

  En ocasiones el razonamiento se limita a la comprobación de una propiedad, pero en otras se trata de favorecer el razonamiento de base intuitiva de los alumnos, llevándolos a formular reglas generales y a iniciarse en las demostraciones matemáticas. Es el caso de los puzles geométricos en cartón o madera usados para deducir las fórmulas que expresan las áreas de algunos polígonos. Así, la propuesta de Eyaralar no busca simplemente que los niños manipulen el material, sino que éste sea un instrumento para el razonamiento. Ésta es una de las actividades propuestas por Eyaralar:

  > El aparato representado por la figura adjunta sirve para trazar rectas paralelas. *Explíquese su fundamento y su uso*[130].

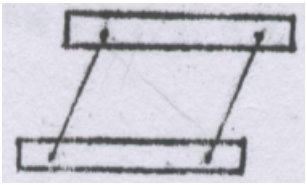


Figura 7.3: Eyaralar. Aparato para trazar paralelas

El interés de este material no reside tanto en la posibilidad de utilizarlo para construir rectas paralelas, como en servir de base para la aplica-

[130]Ibídem, p. 108. El enfatizado es nuestro.

ción de conocimientos geométricos y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los alumnos.

En el caso de Charentón el recurso a los métodos experimentales, al servicio de la intuición, no le hace olvidarse del quinto de los principios declarados por el mismo autor en el prólogo de sus *Lecciones de Cálculo*[131]: Los materiales manipulativos, a través de la actividad física con ellos, lejos de sustituir a la actividad mental y al razonamiento, se pretende «que insensiblemente ayuden al esfuerzo mental del alumno»[132]. El uso de materiales va ligado al estudio de la relación entre diferentes figuras y a menudo se promueven las justificaciones explicativas: «¿Cómo podrías hacer un rombo con una cuartilla rectangular de papel? ¿Saldría un rombo si la cuartilla fuese cuadrada?»[133].

- *Servir como dispositivos o instrumentos materiales para ciertas tareas.*

  Por ejemplo, las '*reglas superpuestas*', material diseñado por Eyaralar (figura 7.8, p. 469). Las 'reglas superpuestas', como las representaciones gráficas que materializan, son un instrumento de cálculo y, a la vez, permiten visualizar las operaciones y poner de manifiesto, entre otras cosas, la relación entre la suma y la resta.

  Luis Paunero describe cómo construir un aparato para proyectar objetos espaciales de tres dimensiones sobre cada uno de los tres planos ortogonales, para ayudar en el estudio de los elementos y cuerpos geométricos[134] (figura 7.4, p. 459).

- *Relacionar la geometría con la aritmética o el álgebra.*

  Comas[135] propone obtener diferentes fracciones y las relaciones entre ellas mediante divisiones, por plegado, de una cuartilla. Eyaralar nos dice que «la Aritmética y la Geometría deben ir íntimamente unidas en la enseñanza primaria [...] La Geometría puede hacer prácticas e

[131] Los hemos recogido en la p. 372 del apartado 6.1.2.

[132] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio...*, op. cit., p. 8.

[133] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 162.

[134] Paunero Ruiz, Luis: «Una lección sobre proyecciones en el espacio». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **96**, pp. 67–70.

[135] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit.

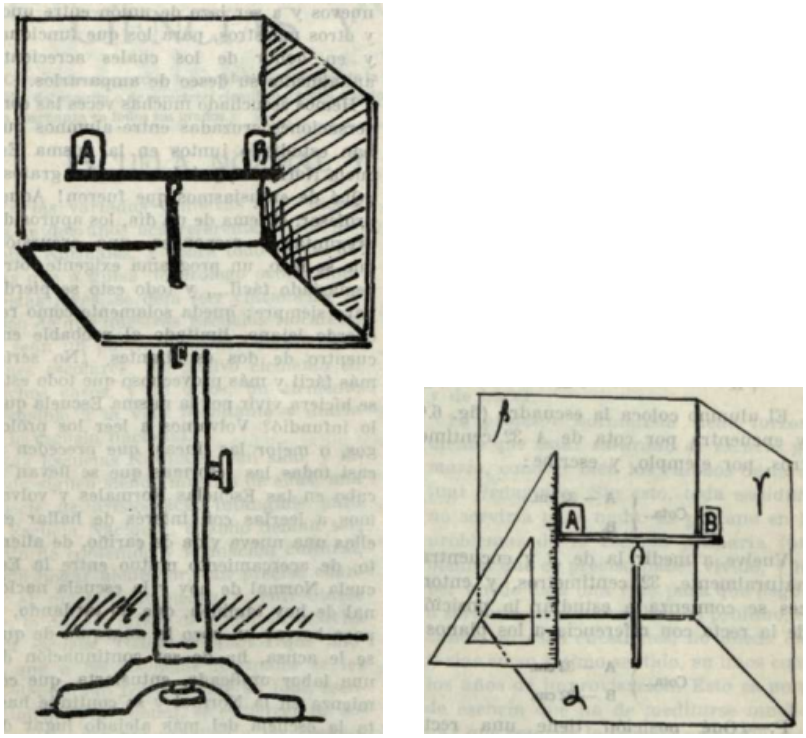


Figura 7.4: Paunero. Aparato de proyección

intuitivas propiedades y operaciones aritméticas»[136]. Así, la construcción de rectángulos de 3×4 y de 4×3 cuadrados, permite poner de manifiesto la propiedad conmutativa de la multiplicación.

- *Relacionar las matemáticas y otras disciplinas*

  Charentón, por ejemplo, une el estudio del círculo a una actividad sobre la experiencia de Newton relativa a la composición de la luz blanca: propone construir un disco, dividirlo en siete sectores, coloreados con los colores del arco-iris, y girarlo alrededor de un alfiler[137].

  Las actividades con mapas involucran cuestiones geográficas a la vez que matemáticas. Eyaralar cita en numerosas ocasiones los problemas de escalas. Del mismo modo, hay materiales que permiten relacionar las matemáticas con la física, etc., en particular con el dibujo y con el trabajo manual.

[136] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 230.
[137] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 269.

En cualquier caso, un material puede combinar varias de estas funciones, como servir de dispositivo material para una cierta técnica, a la vez que desempeña otro papel. Por ejemplo, las 'reglas superpuestas' pueden utilizarse como instrumento para calcular, pero también para poner de manifiesto y ayudar así a trabajar la relación entre la suma y la resta y algunas propiedades de ambas operaciones. Igualmente, el material EYA, que describimos en pp. 470 y sig., y los instrumentos de dibujo responden a esta doble función.

Como expresa Eyaralar, «un mismo material puede ser utilizado para diferentes cuestiones [...], ya que aquél [su valor] depende de éste [su empleo] y el uso puede ser ampliado y modificado por el ingenio del maestro y las necesidades de la clase»[138].

7.2.2. Tipo y procedencia del material

En las obras consultadas hallamos referencias a diversos tipos de materiales:

En geometría: compás, escuadra, cartabón, papel, papel cuadriculado, cartón, encuadernadores, alambre, cuerda, nivel, polígonos y cubos de madera, etc.

En aritmética: material discreto (bolas, monedas, botones), material agrupado (tablas con 10 botones, varillas con 10 bolas, monedas), ábaco, fichas de dominó, etc.

Para la medida[139]: cuerdas, pesas, medidas de capacidad habituales, monedas, hojas de periódico, el suelo de la clase, alfileres e hilo, cinta métrica, balanza, pesas, probeta graduada, reloj con manecillas movibles, etc.

Las propuestas de materiales están influidas por la experiencia que habían vivido en su estancia en Europa, becados por la JAE y por las obras de otros autores, españoles y extranjeros, pero también por el conocimiento de la realidad de las escuelas españolas y de las familias de los alumnos y de su precariedad de medios económicos. La pertinencia de las orientaciones que

[138] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 215-216.

[139] Aunque los autores tratan la aritmética y la geometría, sin distinguir por separado las cuestiones de medida, aquí sí hemos diferenciado los materiales relacionados con la medida.

dan para su uso revela la buena formación matemática y didáctica de los autores.

Podemos agrupar los materiales, según su origen, en[140]:

- Materiales didácticos 'clásicos', de matemáticas o de otras disciplinas, o comercializados: ábacos, polígonos recortados en madera, sólidos geométricos, mapas... También se citan materiales de casas comerciales, como los de Nathan.

- Instrumentos de dibujo. En general abogan por no limitar tampoco el uso de instrumentos a los más clásicos. Eyaralar critica que muchas veces los instrumentos geométricos se limiten incluso aún más, a la regla y el compás únicamente, cuando «en la Didáctica de esta ciencia en las clases elementales, hemos de suprimir toda clase de limitaciones»[141]. Propone usar también la escuadra, el semicírculo graduado para transportar ángulos, el pantógrafo...

- Material de los diferentes oficios y artes, los efectivamente usados o modelos simplificados de los mismos, como uno de los elementos que confieren un valor utilitario a la enseñanza. Concretamente para la aritmética propone el uso de facturas y de impresos de contabilidad. En geometría, para todas las cuestiones de agrimensura, aboga por usar instrumentos de agrimensor. También cita instrumentos presentes en diferentes oficios y artes: pantógrafo, plomadas y niveles, reglas en T, rosetas, balanzas, probetas graduadas, etcétera. Además de su valor formativo, estos materiales permiten conectar las matemáticas con la vida diaria, que es uno de los objetivos que señalan para las matemáticas en primaria y uno de los que caracterizan a la *Escuela Nueva*.

[140] Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «Aprender matemáticas jugando: la propuesta educativa de José María Eyaralar». En: Agustín Escolano (Ed.), *La cultura material de la escuela. En el centenario de la Junta para la Ampliación de Estudios, 1907-2007*, pp. 183–194. CEINCE, Berlanga de Duero, 2007.

Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «El uso de materiales en la enseñanza de la matemática escolar». En: Pedro Luis Moreno y Ana Sebastián (Eds.), *Patrimonio y Etnografía de la escuela en España y Portugal durante el siglo XX*, pp. 181–196. SEPHE y SEM, Murcia, 2012.

[141] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 103.

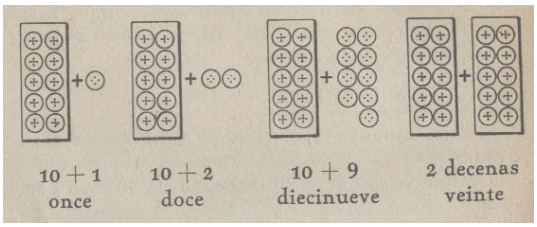


Figura 7.5: Charentón. Cantidades de la segunda decena

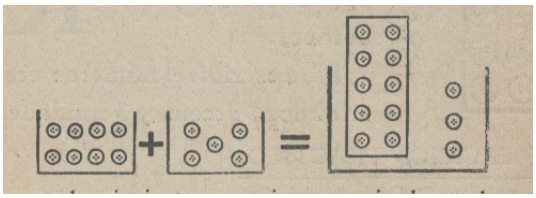


Figura 7.6: Charentón. Suma con decenas

- Objetos o materiales de uso común, generalmente obtenidos del entorno y de los juegos clásicos, tales como cajas y envases de diversos productos, libros, abanicos, espejos, fichas de dominó, juego de bolos, monedas, palillos, espejos, postales, retratos, cartones con botones o con alfileres, de los que hay en las mercerías, etc. Aquí entrarían los materiales básicos, a partir de los que ir elaborando otros materiales o instrumentos: papel, cartón, botones, encuadernadores, cuerdas o hilo bramante, alfileres, alambre, cuentas, tijeras, recipientes, arena...

  Veamos algunos ejemplos propuestos por Charentón sobre la representación de las cantidades de la segunda decena[142] (figura 7.5) y de suma[143] (figura 7.6), ambos realizados con botones, y el 'contador', hecho con encuadernadores[144] (figura 7.7).

- Materiales didácticos recogidos en obras de otros autores y de sus visitas a centros educativos. Es el caso de los citados del Instituto-Escuela; de los materiales observados por Eyaralar durante su estancia en Francia[145], de los de Winnetka o Mackinder, que tanto considera Margarita

[142] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 28.
[143] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio...*, op. cit., p. 110.
[144] Ibídem, p. 111.
[145] Eyaralar Almazán, José María: «La enseñanza de las Matemáticas en las escuelas

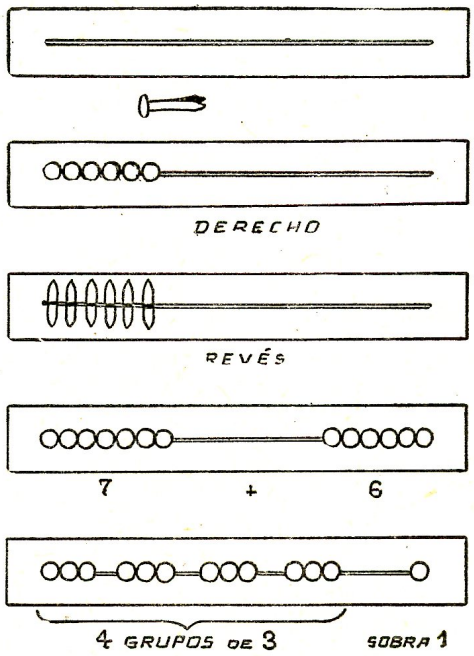


Figura 7.7: Charentón. 'Contador' con encuadernadores

Comas, junto con los de Fröebel, Decroly y Montessori, que citan tanto Comas como Eyaralar.

Prueba de las influencias que estos autores tuvieron de las corrientes y las instituciones de su época, es la coincidencia en señalar materiales; tanto Eyaralar como Comas recogen en sus obras la relación de material que Sánchez Pérez, catedrático de instituto, propone para la sección primera del Instituto-Escuela[146]:

> Una caja con 500 a 1000 conchas de mar; una caja con 500 a 1000 piedrecitas de río; una caja con semillas duras (judías, algarrobas, guijas, habas, etc.); mil centímetros cúbicos sueltos, de madera, en una caja cúbica; una colección de varillas de hierro de

francesas». En: *Anales de la JAE*, tomo XIX, pp. 1–96, 1924.

[146]Sánchez Pérez, José Augusto: «Notas de metodología matemática». En: *Congreso de Oporto. Tomo III. Ciencias Matemáticas*, pp. 5–22. Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Madrid, 1921. Cita en p. 12. Sánchez Pérez lo propone para la clase infantil (niños menores de ocho años).

> tres tamaños distintos (ciento de cada uno); una colección de figuras recortadas de madera; una colección de soldaditos de plomo; una colección de monedas; treinta tableros con orificios a un centímetro de distancia; dos metros graduados en centímetros (uno rígido y otro plegable); un litro; un decilitro[147].

- Materiales didácticos de diseño propio o adaptado por los autores.

  Es el caso de los materiales que describimos en los apartados siguientes.

7.2.3. La elaboración de material propio

Estos profesores de Escuela Normal, conocedores de la realidad de otros países que habían visitado mientras disfrutaban de la beca concedida por la JAE, y conscientes de las condiciones de las escuelas españolas, insisten en el bajo coste del material: «la enseñanza intuitiva de la matemática no exige gastos ni aparatos especiales. Apenas una o dos de las cosas citadas [...] dejan de ser cosa vulgar y de uso corriente, y aun éstas pueden ser sustituidas caso de no ser fácil proporcionárselas el maestro»[148]. Apelan a la inventiva del maestro para reemplazar, en caso necesario, unos objetos o materiales por otros básicos o elaborados a partir de ellos: hilo, arena, papel, cartón, tijeras, encuadernadores..., y para utilizar un mismo material de diversas maneras o con distintos fines. Sáiz Salvat recoge la opinión de Víctor Mercante acerca de la necesidad de que el material sea asequible, por barato, lo que lleva a la conveniencia de construirlo en la propia escuela, máxime cuando no es necesaria –ni siquiera beneficiosa– la precisión en estos aparatos:

> Si la exactitud absoluta no es más que un ideal en la metrología, ¿qué inconveniente puede haber en que construyamos los aparatos de trigonometría en el taller? No podremos obtener valores exactos y, sin embargo, nos resultarán baratos (de aquí, asequibles) y con su uso,

[147] Comas Camps, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 5.ª edición, 1932, pp. 27-28. También en Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 287-288.

[148] Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., p. 28.

> posible por la baratura, se aprenderá la técnica educativa del hacer[149].

Y describe cómo hacer con materiales de uso común banderolas, piquetas, curvímetros, incluso un aparato que puede sustituir al teodolito en la escuela primaria.

Francisco Manuel y Nogueras también considera la precaria situación económica de las escuelas españolas y, de hecho, la recomendación que hace este autor sobre los catálogos de los fabricantes de material es aprovecharlos para hacer un 'museo de imágenes'[150].

Ya en el R.D. de 30 de agosto de 1914 reorganizando las Normales, se pretendía que «el alumno normalista saliera de la Normal [...] en condiciones de construir el material escolar y en posesión de una completa colección de él en cada materia usable enseguida que entrara a desempeñar escuela»[151]. Para ello, debían aprender a elaborar los materiales de enseñanza en las Normales:

> Sin embargo, una de las misiones que aparece clara para el profesor normal es la de formar en su cátedra, una biblioteca escolar modelo, una colección, también modelo, del material que puede y debe utilizarse en la escuela primaria, para hacer que se cumpla alguna vez el precepto pedagógico que desde Pestalozzi acá nos está sermoneando: *La enseñanza debe ser intuitiva*[152].

Independientemente del tipo de material, se propone que se construya, siempre que se preste a ello, en la propia escuela, recogiendo la propuesta de Cossío, en su famosa conferencia sobre *El niño, la escuela y el material de enseñanza*:

> No es lo que importa que el material sea poco o mucho, pobre o rico, grande o pequeño: lo que interesa es que sea adecuado [...] y por

[149] Sáiz Salvat, Felipe: «La Topografía escolar». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **97 y 103**, pp. 101–103 y 105–107. Cita en p. 102.

[150] Manuel Nogueras, Francisco: «Sobre material pedagógico. Conceptos sueltos». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, pp. 143–144.

[151] Sáiz Salvat, Felipe: «El Plan de las Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **16**, p. 205.

[152] Eyaralar Almazán, José María: «El aparato «Arquímedes». Para la obtención de las áreas y los volúmenes de los cuerpos redondos». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **36**, pp. 210–212. Cita en p. 210.

> *adecuado*, en este respecto, entiendo *vivo*; y vivo quiere decir por lo que hace a la escuela primaria, fabricado en ella, como obra del trabajo común de maestro y discípulo[153].

En una de las 20 observaciones que hace, en su artículo sobre material pedagógico, Manuel y Nogueras destaca que lo único importante es que el material responda a la finalidad buscada, ya que «el ropaje y la elegancia son detalles que el maestro y el niño deben dejar al cuidado de sastres y zapateros»[154]. A esta idea respondía, por ejemplo, el aparato proyector diseñado por Luis Paunero, que aparece en la figura 7.4 (p. 459).

Merece la pena destacar la importancia que concede José María Eyaralar a la elaboración de material en el aula, sobre todo cuando se trata de estudiar la geometría: «Al conocimiento de las formas se llega por dos caminos: *presentándolas* y *construyéndolas*. Si no queremos forzar demasiado la realidad, la segunda manera deberá ser tan importante como la primera»[155]; y en cuanto a los modelos presentados en el espacio, considera que «no sólo deben ser presentados sino *ejecutado*s por los niños»[156]. La preferencia por el hecho de que el niño elabore material se extiende en ocasiones incluso a los instrumentos: «esto prepara además la obtención de figuras semejantes por el *pantógrafo* corriente, y mejor aun [sic] por el construido sencillamente con una cinta de goma»[157]. En la Normal de Mallorca casi todo el material es construido por los alumnos aspirantes a maestros[158].

En cambio, cuando se trata del trabajo con planos o mapas, «contra lo que generalmente suele hacerse en tales casos», opina que «la utilización de los planos y mapas [debe preceder] a su construcción»[159], porque el uso de planos y mapas es bastante más sencillo, más cercano, a los intereses del niño y lo prepara para las actividades de construcción de los mismos.

[153] Cossío, Manuel Bartolomé: *El maestro, la escuela y el material de enseñanza y otros escritos*. Biblioteca Nueva, Madrid, 2007. Edición de Eugenio Otero Urtaza. Cita en p. 64.

[154] Manuel Nogueras, *Sobre material...*, op. cit., p. 144.

[155] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 82.

[156] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 168.

[157] Ibídem, p. 393.

[158] Eyaralar Almazán, José María: «La explicación de los volúmenes». *Revista de Escuelas Normales*, 1928, **53 y 56**, pp. 137–138 y 202–203.

[159] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 391.

El material no debe desviar la atención de los niños de los aspectos matemáticos: «Cuanto más sencillo y más conocido es el material empleado menos distraen los niños su atención en las complicaciones de la cosa, olvidándose de la verdad esencial que quiere el maestro deducir»[160]. Eyaralar[161] sugiere disponer de cuerdas, cinta métrica y cartabón o escuadra, con un pequeño nivel y una plomada, materiales sencillos pero más precisos que los que puedan construir los alumnos.

En cuanto a las condiciones que ha de reunir el material, se considera que ha de ser sólido, agradable, manejable por su tamaño, y que permita la actuación sobre él, frente a la mera visualización. Además de ser autocorrectivo y auto-instructivo[162]. Paunero estima que para que pueda llevarse a la realidad práctica la construcción y uso de un instrumento es preciso «que esté constituido y funcione fácilmente y que esté dotado de consistencia, sencillez y economía, condiciones indispensables para que pueda considerarse de verdadero valor un material escolar»[163].

Es importante resaltar, en cuanto a la utilización didáctica de los materiales de enseñanza, que no se conciben para *mostrar* las acciones que el profesor realiza con ellos, sino para que los alumnos *actúen* realmente durante la clase, «los alumnos deben estar provistos cada uno de un aparato semejante. Sólo que éstos estarán construidos en cartón piedra»[164]. Nuevamente la *teoría didáctica* está detrás de las técnicas y las sustenta.

7.2.4. José María Eyaralar: inventor de materiales para enseñar matemáticas

José María Eyaralar no solo construye material didáctico o usa como tal objetos habituales presentes en el entorno, sino que es el inventor de algunos materiales concretos, que construye con sus alumnos, e incluso de algún material menos sencillo, que hace construir y comercializar. Justifica el interés de los materiales que utiliza y, en particular, de los que ha diseñado

[160] Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., p. 35.
[161] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 114.
[162] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 215.
[163] Paunero Ruiz, *Una lección sobre...*, op. cit., p. 68.
[164] Ibídem, p. 70.

él mismo haciendo referencia a las ideas pedagógicas de la *escuela activa*:

> No faltará quien piense que tales cosas son puerilidades, [...] Nosotros, por el contrario, pensamos en lo ventajoso que es que el niño encuentre por sí mismo aquella relación, manipulando, [...] Nunca asociaremos bastante las sensaciones, ni acudiremos demasiado a la acción; y pensamos con Pestalozzi que «en Educación no hay pequeñeces»[165].

Algunos de los materiales diseñados por él son las llamadas *reglas superpuestas*, el *disco EYA* o el *aparato Arquímedes*.

7.2.4.1. Material para la Aritmética: Las Reglas Superpuestas

Se trata de un material que este autor describió en un artículo publicado en la *Revista de Pedagogía*[166] en 1926, y que había formado parte de la exposición de material de matemáticas que organizó en la Escuela Normal de Barcelona siendo profesor de matemáticas de la misma.

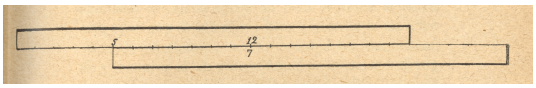
Su origen está ligado a los procedimientos para sumar o restar gráficamente sobre la recta numérica, que aparecen tanto en su *Nuevo Tratado de Aritmética* como en la *Aritmética Intuitiva*. Tras las representaciones gráficas que actúan como punto de partida de las acciones de los niños, propone un material para calcular la suma o la resta de dos números dados basado en las mismas. Se trata de un sencillo material que consiste en dos reglas con la misma graduación, que puedan deslizarse una sobre la otra (figura 7.8, p. 469). Eyaralar, en sus sucesivas obras sobre la enseñanza de la aritmética, presenta este material con nuevas indicaciones sobre su uso. Ya en 1922, una ilustración del *Nuevo Tratado de Aritmética* muestra este aparato[167], que retoma en su *Aritmética Intuitiva*[168]

[165] Eyaralar Almazán, *El aparato «Arquímedes»...*, op. cit., cita en pp. 211-212.

[166] Eyaralar Almazán, José María: «La educación intelectual y la enseñanza de las matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1926, **49**, pp. 7–13.

[167] Eyaralar Almazán, José María: *Nuevo Tratado de Aritmética*. Reus, Madrid, 1922, p. 41.

[168] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 29.



$$5 + 7 = 12$$

Figura 7.8: Eyaralar. Reglas superpuestas

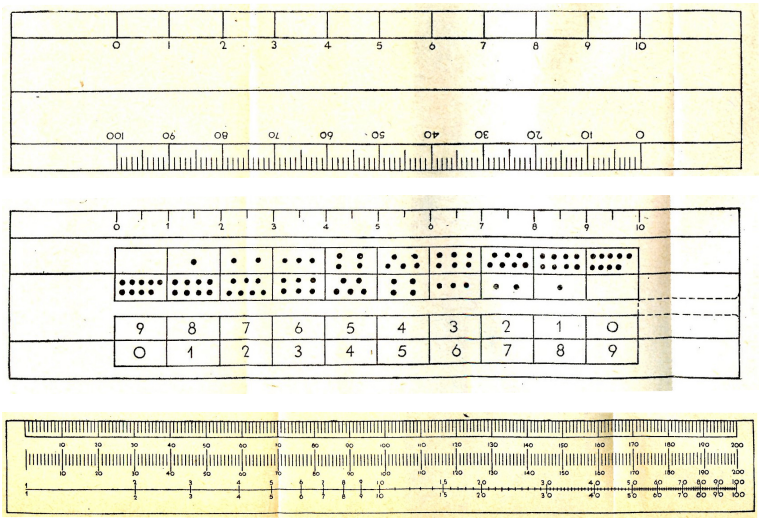


Figura 7.9: Eyaralar. Láminas de la *Metodología*

Marín Eced[169] considera que fue un mérito que la Junta de Ampliación de Estudios tuvo en cuenta para concederle la beca que le permitió viajar a Francia.

Una de las láminas que figuran al final de la *Metodología*, con material diseñado por este autor, además del disco EYA, que sirve para la geometría pero también para las fracciones, contiene tres Reglas EYA, «Regla EYA núm. 1 para el dibujo, la medida y el trazado de perpendiculares», «Regla EYA núm. 2 para la adición y sustracción intuitiva y numérica hasta 20» y «Regla EYA núm. 3. Realiza mecánicamente las cuatro operaciones y la obtención de logaritmos» (figura 7.9, p. 469)[170].

[169] Marín Eced, Teresa: *Innovadores de la Educación en España*. Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca, 1991.

[170] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., láminas.

7.2.4.2. Material para la Geometría: El *material EYA*

Para la enseñanza de la geometría, Eyaralar propone el que denomina «Material EYA», diseñado fundamentalmente para el cálculo de áreas y volúmenes, el cual incluye, entre otros, el «Disco EYA» y el material que él mismo denominó «Aparato Arquímedes», en honor de este matemático. La *Metodología de la Matemática*, contiene al final tres láminas con materiales, las dos primeras dedicadas al material EYA. Antes, en el apartado dedicado al material de enseñanza[171], cuando enumera una serie de materiales para trabajar la geometría, cita algunos que forman parte de este material. Además de los ya citados, para el cálculo de áreas de figuras planas, menciona: un paralelogramo transformable en rectángulo, un triángulo transformable en paralelogramo, un trapecio transformable en triángulo o rectángulo, un polígono regular transformable en rectángulo, un círculo transformable en rectángulo aproximadamente, teorema de Pitágoras de superposición directa, etc.; y para el cálculo de áreas y volúmenes de poliedros y cuerpos redondos, entre otros, cubo y ortoedro descompuesto en cubos, un paralelepípedo transformable en paralelepípedo rectángulo, un prisma rectangular recto transformable en paralelepípedo rectángulo, un prisma recto descomponible en prismas triangulares, y una pirámide y prisma huecos de igual base y altura, estando la de éste dividida en tres partes iguales.

En un capítulo anterior ya hemos visto cómo utilizaba estos materiales para trabajar el 'Principio de Cavalieri' o el 'prismatoide' (p. 251).

Formando parte del material EYA se encuentra el «*Disco EYA*», que permite la división de la circunferencia en partes iguales y la construcción de polígonos regulares, entre otras cosas. Este material se comercializó por la casa Salvatella[172], en Barcelona. Se podía adquirir, además del material para el alumno, una carpeta con un librillo de 15 páginas y el material –en versión para el maestro–, y en el que explicaba su función y cómo usarlo[173].

[171] Ibídem, pp. 215-225.

[172] La autora de esta Memoria tuvo ocasión de hablar con el Sr. Salvatella, que recordaba haber vendido bastantes unidades de ambos discos, el del profesor y el del alumno, del que no conservaba ningún ejemplar.

[173] Eyaralar Almazán, José María: *Disco 'EYA' para el trazado de polígonos regulares y sus aplicaciones en la Escuela Primaria*. Miguel A. Salvatella, Barcelona, 193?.

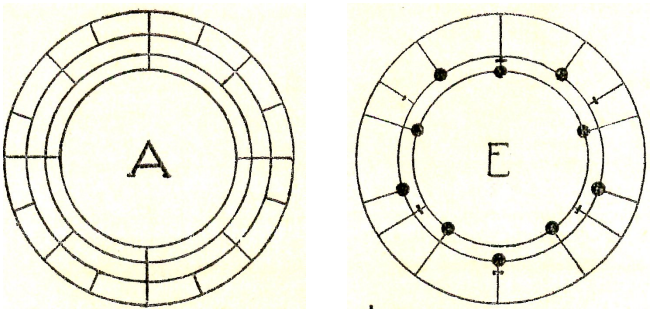


Figura 7.10: Eyaralar. Disco *EYA*

El material consiste en un disco –de 5 cm de diámetro en cartulina para el alumno y 25 cm en cartón grueso para el maestro– de dos caras, marcadas con las letras A y E, respectivamente. La circunferencia en la cara A se divide en 16 partes iguales, por medio de trazos largos, medianos y cortos, y la circunferencia de la cara E se divide en 6 partes iguales por trazos largos y cortos, marcados con un fragmento de línea perpendicular a la tangente, y 10 partes iguales marcadas por un punto grueso cada una. Hay un orificio en el centro para que se pueda marcar éste con la punta del lápiz.

El tamaño de 5 cm no es casual. El diseñador es consciente de que la exactitud es mayor cuanto mayor sea el tamaño, y considera ese un tamaño adecuado por manejable y que proporciona una exactitud aceptable. Además, a la hora de colorear las figuras, un tamaño mayor haría perder demasiado tiempo. El de 25 cm se puede usar en el encerado.

Entre las finalidades de este material están: desarrollar el *gusto estético*, permitir la *invención* de nuevos dibujos y la *obtención* de nuevas *relaciones*, facilitar el *trabajo colectivo y relacionar Aritmética y Geometría*. Finalidades que recuerdan mucho a las de la Escuela Nueva. Por ejemplo, para la representación gráfica de los números fraccionarios propone dividir el círculo en sectores iguales y colorearlos con colores vivos, usando dos colores complementarios si se trata de un número par y los tres colores primarios si es impar, aprovechando para hacer ver al niño la diferencia entre círculo y circunferencia o entre sector y ángulo, «diferencia que le quedará permanente y clara por ir unida no solo a la sensación visual, sino a la muscular, ya que ha

empleado una actividad de esta clase para cubrir de color los sectores»[174].

Entre algunas de las actividades que se pueden hacer con el disco EYA, y que permiten educar el gusto estético y la invención, están los polígonos estrellados y las 'estrellas', las 'figuras de aplicación' (como un triángulo dividido en tres partes, trazando líneas desde el centro a los vértices o desde el centro perpendiculares a los lados) y las 'rosáceas'; de todas ellas propone ejemplos. En el caso de las rosáceas, sugiere hacer concursos con trabajos de los niños, una *técnica didáctica* que menciona con cierta frecuencia en sus obras (figura 7.11, p. 473).

Otro de los materiales que forman parte del *Material EYA* es, como hemos dicho, el llamado «*Aparato Arquímedes*»[175], que no solo diseñó, sino que hizo construir a un industrial de Palma de Mallorca, que lo expuso en su escaparate; estaba a la venta por 60 pesetas y se ofrecía la posibilidad de enviarlo a cualquiera que lo solicitara en toda España.

Se basaba en las relaciones entre los llamados 'cuerpos redondos' (cilindro, cono, esfera) encontradas por Arquímedes. La razón que le llevó a diseñar este aparato es que los procedimientos para obtener las áreas y los volúmenes de los cuerpos redondos superan y quedan fuera de la geometría elemental. Esto y la necesidad de hacerlo de una manera intuitiva y al mismo tiempo convincente, recurriendo a la acción cuando se pueda. Eyaralar describe así el aparato diseñado por él (figura 7.12, p. 474):

> Consta (fig. 1) de un platillo de metal, pintado de negro, sobre el cual van colocados un cilindro, una esfera y un cono huecos de latón barnizado cuyos diámetros y alturas, iguales entre sí, miden todas. El cono lleva en la parte superior una espita, y la esfera un agujero y un semianillo que la rodea a una distancia de 8 mm. según una circunferencia máxima. El cilindro lleva en su parte interna dos incisiones circulares que le dividen en tres partes iguales[176].

Tiene en cuenta que las áreas del cono y del cilindro son sencillas de obtener, dada su condición de superficies desarrollables, y también puede justificarse el volumen del cilindro, aproximándolo a un prisma de infinitas

[174]Ibídem, p. 11.
[175]Eyaralar Almazán, *El aparato «Arquímedes»...*, op. cit.
[176]Ibídem, p. 211.

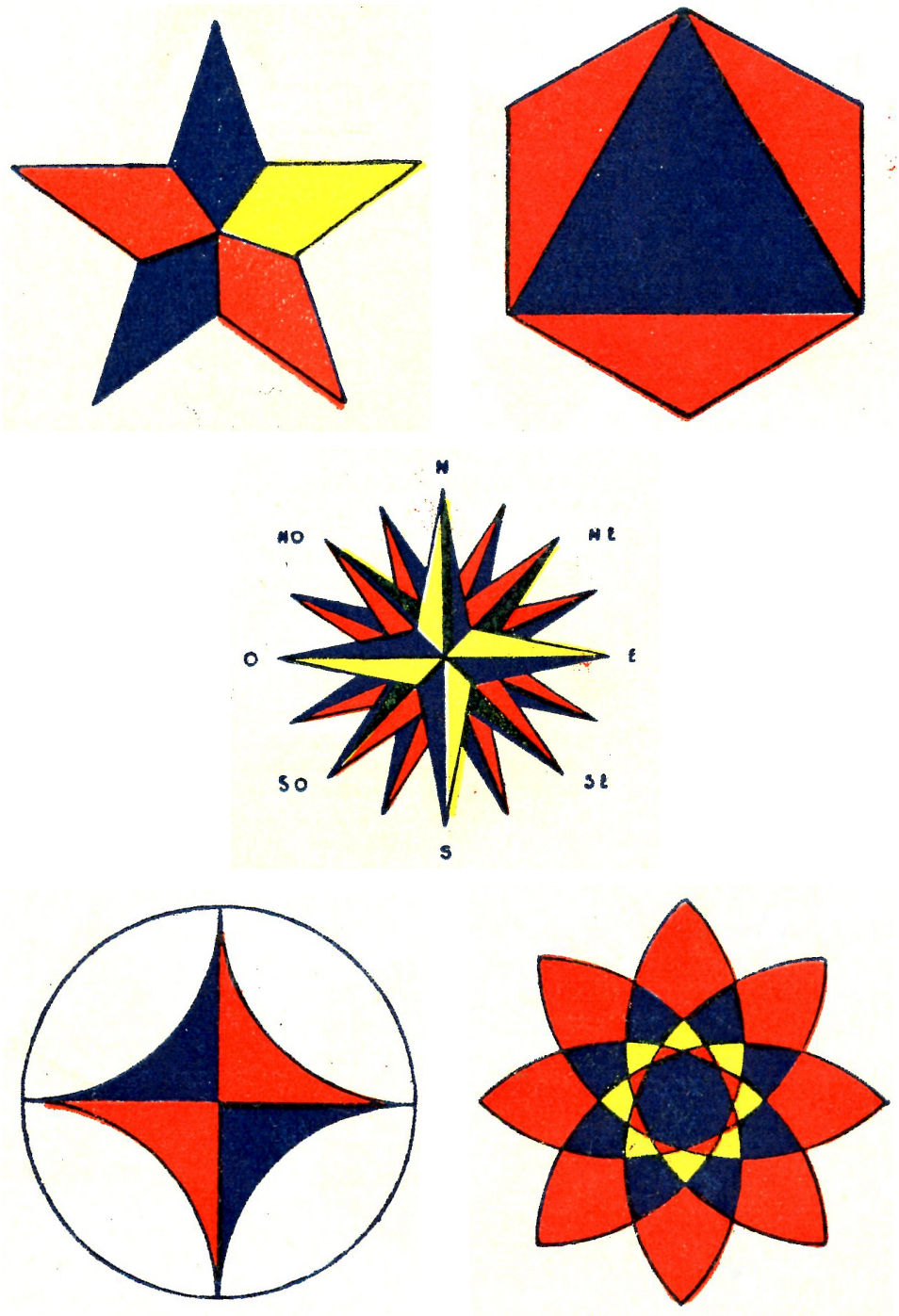


Figura 7.11: Eyaralar. Estrellas, figuras de aplicación y rosáceas

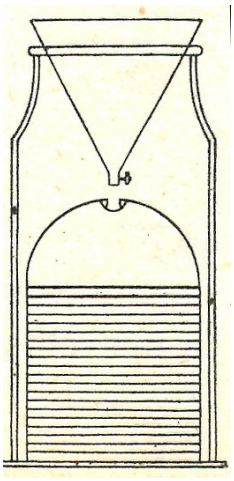


Figura 7.12: Eyaralar. Aparato «Arquímedes»

caras. Pero estaba pendiente el área de la esfera –no desarrollable– y los volúmenes de ésta y del cono y para esta función sirve el material en cuestión. Para los volúmenes basta llenar de agua o arena fina el cono y verterlo sobre el cilindro, para comprobar que alcanza un tercio de la altura de éste, y la esfera los dos tercios. Y para el área de la esfera propone arrollar una cuerda de 8 mm de grosor, de modo que cubra exactamente primero la superficie lateral del cilindro y luego la de la esfera, con la ayuda del semianillo que incorpora ésta en su diseño. De este modo quedan establecidas las relaciones entre las superficies de los cuerpos redondos y lo mismo con los volúmenes. Una vez conseguido esto, es posible obtener las fórmulas o expresiones algebraicas habituales que expresan matemáticamente estas magnitudes en función de las dimensiones de los cuerpos.

Posteriormente, en la *Metodología de la Matemática* se refiere a este aparato[177], incluido en la lámina que hay al final, titulada «Figuras EYA para los volúmenes».

[177] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 208-209, 224.

7.2.5. El material en las praxeologías matemáticas y didácticas

Según Michèle Artigue[178], la TAD concibe los saberes matemáticos en tanto que objetos relativos, emergentes de las prácticas matemáticas realizadas en una institución, y sensibles a la influencia de las herramientas de las prácticas sobre los saberes que emergen de éstas. Para esta autora, la legitimidad de una técnica no depende solamente de su valor pragmático, sino también de su valor epistémico. En este sentido, vemos cómo en ocasiones el material va a influir en el tipo de tareas matemáticas que se proponen, en las técnicas posibles, y asimismo en la justificación de las técnicas.

A modo de ejemplo, hemos elegido la tarea de hacer un cuadrado y otras relacionadas con ella, como la construcción de un ángulo recto.

Todos los autores coinciden en introducir el cuadrado a partir del cubo[179]. Para realizar esta tarea proponen diferentes técnicas, a veces con un mismo material; el material utilizado supone una restricción que impide o dificulta el uso de algunas técnicas, y en cambio favorece el empleo de otras, determinando de este modo el conocimiento matemático que los alumnos pueden llegar a construir. Por ejemplo, en el papel cuadriculado ya están marcados los ángulos rectos y para dibujar el cuadrado hay que centrarse en que la longitud de los lados sea la misma, contando cuadrados. Pero para la tarea de construir un ángulo recto, el papel que proporciona Margarita Comas no es cuadriculado, imponiendo así una restricción, que lleva a introducir una nueva técnica: doblar un papel y volverlo a plegar sobre el doblez[180]. Previamente, la construcción de cuadrados articulados, usando el material consistente en tiras de cartón y encuadernadores, al estilo de un mecano, fuerza, al ser la figura así construida deformable, a tener que considerar cómo han de ser los ángulos para que el polígono resultante sea un cuadrado.

[178] Artigue, Michelle: «Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work». *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 2002, **7**, pp. 245–274.

[179] J.M. Eyaralar (1933, pp. 178-179) discute la conveniencia de comenzar por la geometría plana, por la espacial o por ambas.

[180] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., pp. 44-47.

En otra obra propone construir un cuadrado por plegado de una cuartilla; comprobar la igualdad de los lados y la de los ángulos de un cuadrado girando un cuadrado de papel; y comprobar la igualdad de ángulos superponiendo el de la escuadra[181].

Eyaralar, para tratar de «hacer intuitivas las propiedades del cuadrado»[182], también plantea girar dos cuadrados iguales construidos en papel transparente, alrededor de un alfiler clavado en su centro, para *ver*[183] que coinciden los lados, las diagonales y las semidiagonales. De nuevo se observa la influencia del material elegido y de la técnica empleada, en las propiedades matemáticas involucradas. Así, imponer la construcción de un cuadrado por la técnica del plegado, usando como material un trozo de papel de forma rectangular, lleva a considerar la propiedad de que los lados del cuadrado son iguales; la acción de girar un cuadrado sobre sí mismo y que coincida alude a la regularidad de la figura; por último, la técnica de comprobar la igualdad de ángulos con la escuadra responde a la definición de figuras, en este caso ángulos, iguales, como aquellas que son congruentes, es decir, que superpuestas coinciden.

Charentón[184] nos ofrece otra muestra del efecto del material sobre el tipo de conocimientos involucrados, cuando propone, en el grado elemental, construir un cuadrado usando cuatro lápices, pero la construcción del cuadrado con este material –que hace que los lados ya vengan dados iguales, pero obliga en cambio a colocarlos de manera que los ángulos sean rectos– no aparece sin embargo en el grado anterior, con niños más pequeños. También añade, en el caso del grado elemental, algunas otras técnicas, como las de trazar un cuadrado a partir de dos rectas perpendiculares, tomando distancias iguales, o uniendo los puntos medios de lados opuestos –o contiguos– en un cuadrado. Estas técnicas van asociadas a propiedades del objeto matemático estudiado, como la igualdad y la perpendicularidad de las diagonales o las simetrías del cuadrado.

[181] Comas Camps, *Cómo se enseña... (1923)*, op. cit., 142-147.
Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., pp. 31-32.
[182] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 205.
[183] El autor destaca este verbo en cursiva.
[184] Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio...*, op. cit., pp. 65-69.
Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., pp. 117-122.

Yves Chevallard[185] proporciona varios criterios explícitos para evaluar organizaciones matemáticas o didácticas. Los siguientes comentarios toman en consideración algunos de esos criterios. El empleo de materiales (concordante con las condiciones 'ecológicas' del periodo estudiado) no era un empleo banal para estos reformadores de la enseñanza de las matemáticas. Lo veremos en las propuestas de José María Eyaralar, una referencia privilegiada en el caso de la enseñanza de las matemáticas en aquellos años.

En primer lugar, para cada tipo de cuestiones matemáticas proponía materiales específicos. Así, para la geometría, Eyaralar[186] cita los materiales de Fröebel, Montessori y otros, para lo que denomina periodo 'de observación', mientras que para el periodo 'experimental' recomienda las figuras con movimiento.

Entre las preguntas que hace Chevallard para evaluar la pertinencia de las técnicas, figuran la facilidad de uso, el alcance, la fiabilidad en unas ciertas condiciones de empleo, y la posibilidad de evolucionar convenientemente. Los comentarios de Eyaralar acerca de la demostración del teorema de Pitágoras[187] son un indicativo del interés del autor por estas cuestiones:

> Mis alumnos construyen los cuadrados en hueco para que en ellos encajen las piezas 1, 2, 3, 4 y 5, que son separables.
>
> Claro es que caben grados en la aplicación del método, consistiendo el más sencillo en la simple inspección, el acoplamiento y equivalencia, y el segundo en la demostración de por qué coinciden segmentos y ángulos[188].

Otro ejemplo lo proporcionan los comentarios que realiza a propósito del disco EYA. En varias ocasiones recuerda que las figuras que pueden realizarse con él pueden dibujarse con el compás, aunque este instrumento, además de la mayor dificultad que supone su uso, no se presta igual a la invención por tanteos. Pero, sobre todo,

[185] Chevallard, Yves: «L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1999, **19(2)**, pp. 221–266.

[186] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit.

[187] Se trata de la demostración de la figura 8.4 (p. 559.

[188] Eyaralar Almazán, José María: «Enseñanza de la Geometría. El recortado de figuras». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **22**, pp. 52–53. Cita en p. 53.

> la complicación de las operaciones que exige y la *repugnancia a enseñarlas sin la explicación racional correspondiente*, hacen que esta manera de construir convenga relegarla a una edad más avanzada, 11 a 13 años, constituyendo así un *segundo grado* de esta misma enseñanza[189].

Ahora es la *tecnología didáctica* la que se pone de manifiesto en esta cita.

La preocupación por las condiciones institucionales en las que 'viven' estas técnicas se pone de manifiesto también cuando critica las demostraciones «dadas por algunos geómetras excesivamente facilitadores, que han desnaturalizado la Geometría materializándola al recurrir por ejemplo a la superposición de figuras o al movimiento real, cosa sólo disculpable en libros elementales como recurso pedagógico»[190].

Otra recomendación, contenida en el quinto de los principios formulados por Charentón[191], se refiere al abandono progresivo de las acciones reales sobre materiales, para avanzar hacia la abstracción progresiva. La evolución se advierte en la diferencia de tratamiento entre ambos grados de sus *Lecciones de Cálculo*, pues mientras que para el grado preparatorio en todas las lecciones hay un apartado importante de acciones reales con materiales, en el grado elemental en cambio, en las lecciones de aritmética, aunque sigue muy presente el recurso a la representación gráfica, el material está mucho menos presente.

A propósito del bloque tecnológico-teórico, entre los interrogantes que plantea Chevallard sobre las formas de justificación utilizadas, considera importante examinar si se promueven las justificaciones explicativas y el aprovechamiento de los resultados tecnológicos disponibles.

El uso de materiales va ligado al estudio de la relación entre diferentes figuras e incluso desempeña un papel importante en la validación de propiedades [192]. Son los casos en los que se solicita la justificación de la técnica empleada con el material, por ejemplo, para la obtención de la figura que se

[189] Eyaralar Almazán, *Disco 'EYA'*, op. cit, p. 6. La cursiva es nuestra.

[190] Eyaralar Almazán, José María: «Los conceptos fundamentales de la Geometría». *Revista de Escuelas Normales*, 1930, **75**, pp. 223–227. Cita en p. 223.

[191] Ver p. 372 del apartado 6.1.2

[192] Las propuestas de Eyaralar en relación con la validación han sido estudiadas en un trabajo anterior: Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «La

pretende construir: «¿Qué propiedades han de tener los lados mayores para que, doblando la hoja [de papel], se obtenga un cuadrado?»[193]. Entre los ejercicios que figuran al final del tema dedicado a los polígonos, destacamos el siguiente: «Si se toma una hoja de papel y se dobla por un vértice, de modo que dos lados consecutivos se superpongan, separando la parte de la hoja que queda sin cubrir, se obtiene un cuadrado. *¿Por qué?*»[194]. La técnica de recortar papel aparece siempre ligada al razonamiento matemático: «El recortado de figuras en papel es en la Escuela Primaria un análisis materializado»[195]; «El análisis y síntesis de las figuras lleva a descomponerlas y recomponerlas cortadas por sus líneas y planos principales, lindando con los puzzles geométricos»[196]. José María Eyaralar la contempla como un medio para no renunciar al razonamiento, cuando las demostraciones formales no son posibles:

> El recortado y acoplado de figuras tiene su principal aplicación en la obtención y la equivalencia de las figuras planas, respondiendo perfectamente al concepto de congruencia que todavía no ha penetrado hasta nuestras fosilizadas matemáticas elementales [...] Además, por su sencillez permite a los alumnos inventar (= encontrar) las fórmulas de las áreas de las figuras planas como resultado de un problema de trabajo manual[197].

En definitiva, se observa cómo el material puede contribuir a algunas de las funciones de la tecnología de una técnica, es más, podríamos considerar que su utilización se constituye así en parte de una técnica didáctica que explica y valida las técnicas matemáticas –respecto a ellas tendría una función tecnológica–, e incluso hace posible que una praxeología matemática pueda vivir en una institución; en palabras de Federico Landrove:

> creo que con lo dicho hay suficiente para darse cuenta de que el recortado y la investigación pueden ser las fuentes de una fecunda enseñanza

validación en la formación de maestros». En: M. Bosch y al. (Eds.), *Un panorama de la TAD*, tomo 10, pp. 283–298. Centre de Recerca Matemática, Bellaterra (Barcelona), 2011.

[193] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., pp. 9-10.

[194] Ibídem, p. 106.

[195] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 31.

[196] Ibídem, p. 385.

[197] Eyaralar Almazán, *Enseñanza de la Geometría...*, op. cit., p. 52.

> geométrica en asuntos que, por los métodos tradicionales, se creían reservados para los alumnos que han recibido una cierta y adecuada preparación en el Análisis[198].

7.3. El juego y la matemática recreativa como dispositivos didácticos

El interés por los problemas recreativos y por los juegos matemáticos ha ido unido al desarrollo de la propia matemática. La línea de separación entre matemáticas y juegos no está bien definida, las matemáticas son, de alguna manera, un juego; en esa frontera imprecisa entre matemáticas y juegos podemos citar los problemas curiosos, los pasatiempos matemáticos, los problemas de ingenio.

Un antecedente de las propuestas actuales de enseñanza de la matemática que conllevan la inclusión de problemas de carácter lúdico son las propuestas de reforma de la enseñanza de las matemáticas en el primer tercio del siglo XX, que propugnaban un aprendizaje más activo, y que planteaban la conveniencia del uso de juegos y de recreaciones matemáticas en el aula. Hallamos ejemplos en algunos de los autores que estudiamos, cuyo trabajo en pro de la mejora de la enseñanza de las matemáticas tenía como fin último la enseñanza primaria y también, en algunos, la enseñanza secundaria.

En la enseñanza secundaria quizá el ejemplo más representativo es Pedro Puig Adam, para el que la enseñanza media debía ser en los primeros años «marcadamente intuitiva», y conducir gradualmente a una enseñanza racional, aunque señalaba que en todos los grados se debía «despertar constantemente el interés del alumno y hacerle la enseñanza sugestiva y amena»:

> Si decimos, por ejemplo, a un grupo de niños estudiantes de Aritmética, que se les va a demostrar una regla para averiguar si un número es divisible por 3 o por 9, se nos contestará probablemente con un bostezo general (explícito o implícito); si en cambio se empieza, aunque

[198] Landrove Moiño, Federico: «La enseñanza de la geometría. La comprensión de la forma. La invención y el recortado de figuras». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **19**, pp. 269–271. Cita en p. 271.

> sea un poco espectacularmente, haciendo escribir a cada alumno un número, restar de él la suma de sus cifras, y se adivina del número resultante una cifra (distinta de 0), preguntando la suma de las que quedan, es probable que el alumno tenga deseos de explicarse el *truco*, y este deseo le servirá de estímulo para aprender sin perder detalle[199].

En la enseñanza primaria, María Carbonell, profesora de Escuela Normal que desarrolló casi toda su actividad en Valencia, se interesa por los juegos intelectuales para la enseñanza de las diferentes disciplinas, entre ellas la aritmética y la geometría. Por ejemplo, para la enseñanza del principio posicional del sistema de numeración sugiere el siguiente juego:

> El valor absoluto y relativo de las cifras puede dar lugar también a variados ejercicios. [...] Sirve también para este ejercicio el juego de bolos o billas. Colócanse en fila siete bolos de madera y se eligen los campeones que han de derribarlos con unas bolas o tiradores. Supongamos que derriba el segundo bolo, y dice: vale veinte; si derriba el tercero, vale ciento, y así hasta llegar a los millones[200].

Juego que copia de otro profesor de la Escuela Normal Superior de Burgos, Melchor García Sánchez, que anteriormente había propuesto con el mismo fin un juego parecido, el 'juego de las pirámides':

> Consta de catorce, siete para cada uno de dos bandos que han de actuar, y un taco ó billa prismática que sirve para el juego. La citada figura hace que no ruede demasiado. Las alturas serán proporcionales al objeto. Uno de los juegos consiste en que el niño, enunciando un número (valor absoluto), tira sobre las pirámides, y da valor relativo, según el lugar que ocupa la que derriba.
>
> — Dos.
>
> (Derriba la tercera, empezando por la derecha.)

[199] Puig Adam, Pedro: «Notas sobre Pedagogía Matemática». *Revista Matemática Hispano-Americana*, 1929, **4(2)**, pp. 129–131. Cita en p. 131.

[200] Carbonell, María: *Temas de Pedagogía*. Imp. Hijos de F. Vives Mora, Valencia, 1920, p. 208. Puede que María Carbonell no lo explicara bien o no había comprendido el juego; si el niño (como en la siguiente cita) había dicho, previamente, el número 2, al derribar el tercero valdría doscientos, no cien.

— Vale doscientos[201].

Aunque por lo general, hasta la década de 1920, muchos profesores de Escuela Normal, inspectores y maestros consideraban que los juegos que interesaban eran sobre todo los que involucraban actividad física, mientras que recomendaban que no se abusara de los que denominaban 'intelectuales', porque en ellos predominaba el ejercicio mental, pues consideraban un inconveniente la atención que requerían para jugar y el que se practicaran de forma sedentaria[202]. Y algunos continuaron pensando de ese modo; por ejemplo, Ezequiel Solana destaca las virtudes del juego para la educación intelectual, pero no así los juegos intelectuales sedentarios, ya que

> no son buenos para los niños los juegos sedentarios, *mayormente si exigen esfuerzos de atención y de cálculo*. Por eso deben proscribirse de las escuelas los juegos de cartas, de dominós, de damas, que obligan a un *esfuerzo mental semejante al del estudio*[203].

Una opinión muy diferente es la de otros profesores de Escuela Normal que se ocuparon de la enseñanza de la Matemática en la década de los años treinta y la anterior, entre los que podemos citar, en primer lugar, a José M.ª Eyaralar[204], quien calificaba como los «verdaderos problemas» a los lúdicos o recreativos y los considera no sólo interesantes, sino de entre los que «se dirigen directamente a hacer grata la enseñanza»; éstos serían, a diferencia de otros de carácter general, «especiales de la Matemática»[205].

La variedad de actividades que son consideradas juego por este autor puede relacionarse con la dificultad ya apuntada de determinar el límite entre

[201] García Sánchez, Melchor: «Procedimientos de enseñanza». *La Escuela Moderna*, 1904, **155**, p. 89.

[202] Payá Rico, Andrés: *La actividad lúdica en la historia de la educación española contemporánea*. Tesis doctoral, Universitat de Valencia, Valencia, 2007. Esta obra, en su capítulo 4, proporciona una perspectiva del papel que otorgaban al juego, para las didácticas específicas o la formación intelectual, pedagogos y algunos profesores normalistas, en la época que estudiamos y en los años anteriores y posteriores.

[203] Solana, Ezequiel: *Curso completo de Pedagogía*. El Magisterio Español, Madrid, 1925, p. 208. La cursiva es nuestra.

[204] Carrillo Gallego y Sánchez Jiménez, *Aprender matemáticas jugando...*, op. cit.

[205] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 193.

lo lúdico y lo que no lo es. El material utilizado es un recurso que puede conferir carácter lúdico o recreativo a un problema[206]; por ejemplo, el cálculo de la diferencia entre dos cuadrados consecutivos puede tener un carácter lúdico cuando se plantea como la ampliación de un tablero de ajedrez[207].

Los juegos y problemas lúdicos que plantea son muy variados, por diferentes motivos: el material usado; la similitud con juegos populares o de mesa; la parte de la matemática involucrada; la estructura o las reglas; el hecho de ser individuales o colectivos; el que conlleven o no competición entre los niños; que se desarrollen en la mesa, en el aula o al aire libre...

Aunque, en general, se le concedía importancia a las actividades más o menos recreativas, como aquellas que conllevan el uso de material, no todos los profesores de Escuela Normal les dedican la misma atención.

Un indicador es la presencia de obras de matemática recreativa en las referencias bibliográficas de los libros que escriben. Así, mientras que Margarita Comas, por ejemplo, no cita ninguna obra de este tipo, Luis Paunero en su extensa bibliografía cita apenas la obra de Jean Macé[208], y Felipe Sáiz en su libro de la década de 1950[209] incluye hasta cuatro obras con este carácter, tres de ellas citadas en la *Metodología* de Eyaralar. En cuanto a Eyaralar no solo incluye varias obras que contemplan actividades matemáticas recreativas en su *Metodología*, sino que ya en 1922, en las referencias bibliográficas del *Nuevo Tratado de Aritmética*, había incluido el libro *Recreations Mathématiques*, de Rouse Ball[210].

Incluso obras que no estaban dedicadas a este tipo de problemas, y que también se citan, como la *Geometría Inventiva*, de Spencer, contienen problemas geométricos cercanos a la recreación matemática:

[206]En este apartado nos centramos en las actividades o problemas verdaderamente recreativos, más allá de que usen o no material.

[207]Eyaralar Almazán, José María: *Aritmética Intuitiva*. Reus, Madrid, 1932, p. 358. Ver figura 8.17, p. 613.

[208]Macé, Jean: *Aritmética del abuelo. Historia de dos vendedores de manzanas*. Traducido por G. Fraile y D. Tejada. Imprenta de T. Fortanet, Madrid, 1868. Traducido por G. Fraile y D. Tejada. Eyaralar cita el original en francés: L'Aritmetique du Grand Papa.

[209]Sáiz Salvat, Felipe: *Geometría y ampliación. Didáctica. Trigonometría*. El autor, Málaga. 195?. En la Biblioteca Nacional figura sin fecha de edición, no obstante sabemos que la obra es posterior a 1933 (ver p. 29 del apartado 1.5).

[210]Rouse Ball, W.W.: *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*. J. Hermann, París, 1916. Primera edición de 1909.

> Un filósofo tenía en su habitación una ventana de un metro en cuadrado, por la cual entraba demasiada luz; tapió la mitad de ella, y sin embargo le quedó una ventana cuadrada de un metro de alto por uno de ancho. Explíquese cómo lo hizo[211].
>
> Trácese una figura formada por tres cuadrados que se toquen en un ángulo, así [dibujo de tres cuadrados unidos por un lado formando una L]; y dígase si es posible dividir dicha figura en cuatro partes iguales y semejantes[212].

Otros autores también describen juegos matemáticos y en general actividades recreativas, como Francisco Romero o Felipe Sáiz Salvat, que recoge en sus obras muchos de los materiales y juegos que Eyaralar describe en su *Memoria*[213] y posteriormente en la *Metodología*[214].

Se hace por ello necesaria una reflexión sobre el papel que se le asignaba a este *dispositivo didáctico* en las propuestas citadas, es decir, qué *funciones* tenía adjudicadas, pues la calidad de la reflexión por parte de los autores sobre dichas funciones influirá a la hora de formular sus respectivas propuestas didácticas y en cómo estén fundamentadas. Esta reflexión no sólo debe abarcar cuestiones metodológicas; también es importante identificar fines concretos en la utilización de este recurso. Previamente vamos a enumerar los tipos de problemas o actividades matemáticas lúdicas, y qué factores se consideraba que conferían un carácter recreativo a una tarea matemática.

7.3.1. Tipos de actividades matemáticas recreativas

Algunas propuestas sobre la enseñanza de la matemática, en particular algunas obras de *Metodología*, incluyen relaciones de actividades de esta naturaleza, muchas de ellas planteadas como juegos, unas veces en relación con las diferentes ramas de la matemática, fundamentalmente aritmética y geometría, otras clasificadas en función del nivel educativo para el que van dirigidas; también citan los ejemplos contenidos en propuestas de pedagogos

[211] Spencer, W.J.: *Geometría inventiva*. D. Appleton y Compañía, Nueva York, 1882, p. 71.
[212] Ibídem, p. 78.
[213] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit.
[214] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit.

relevantes, como Decroly, a menudo ligadas al uso de materiales diseñados por éstos.

En este apartado vamos a identificar en las obras consultadas factores que, a juicio de sus autores, convierten en recreativa una actividad matemática, entendiendo que en una misma tarea pueden concurrir, a menudo lo hacen, varios de estos factores[215]:

- *Pasatiempos y acertijos o «problemas curiosos»*

Un grupo importante lo constituyen los que podemos denominar, en general, pasatiempos y acertijos o problemas curiosos: cuadrados o triángulos «mágicos»[216], productos notables o potencias curiosas, que Eyaralar recomienda para hacer amena la práctica del cálculo.

Este tipo de pasatiempos lo vemos también en la obra de Francisco Romero[217], la cual contiene un último capítulo, denominado «Curiosidades matemáticas», dedicado a los productos curiosos. Alguno de ellos, como el siguiente[218], extraídos de la obra de Estalella[219], citada también por Eyaralar:

$$\begin{aligned} 1 \text{ x } 8 + 1 &= 9 \\ 12 \text{ x } 8 + 2 &= 98 \\ 123 \text{ x } 8 + 3 &= 987 \\ 1234 \text{ x } 8 + 4 &= 9876 \\ 12345 \text{ x } 8 + 5 &= 98765 \\ 123456 \text{ x } 8 + 6 &= 987654 \\ 1234567 \text{ x } 8 + 7 &= 9876543 \\ 12345678 \text{ x } 8 + 8 &= 98765432 \\ 123456789 \text{ x } 8 + 9 &= 987654321 \end{aligned}$$

[215] Sánchez Jiménez, Encarna: «La matemática lúdica en el aula». En: *XV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Ponencia invitada. FESPM. Publicación en CD-rom, Gijón, 2013.

[216] Números dispuestos formando un cuadrado (triángulo), que cumple la propiedad de que si se suman los números de cualquier columna, fila o diagonal (lado), la suma es siempre la misma.

[217] Romero Carrasco, Francisco: *Metodología de las Matemáticas. Procedimientos de cálculo mental y de cálculo escrito rápido*. Tip. y Lib. de A. Arqueros, Badajoz, 1933.

[218] Ibídem, p. 240.

[219] Estalella Graes, Josep: *Ciencia recreativa, enigmas y problemas, observaciones y experimentos, trabajos de habilidad y paciencia*. Gustavo Gili, Barcelona, 1918.

La *Metodología* de Eyaralar contiene otras curiosidades como cuadrados mágicos multiplicativos o potencias curiosas.

También se incluyen en este apartado los problemas «de adivinanzas»[220], llamados hoy de «magia matemática», tales como: adivinar en un número una cifra borrada; adivinar la edad; adivinar un número pensado, etc., de los que figuran bastantes ejemplos tanto en la *Metodología* de Eyaralar como en su segunda *Aritmética*.

Dentro de los «problemas curiosos» están también problemas cuyo enunciado despierta de inmediato el interés. Es el caso de aquellos que se perciben ya de entrada como interesantes, quizá porque se prevé que el resultado choque con nuestra intuición o con la respuesta que daríamos en un primer momento. Aquí entrarían también aquellas cuestiones que se proponen como «de pega», que normalmente podemos resolver sin lápiz ni papel, y que muchas veces pueden ser propuestos después por los alumnos a otras personas fuera de la escuela 'de forma perversa'. A menudo estos problemas ayudan a poner en evidencia y descartar supuestos implícitos: «Un caracol asciende cada día 5 m. por una pared; por la noche se duerme, y su propio peso le hace bajar 2 m., ¿cuántos días necesita para llegar a una maceta que está en una ventana a 10 m. del suelo?»[221].

- *Problemas relacionados o confeccionados a partir de anécdotas, biografías o extraídos de la Historia de la Matemática*

Una fuente importante de inspiración para los llamados «problemas curiosos» es la Historia de la Matemática. Eyaralar cita obras con fines didácticos que incluyen problemas recreativos y que se remontan a la Edad Media, como el tratado de Alcuino de York *Propositiones ad acuendos iuvenes*, que contenía una serie de problemas matemáticos y de lógica para la formación de los jóvenes: «y en cuanto a los problemas en general, el carácter de los expuestos de Alcuino, repetición de indios, egipcios y griegos, nos muestra el carácter de entretenimiento y de apelación al ingenio que deberán tener los problemas que se propongan en las escuelas»[222].

[220] Sáiz Salvat, *Geometría y ampliación...*, op. cit., p. XXI (Metodología Didáctica).
[221] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 78.
[222] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 123.

Además, Eyaralar propone que toda lección contenga algún relato o anécdota relacionado con la matemática o sus protagonistas[223], pues consideraba que «la Historia de la Matemática, la biografía de sus sabios y las anécdotas a ellos referentes son del más alto valor educativo en los últimos años de la Escuela»[224]. Así, encontramos en algunas obras de este periodo problemas famosos, muchas veces acompañados de anécdotas que aumentan el interés por ellos, como el propuesto por el matemático Édouard Lucas, que vemos en el libro de Francisco Romero:

> Eduardo Lucas, matemático francés, que asistió a un Congreso de Matemáticas, propuso a los congresistas, durante una sobremesa, el siguiente problema: está establecida una línea regular de vapores entre el Havre y New York; sale de cada uno de los puertos un vapor todos los días a las doce de la mañana, empleando en la travesía siete horas [días]; el que sale hoy del Havre, ¿cuántos verá de la misma compañía hasta llegar a New York?[225]

También hallamos numerosos ejemplos de historietas o relatos ficticios que, según Nelson, «reemplaza lo que en las escuelas norteamericanas se conoce con el nombre de *lectura suplementaria*»[226]. Eyaralar por su parte cita como lectura recomendada el libro *Arithmétique du Grand Papa*, de Jean Macé[227], que se hallaba traducido al español.

- *Problemas topológicos o geométricos simples, presentados como puzles geométricos*

Este tipo de pasatiempo geométrico, a menudo basado en la composición y descomposición de figuras, es muy interesante, por cuanto contribuye a

[223]Ibídem, pp. 142 y 399. El libro Aritmética Inventiva, de E. Nelson, citado en varias ocasiones por Eyaralar, efectivamente cumple con este principio, incluyendo muchas veces 'relatos' inventados, basados en la Historia de la Matemática.

[224]Ibídem, p. 234.

[225]Romero Carrasco, *Metodología...*, op. cit., pp. 70-71.

[226]Nelson, Ernesto: *Aritmética Inventiva*. Appleton y Cía, Nueva York, 1918. Primera edición de 1906, p. V.

[227]Macé, Jean: *L'Arithmétique du grand-papa. Histoire de deux marchands de pommes*. I. Hetzel et Cie, París, 3.ª edición.

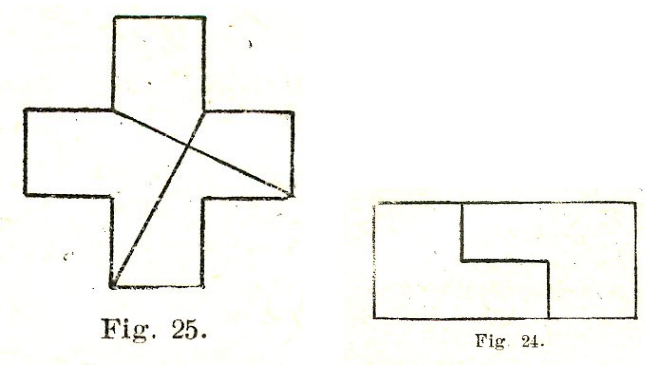


Figura 7.13: Eyaralar. Puzles geométricos

educar la capacidad para percibir relaciones de forma y magnitud: «El análisis y síntesis de las figuras lleva a descomponerlas y recomponerlas cortadas por sus líneas y planos principales, lindando con los puzles geométricos»[228]. Hay que señalar que parte de la atracción que ejercen estos pasatiempos es puramente 'estética', en consonancia con la preocupación por los aspectos estéticos de las matemáticas, propia de las ideas de la Escuela Nueva. En la figura 7.13, hay dos ejemplos de este tipo de puzles; en ellos hay que construir un cuadrado, a partir de un rectángulo o de una cruz, respectivamente.

- *Juegos tradicionales: de mesa, de patio...*

Los juegos sociales clásicos, tanto los de mesa como los que se juegan en espacios más amplios, son una fuente inagotable para proponer problemas lúdicos interesantes. Eyaralar y Sáiz Salvat citan los basados en los naipes, los dados, la lotería, el tiro al blanco, el dominó u otros juegos habituales para los niños.

Eyaralar considera conveniente recoger los juegos regionales de carácter matemático, que considera los más adaptados y gratos para los niños de cada localidad: columpio, tejo, bolos, discos, coto, pares o nones..., y sugiere que el maestro introduzca las variantes que se le ocurran[229].

En la *Memoria* que presentó a la JAE tras su estancia en Francia, afirma que echa de menos en la enseñanza francesa los juegos de cálculo colectivos

[228] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 358.
[229] Ibídem, p.156.

y cita como ejemplo las obras de aritmética de Palau Vera y la *Aritmética Inventiva*, de Nelson[230].

- *Juegos de competición*

El hecho de que un problema se proponga a los alumnos promoviendo alguna forma de competición entre ellos, individualmente o por equipos, como *«¿Quién encuentra antes la solución a...?»* aporta una componente lúdica. Por ejemplo, las competiciones de cálculo mental, en las que se hace que importe la rapidez en la respuesta, con el fin de que los niños se vean animados a desarrollar y utilizar estrategias basadas en las propiedades de los números y de las operaciones. Eyaralar considera que juegos como el siguiente contribuyen a dar un carácter deportivo a la enseñanza:

> *Subir la escalera.*- Los niños se dividen en dos bandos. Sobre la pizarra se dibuja una doble escalera, una para cada bando. En cada escalón se indica una operación de dificultad creciente. Se supone que un bando sube un escalón cuando encuentra la solución exacta. Se trata de alcanzar la cúspide antes que el otro bando[231].

Para este autor el ideal de la enseñanza de la matemática sería hacer de ella «un campeonato continuo en que la rapidez, la exactitud, la facilidad, la precisión y el rigor lógico, la perfección, en una palabra, vayan aumentando sucesivamente de acuerdo con las características que como arte y como ciencia le hemos asignado»[232].

En el apartado de la *Metodología* dedicado a la historia de la matemática comenta la celebración de *torneos matemáticos* en Italia en el s XVI[233].

Por su parte, Sáiz Salvat también cita entre los juegos matemáticos los «desafíos» entre grupos de alumnos y cita los juegos educativos de cálculo usados en la clase segunda de párvulos del grupo escolar Baixeras, que funcionaba como escuela práctica de la Normal, con los que a veces se hacían competiciones[234].

[230] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 14.
[231] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 154.
[232] Ibídem, p. 161.
[233] Ibídem, p. 113.
[234] Sáiz Salvat, Felipe: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental.* Imp, Mercé, Castellón, 1931, pp. 239-240.

- *Tareas que conllevan uso de material*

Lo lúdico es evocado por la utilización de cualquier clase de material, por simple que éste sea: monedas, palillos, fichas, fichas de dominó, tableros de juegos usuales..., y por supuesto también el material involucrado en los juegos con potencial matemático. Quizá el recurso más citado sea el papel, que permite plantear muchas situaciones con contenido matemático asociadas a las acciones de plegar, recortar, componer y descomponer. Pero no solo eso: «Se tiene una hoja rectangular de 50 por 40 cm. ¿En qué sentido es preciso arrollarla para obtener el cilindro de mayor volumen?»[235].

Entre los juegos que conllevan el uso de materiales, se encuentran los incluidos en algunos métodos, como el método Froebel o el método Decroly. Margarita Comas describe en su obra *Metodología* algunos los materiales de Montessori, de Decroly, de Winnetka, incluso publica un libro exponiendo el método y el material Mackinder[236]. En muchas ocasiones se trata de materiales en forma de tarjetas para establecer correspondencias entre un número y una colección con ese cardinal (como en el de la figura 7.14 de la p. 491), o entre una operación sencilla –normalmente contenida en la tabla de sumar o en la de multiplicar– y el resultado. Sáiz Salvat denominaría después «juegos educativos»[237] a las actividades que pueden realizarse con este material, aunque apenas tienen las características de los juegos propiamente dichos.

Hay que resaltar que muchos de los materiales contenidos en estas propuestas, y recogidos por Margarita Comas sobre todo, no sirven a otra función que la de 'usar material' pues la mera presencia de éste puede ser motivador para los niños (las actividades que permiten no varían sustancialmente y las *«variables didácticas»* no se ven afectadas, se trata de *variables de gestión*[238]), o bien son materiales para aliviar la labor del maestro, aunque de cara al niño no suponga cambio alguno en el tipo de tarea que se le propone, ni en la matemática implicada: «otra manera de simplificar es tener de antemano preparadas las respuestas a los ejercicios que los niños realizan y

[235] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 125.

[236] Comas Camps, Margarita: *El método Mackinder*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1930.

[237] Sáiz Salvat, *Geometría y ampliación...*, op. cit., p. XXI (Metodología Didáctica).

[238] Fregona y Orús Báguena, *La noción de medio...*, op. cit.

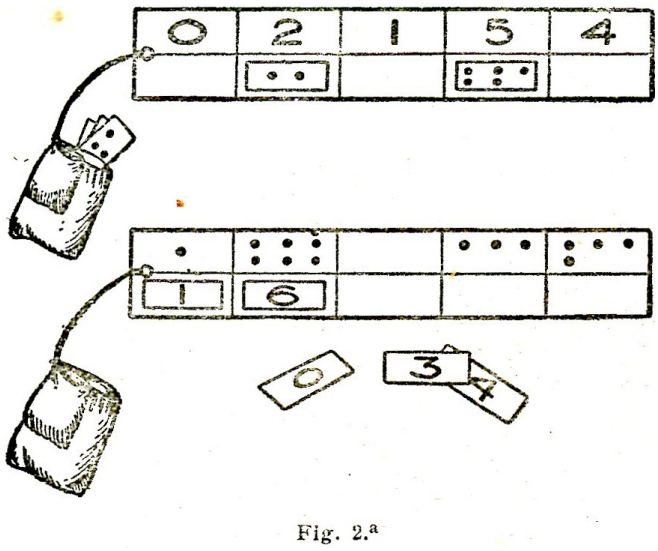


Figura 7.14: Comas. Material de numeración

que éstos van a buscar, una vez terminado su trabajo, para comprobar por sí mismos los resultados»[239].

Las propuestas de uso de materiales han sido ya estudiadas en el apartado anterior.

- *Juegos de dramatización*

También en la vida cotidiana hallamos innumerables situaciones susceptibles de ser modelizadas matemáticamente, muchas de las cuales, por el interés intrínseco que generan, son percibidas por los alumnos como si de auténticas recreaciones matemáticas se tratara. Entre los juegos o los problemas que conllevan la dramatización de situaciones, figuran *La Tienda* o *El Vendedor* (dinero, facturas), *El Banco* (descuentos e intereses), *La Casa* y *El Tranvía* (contabilidad), etc[240].

Es este un recurso que va perdiendo importancia, según Eyaralar, a medida que avanza el grado en la enseñanza, aunque destaca que según el Plan que propone Thorndike y que siguen muchas escuelas estadounidenses, incluso en el tercer grado, en el que la enseñanza es sistemática y racional, se

[239] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., p. 27.
[240] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 150, 154, 199.

usan la dramatización y los proyectos; aclara en una nota que este Plan se adapta a las Bases presentadas a las Cortes para niños de 5 a 14 años[241].

En cambio, lo que Sáiz Salvat entiende por 'dramatización' es algo diferente; lo que los niños personifican no son papeles de personajes reales, sino elementos de una proposición: «Un niño representa el 3; otro el 2 y otro el 1; otro escolar personifica el = colocándose entre el 3 y el 2 separando éste del uno por otro que se tiene por el más de la suma»[242].

7.3.2. Función de la matemática recreativa en la enseñanza

En el apartado 7.2.1 (p. 454) hemos recogido la cuestión general y sus derivadas que los profesores que estamos estudiando se plantean en relación con la enseñanza de la matemática. Para estas cuestiones, los juegos y, en general, la matemática recreativa pueden constituir una de las respuestas, tal como se ha comentado en dicho apartado. Veamos los tipos de *tareas didácticas* en las que se propone que intervengan los juegos y los problemas recreativos y algunos *gestos* asociados a este dispositivo, lo que permitirá determinar sus posibles *funciones*[243]:

- *Implicación en la resolución de las tareas. Hacer la enseñanza activa e intuitiva*[244].

Eyaralar considera que la enseñanza de la matemática ha de ser grata, activa e intuitiva. Considera el juego, junto con la dramatización, la actividad manual y la invención, procedimientos para hacer la enseñanza activa, «notando cómo se confunde con la enseñanza intuitiva cuanto más nos aproximamos a la parte puramente matemática»[245]. Cita las anécdotas, las

[241] Ibídem, pp. 184-186.

[242] Sáiz Salvat, *Geometría y ampliación...*, op. cit., p. XXI (Metodología Didáctica).

[243] Para estructurar estas funciones, hemos tomado como referencia Sánchez Jiménez, Encarna: «Problemas Recreativos como recurso en la Enseñanza de las Matemáticas». Conferencia plenaria invitada. VIII Jornadas de Educación Matemática de la Región de Murcia. Murcia: Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia. Publicación en CD-rom, 2012.

[244] Son tareas que estos autores suelen comentar conjuntamente.

[245] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 198.

lecturas y la curiosidades numéricas a las que hemos hecho referencia antes, como medios para hacer la enseñanza grata. Entre los *gestos didácticos* que recomienda en los «Consejos acerca de una lección de Matemática»[246], figura dar forma sugestiva y aun misteriosa a los problemas.

Como los juegos y los problemas recreativos suelen demandar una manera más personal de abordarlos, reclaman un mayor compromiso para resolverlos por parte del alumno y condicionan su relación emocional con las matemáticas. Nelson ya consideraba los juegos como «un complemento indispensable de la enseñanza», que «muchas veces convierten en deleitosos, ejercicios que se mirarían con horror si les faltase el aspecto atractivo»[247].

De la dramatización, dispositivo que Eyaralar vio utilizar en las escuelas francesas durante su estancia en aquel país, destaca lo siguiente:

> Así como la Geografía y la Historia encuentran un agradable y útil complemento en las lecturas geográficas e históricas, la enseñanza del cálculo también la encuentra en el libro de Monsieur Macé, titulado *L'Aritmétique du grand-papa, on [sic] Histoire de deux marchands de pommes*, escrita en 1862 como un cuento de hadas, llena de imaginación, de gracia y colorido, en un lenguaje grato a los niños, no teniendo que envidiar nada a los cuentos de Perrault[248].

Un *gesto* propuesto en la misma relación anterior y que contribuye a la función de excitar la imaginación del niño es el de incluir una anécdota o relato en cada lección: «En toda lección debiera darse una de estas anécdotas, y el libro de Matemáticas debiera tener narraciones referentes a ella»[249]. Este consejo sería recogido también por Sáiz Salvat en su relación homóloga[250] en una época posterior.

Otro de los *gestos* que contribuyen, en opinión de Eyaralar, a aumentar el interés del alumno y así hacer la enseñanza más activa es presentar los

[246] Ibídem, pp. 396-400.

[247] Nelson, *Aritmética inventiva*, op. cit., p. VI .

[248] Eyaralar Almazán, *La enseñanza... francesas*, op. cit., p. 27.

[249] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 142.

[250] Sáiz Salvat, *Geometría y ampliación...*, op. cit., pp. XXII. (Metodología Didáctica). Los consejos que proporciona este autor para preparar una lección son un extracto de los que hay en el libro de Eyaralar, que figura entre la bibliografía recomendada en aquella obra.

problemas de manera que «hieran la imaginación»; por ejemplo, el problema de la duplicación (geométricamente) del cuadrado sugiere plantearlo así: *«Un propietario tenía un estanque cuadrado en cuyos vértices había cuatro árboles magníficos, y quería duplicar la extensión del estanque que le resultaba pequeño, conservándole la forma de cuadrado..., y respetando los árboles. ¿Cómo se las arreglaría?»*[251].

Las actividades matemáticas pueden desarrollar el valor de la cooperación: una buena parte de los problemas recreativos y los juegos tienen carácter cooperativo, incluso cuando se proponen a los alumnos mediante el *gesto* consistente en promover alguna forma de competición entre ellos, individualmente o por equipos. Paunero atribuye dos cualidades a este tipo de actividades, la curiosidad y la 'lucha'[252], mientras que Eyaralar apela al carácter 'deportivo' que debe tener la enseñanza de la matemática. Esto tendría que ir acompañado de otros *gestos* del profesor, como elegir cuestiones adecuadas al nivel del alumno, fijar la 'marca' que hay que superar y que se posea la seguridad de haber logrado la meta[253].

- *Comprender, descubrir y validar propiedades*

De hecho, muchos de los problemas que aparecen en los concursos matemáticos o en libros de matemática recreativa vienen propuestos como problemas de validación.

Los puzles geométricos son un buen contexto para poner en práctica técnicas de composición y descomposición, tan ligadas al cálculo de áreas y otras propiedades. Como ejemplo tenemos el problema anterior de duplicar un estanque, que hace intervenir propiedades del cuadrado, o las demostraciones del *teorema de Pitágoras*, como la que recogemos en la figura 8.4 (p. 559), que adoptan la forma de puzles geométricos, que se pueden confeccionar en cartulina gruesa o madera fina. Para el caso particular de un triángulo rectángulo e isósceles, encontramos una demostración intuitiva, que se atribuye al propio Pitágoras (figura 7.15, p. 495)[254]:

[251] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 142.

[252] Paunero Ruiz, Luis: *Ensayo. Las matemáticas en la educación.* Tipografía Heliópolis, Sevilla, 1935, p. 108.

[253] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 159-161.

[254] Ibídem, pp. 88-89.

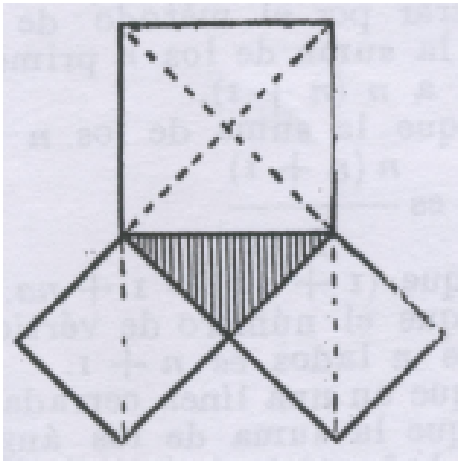


Figura 7.15: Eyaralar. Demostración intuitiva del teorema de Pitágoras

Paunero relaciona los puzles con los procesos de análisis y síntesis, relacionados con la resolución de problemas y también con la demostración[255].

Pero no solo en el ámbito de la geometría y del uso de materiales las matemáticas recreativas pueden satisfacer las funciones de descubrimiento y de validación. El siguiente ejemplo, que figura en las dos *Aritméticas* de Eyaralar y también en su libro sobre los problemas, se sigue proponiendo en la actualidad, con carácter lúdico, para trabajar propiedades de las fracciones:

> Un árabe, al morir dejó a sus hijos 17 camellos que debían repartirse como sigue: Al mayor, la mitad; al segundo, 1/3; al pequeño 1/9. No pudiendo entenderse, acudieron al cadí, quien les regaló un camello, hizo la repartición y volvió a quedarse con el camello regalado. Explicación de este hecho[256].

En ocasiones un problema lúdico viene propuesto como una situación de validación:

> Un vendedor tiene 30 naranjas y las pregona a 2 por 10 cts.; otro tiene otras 30 naranjas y las vende a 3 por 10 cts. Para evitar compe-

[255] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 37.

[256] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 297, y en *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 79.

> tencias, reúnen las naranjas, y las venden a 5 por 20 cts., con lo que creen cobrar lo mismo. *Comprobar el error y explicarlo*[257].

El juego promueve en general el desarrollo del razonamiento inductivo, el que usamos para formular hipótesis generales a partir de la observación de algunos casos particulares; muchos pasatiempos apelan a la intuición, pero para generalizar hemos de poner en marcha un proceso de validación. Es el caso de las curiosidades aritméticas (productos notables, etc.) ya citadas.

Otro ejemplo en el que una actividad matemática recreativa sirve a la función de trabajar la *tecnología de una técnica* es el relativo al «juego de la multiplicación» o a la «multiplicación manual»[258]. En él se propone un juego que hacen los niños colectivamente o un juego individual con las manos, respectivamente, para efectuar productos contenidos en la tabla de multiplicar. De ese modo no sólo se automatizan los resultados de la tabla, sino que cuando se plantea –en el caso de los alumnos normalistas– la justificación de la 'técnica' (juego), el juego cumple la función de motivar un proceso de validación.

También las historias tienen la función de ayudar a comprender ciertos contenidos matemáticos; el libro de Jean Macé y las historias de *El pequeño matemático*, incluidas en el libro de Nelson, aluden a los principios del sistema de numeración posicional y ayudan a comprenderlos, lo mismo que *El rebaño de Juanillo*, de Eyaralar[259].

- *Practicar o reforzar algoritmos y en general técnicas*

Los juegos llamados 'de conocimiento' o 'de práctica' se diseñan para practicar y reforzar automatismos o técnicas que hay que rutinizar. Normalmente se presentan como juegos de competición entre dos o más alumnos y es habitual que se inspiren en juegos tradicionales, muchas veces juegos de mesa, y suelen demandar por parte de los jugadores algún tipo de operación aritmética o algebraica, frecuentemente cálculo mental, o a veces el conocimiento de propiedades, geométricas o de otro tipo.

[257] Ibídem, op, cit., p. 79. La cursiva es nuestra.
[258] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 155-156.
[259] Ibídem, pp. 238-242.

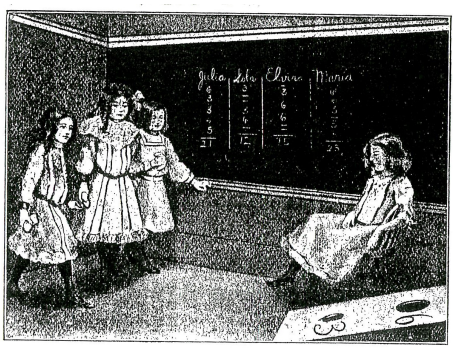


Figura 7.16: Nelson. Juego aritmético

Eyaralar suele inspirarse en juegos conocidos, como los bolos, la lotería o juegos de naipes o de mesa, pero también describe otros de diseño diferente:

> *Los discos.*- Una tabla con tres agujeros circulares de distinto diámetro [...] se coloca inclinada mediante un caballete. Los niños tiran discos desde cierta distancia, cada agujero tiene un coeficiente numérico para calcular el número de puntos[260].

En la *Aritmética Inventiva*, de Nelson, libro que Eyaralar recomienda para buscar ejemplos, encontramos un juego muy similar, en el que puede estar inspirado éste. La fotografía de la figura 7.16 corresponde a ese libro[261].

Otro juego, *Las anillas*, que consiste en ensartar anillas de diferente tamaño en una varilla clavada al suelo, es también parecido a uno de Nelson, aunque aquí se suman valores y allí representan órdenes de unidades[262].

Los problemas de adivinar números, basados en la estructura del sistema de numeración o en las propiedades de las operaciones, proporcionan ocasión de practicar técnicas de cálculo, además de profundizar en la comprensión de propiedades. Hay que señalar que los cuadrados mágicos y el resto de polígonos mágicos, productos notables, potencias curiosas... no sólo sirven para practicar automatismos y hacer más amena la automatización de los cálculos, favoreciendo así el *trabajo de la técnica*; se utilizan conocimientos

[260] Ibídem, pp. 149-150.

[261] Nelson, *Aritmética inventiva*, op. cit., pp. 56-57.

[262] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 149. Nelson, *Aritmética inventiva*, op. cit., pp. 44-45.

matemáticos para conseguir una mejor estrategia y favorecer las posibilidades de llegar a la solución.

- *Trabajar estrategias generales de resolución de problemas*

Otros juegos pretenden trabajar estrategias generales de resolución de problemas, más que conocimientos o técnicas matemáticas concretas. Estos juegos de estrategia están menos presentes en cuanto tal en las obras analizadas, si exceptuamos la de Eyaralar. Por ejemplo el siguiente problema responde a la estrategia de «empezar por el final e ir marcha atrás»:

> Un hortelano lleva manzanas. Encuentra sucesivamente a 3 guardias, y da al primero la mitad de las manzanas que lleva más 2: al segundo la mitad de las que le quedan más 2, y al tercero la mitad de las sobrantes más 3. Se queda con una manzana. ¿Cuántas llevaba?[263].

Aunque hay muchos ejemplos que podrían usarse en ese sentido y también como juegos de práctica. El siguiente ejemplo, permite reflexionar sobre la estrategia concreta para ganar –resolver el problema 'marcha atrás', es decir, partiendo de la solución–, y a la vez ejercitar el cálculo mental:

> *Llegar a 100.*- Dos niños se desafían a ver quien [sic] llega antes a 100 por sumas alternativas y sucesivas, añadiendo cada niño a la suma alcanzada por el anterior un número menor que 11[264].

No obstante, en los juegos dirigidos a alumnos de Escuela Normal, se pide «demostrar por qué», lo que supone, de hecho, analizar la estrategia, aunque estos mismos juegos se pueden plantear tal cual a niños y limitarse a ejercitar el cálculo mental:

> JUEGO DE CLASE.- *Adivinar dos cifras pensadas.* Duplíquese una, añádase 5 al resultado, multiplíquese por 5 y añádase la otra

[263] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op, cit., p. 78.
[264] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 156.

> cifra. Restando 25 del resultado se obtiene un número cuyas cifras son las buscadas. Demuéstrese[265].

Junto a las funciones citadas, podríamos decir otras, como facilitar el acercamiento a ciertos contenidos que no se abordan de manera sistemática o explícita en el programa. Por ejemplo, el siguiente problema –planteado en este caso para resolver algebraicamente (no mediante cálculo diferencial)– supone un acercamiento, aunque sea intuitivo, a los problemas en los que se trata de determinar valores máximos y mínimos: «El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demostrar que si un diamante se divide en dos, hay depreciación, y que ésta es máxima cuando los trozos son iguales»[266].

7.3.3. Actualidad de los problemas lúdicos

En definitiva, son varios los profesores de Escuela Normal que apuestan de manera decidida por hacer la enseñanza intuitiva en los primeros niveles. Pero también alguno advierte del peligro de emplear estos recursos sin una idea clara de cuál ha de ser el fin de la educación matemática; la matemática lúdica tiene que ser un medio al servicio de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, no un fin en sí misma. Eyaralar, consciente de que la motivación por sí sola no garantiza el aprendizaje matemático, previene contra una posible utilización aislada de los juegos y hace alusiones contra lo que él llama *exceso de intuicionismo*: «El juego en que la actividad se desarrolle puede tener el inconveniente de borrar, por su mayor interés, la parte de aprendizaje matemático que contiene, y esto habrá de tenerlo en cuenta el maestro para evitarlo»[267].

Las propuestas estudiadas continúan siendo de actualidad. Hoy hay colectivos importantes de profesores de matemáticas que confieren gran im-

[265] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 82. En este libro incluye muchos juegos que pueden calificarse a la vez como de estrategia y de conocimientos, puesto que la búsqueda de la solución, además de ahondar en la comprensión de propiedades (estructura del sistema de numeración, órdenes de unidades, propiedades de las operaciones, etc.), proporciona ocasión de practicar técnicas de cálculo.

[266] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 185.

[267] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 333.

portancia en el estudio de las matemáticas a la matemática recreativa y la integran en las actividades de aula, bien como parte de secuencias didácticas, bien dedicándoles sesiones específicas; también son muchos los profesores que organizan competiciones matemáticas entre sus alumnos, o que los animan a participar en torneos que se celebran a distinto nivel.

En el caso de Eyaralar se encuentran propuestas de uso de actividades y problemas recreativos para la enseñanza primaria, así como para la formación matemática de los maestros; muchos de sus ejemplos se hallan en obras actuales sobre matemática lúdica y siguen siendo propuestas en competiciones matemáticas, tanto nacionales como extranjeras. Por ejemplo, problemas como los de adivinar números y en general los de 'magia matemática' y muchos de los que hemos mencionado, o éstos otros, que Eyaralar calificaba de «problemas curiosos»[268], los vemos aparecer –con un enunciado idéntico o muy similar– en obras de matemática recreativa y en concursos recientes para estudiantes de primaria y de secundaria:

> Cómo obtener 7 l. de agua con dos cubos: uno de 5 l., y otro de 3.
> 5+ 0; 2 + 3; 0 + 3 [sería 2 + 0]; 0 + 2; 5 + 2[269]

> Dos hermanos salen a encontrarse de dos pueblos que distan 6 horas de camino, llevando la misma velocidad. El perro que sale con uno de los muchachos va corriendo (a 8 kms. por hora) a buscar al otro. Apenas lo encuentra vuelve en busca de su amo, y así hasta que los dos muchachos se encuentran. ¿Cuántos kms. ha recorrido el perro hasta ese momento?[270]

[268] Como el del caracol (p. 486), el de los camellos (p. 495) o el del hortelano (p. 498).
[269] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 78.
[270] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 81. También en Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 78.

Capítulo 8

El tratamiento de algunos procesos matemáticos

Se cree que al maestro le basta una ligera introducción en las ciencias para enseñar a los niños los conocimientos elementales. He aquí el error. Lo elemental de cada ciencia es lo fundamental, lo esencial de ella, y para exponerlo con claridad meridiana se necesita dominarla, ascender hasta un alto en el camino, que permita ver, inconfundible, el punto de partida.

María de Maetzu

8.1. Las definiciones

En primer lugar, describimos y comparamos lo que dicen sobre la definición en matemáticas aquellos profesores que escriben tratados de metodología de las matemáticas. Se trata de un análisis *intramatemático*. Después haremos un estudio desde el plano *didáctico*, a partir de las definiciones que estos autores u otros (que no tratan la definición como tal) proponen en los libros destinados a las Escuelas Normales o, en algún caso, a la enseñanza primaria y secundaria.

8.1.1. La definición en los libros de metodología de la matemáticas

En el tratamiento de la definición en las diferentes obras sobre metodología de la matemática hallamos constantes en la manera de concebir la definición, y de hecho la mayoría de los autores se refieren a unas mismas concepciones, aunque difieren en el énfasis dado a unos u otros aspectos.

Entre los profesores normalistas, **Manuel Xiberta Roqueta** es el que más se centra en los métodos de la matemática como ciencia, y el que expone con más detalle las características de una definición en Matemáticas. En primer lugar diferencia entre dos tipos de definiciones, que corresponden a la definición *por generación* de Durkheim, y a la clásica definición aristotélica[1], respectivamente:

> *Definición genética* es la que determina el ente matemático por la manera de estar engendrado.
>
> *Definición descriptiva* es la que explica la naturaleza del ente por la propiedad o conjunto de propiedades necesarias y suficientes para determinarlo sin que pueda confundirse con ningún otro[2].

A continuación pone ejemplos de objetos geométricos y aritméticos definidos de ambas formas. Aclara que, mientras que en el caso de las descriptivas habría que comprobar la existencia de lo definido para que tengan sentido, en el caso de la definición genética está asegurada la 'existencia' de lo que se define. De hecho destaca esta como la principal ventaja de tal tipo de definiciones, que considera preferibles a las descriptivas. Después se ocupa también de la cuestión de la 'unicidad', y pone ejemplos de la existencia de

[1] Ouvrier-Buffet, Cécile: «Construction de définitions – construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques», 2003. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515`. Consultado el 10-10-2015. En realidad Durkheim diferencia entre definiciones por generación, por comprehensión (que asocia a la aristotélica de género próximo y diferencia específica) y por extensión (designando cada uno de los objetos definidos).

[2] Xiberta Roqueta, Manuel: *Matemáticas. Metodología y Prácticas*. Gerona: Talleres Gráficos de Solomón Marqués, 1934. Cita en p. 18.

'rectas paralelas' y de la existencia y la unicidad del punto definido como 'centro de un paralelepípedo'.

Presenta lo que es definir por *género próximo y diferencia específica*, y asocia este tipo de definiciones a la posibilidad de *clasificar* los objetos o entes matemáticos por sus propiedades: *«Para definir un ente clasificable es necesario y suficiente declarar su género próximo y su diferencia específica»*[3]. Aclara igualmente que una definición de este tipo, del mismo objeto matemático, puede ser diferente de otra, si alude a otra clasificación. Pone un ejemplo del cuadrado, definido primero como un tipo especial de paralelogramo (la 'clase' de los paralelogramos, incluida en la clase de los cuadriláteros, etc.), y a continuación definido a partir de una clasificación de los cuadriláteros en rectángulos, rombos y romboides; en este caso como una clase particular de rectángulo, el que cumple además la propiedad de tener los lados iguales, o como un rombo con los ángulos iguales.

Al relacionar la definición por género próximo y diferencia específica y la clasificación comenta un ejemplo de definición habitual y errónea, aquella que consiste en definir los irracionales como números no enteros ni fraccionarios. Considera que para definir estos entes inclasificables es necesario hacerlo refiriéndose al proceso de creación, como límite común de dos sucesiones de números racionales, una creciente y la otra decreciente, tales que la sucesión formada por las diferencias de los términos correspondientes de una y de la otra tienda a cero. Y, en aras del rigor, advierte que puesto que en estas definiciones interviene frecuentemente el concepto matemático de 'límite', la definición no será correcta sin que se haya demostrado la existencia –y la unicidad– de tal límite. Como ejemplo señala la definición de número irracional y retoma también la de longitud de una circunferencia a partir de sucesiones de polígonos inscritos y circunscritos de número creciente de lados, que figuraba en el libro de Rey Pastor y Puig Adam.

Rey Pastor y **Puig Adam** en cambio, en su *Metodología*[4] consideran que las definiciones usuales en matemáticas son las «definiciones por clasifi-

[3]Ibídem, pp. 20-21.

[4]Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Metodología y Didáctica de la Matemática elemental. Tomo I. Metodología.* Imprenta de A. Marzo, Madrid, 1933.

cación»[5], en las que se da el género próximo y la diferencia específica, aunque después aclaran que no todas las definiciones son de este tipo. La condición esencial que ponen a las definiciones por clasificación es la *compatibilidad* o existencia de la clase –subclase– que se define; estiman que la existencia de solo un número finito de objetos o entes matemáticos que respondan a esas características definitorias no justificaría una definición. Y recomiendan, como medio de asegurarse la existencia de la clase de objetos definidos, 'engendrar' dicha clase, es decir, proporcionar el procedimiento para ir engendrando los sucesivos elementos o incluso la expresión general o fórmula para engendrarlos; más tarde consideran una propiedad exigible a este tipo de definiciones, que sean *genéticas*, aunque no se pueda determinar por extensión –determinando todos los elementos– la clase definida, como ocurre por ejemplo con los números algebraicos. No contraponen, por tanto, ambos tipos de definición.

La cuestión de la *unicidad* del objeto o ente matemático que se pretende definir, implícitamente contenida en el enunciado de algunas definiciones, estaría comprendida –sería condición– dentro de la existencia o compatibilidad.

Como vemos, estos autores no se refieren a las definiciones por generación como un tipo particular de definiciones. Sin embargo, consideran condición importante de las definiciones por clasificación el que sean *«genéticas, esto es, que permitan inmediatamente engendrar los entes definidos»*[6], evitando así el problema de la inexistencia.

Además de las definiciones que proceden de una clasificación consideran otros tipos, como las definiciones *por abstracción* (que asocian con la verdadera creación matemática); y lo que se ha de definir de manera implícita, *por axiomas*. Como ejemplo de definiciones por abstracción –cuya importancia en las matemáticas subrayan– citan las de «número real» (por 'cortaduras' entre números racionales), «racional» y «complejo» (a partir de pares de números enteros o reales). En cuanto a los conceptos definidos de manera axiomática, Rey Pastor y Puig Adam ponen como ejemplo la dificultad de definir los entes matemáticos primarios, como «punto», «recta» o «número natural»:

[5]Ibídem, p. 95.
[6]Ibídem, p. 102.

> Por estas razones los tratados didácticos modernos, lejos de empeñarse en definir estos primeros conceptos de punto, recta, segmento, se limitan a evocar imágenes físicas que despierten la idea abstracta y sobre esta simple base imaginativa comienza la elaboración lógica de la Geometría[7].

Incluso invitan a analizar algunas de las definiciones formuladas históricamente por filósofos y matemáticos relevantes, para detectar los defectos que presentan. Se preocupan de precisar que, en realidad, una definición implícita o *axioma* es una 'relación' que liga entes primitivos no definidos, tal y como si hubiese que alinear sobre un estante delgados libros, tan finos que ninguno se sostiene solo:

> A falta de libros que se sostengan solos para tener la base inicial, construirá ésta apoyando unos en otros, a la manera como se hace con dos o más cartas de la baraja, incapaces de sostenerse cada una por sí sola, pero que se sostienen recíprocamente con leve inclinación[8].

Xiberta que, al igual que Rey Pastor y Puig Adam, había hablado previamente de entes indefinibles o conceptos primitivos, como el número natural, el punto o la recta[9], sin embargo no cita la cuestión de los axiomas en el capítulo de la definición.

José María Eyaralar, pensando quizá en las necesidades –y en las posibilidades– de los estudiantes de las Normales, no trata en su *Metodología*[10] la

[7] Ibídem, p. 32.

[8] Ibídem.

[9] Los ejemplos de definiciones de objetos 'singulares' o no clasificables en el libro de Xiberta, como los ejemplos de definiciones que intentaron algunos matemáticos para definir objetos primitivos, están todos contenidos en la obra de Rey Pastor y Puig Adam, publicada un año antes. Ninguno de los dos libros incluye al final bibliografía alguna que permita conocer las fuentes que consultaron sus autores, ni confirmar que el autor que publica después ha consultado la obra publicada anteriormente. No obstante, salvo para los casos más sencillos, el conjunto de los ejemplos que aporta Xiberta, que se podrían considerar de matemática más avanzada, está estrictamente contenido en el libro de Rey Pastor y Puig Adam.

[10] Eyaralar Almazán, José María: *Metodología de la Matemática*. Reus, Madrid, 1933.

definición tan exhaustivamente como los autores citados anteriormente. Expone algunas características de la matemática, para explicar lo que diferencia a esta ciencia de otras disciplinas, en particular el hecho de que los conceptos de la matemática son *universales* e *inmutables*, y que todo el edificio de la matemática es una construcción lógica apoyada sobre unos pocos elementos primeros. Asocia la *precisión* de los conceptos matemáticos a la posibilidad –que no garantizan siempre las demás ciencias– de determinar con exactitud si un objeto matemático responde o no a una definición dada. Ésta es una de las cualidades o propiedades que atribuye a las definiciones matemáticas, aunque no lo encuadre en un apartado dedicado específicamente a comentar las propiedades de la definición.

Distingue dos maneras de definir en matemáticas:

- mediante definiciones *descriptivas*, enunciando las propiedades del ente u objeto definido; definiciones que recogen el *género próximo* y la *diferencia última*;

- y definiciones *generativas*, que indican la manera de engendrar lo que se intenta definir.

Eyaralar considera que el primero de estos dos modos de definir es el característico de las ciencias experimentales, cosa que no habían señalado los otros autores estudiados; utiliza la comparación con estas otras materias para ayudar a sus alumnos a distinguir la diferencia entre los modos de proceder en matemáticas y otros que les son familiares. En el apartado dedicado en otro capítulo a la clasificación como método de sistematización de los conocimientos matemáticos, indica que la clasificación dicotómica lleva a la definición lógica y pone el ejemplo de la caracterización de la 'circunferencia' partiendo de la 'línea', mediante sucesivas clasificaciones dicotómicas (figura 8.1).

«Así se obtiene la definición corriente de circunferencia como una *línea curva, cerrada y plana... cuyos puntos equidistan de un punto interior*»[11].

[11]Ibídem, p. 28. El esquema no contempla todos los objetos de cada clase. La elipse, por ejemplo, también es una línea curva, cerrada y plana.

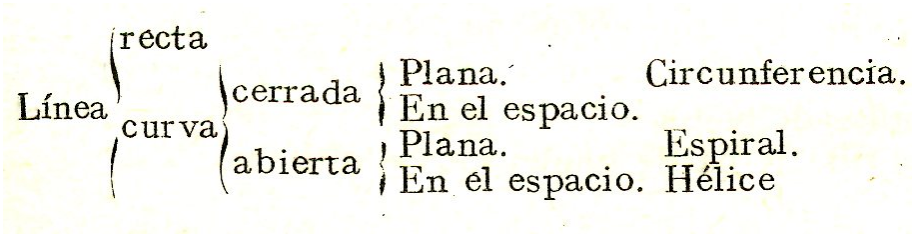


Figura 8.1: Eyaralar. Clasificación de líneas

En cualquier caso, «la [definición] más acorde con el sentido *inventivo* de la ciencia es la generativa, siendo además la que da más animación y más vida a la enseñanza, debiendo ser por ello preferida»[12]. Coincide, pues, con Leibniz en el potencial inventivo de la definición matemática[13]. Sin embargo, teniendo siempre como finalidad la enseñanza, considera que ambos tipos de definiciones son complementarias y por ello recomienda combinarlos. Pone el ejemplo de la circunferencia, que se puede empezar a 'caracterizar' comprobando que las distancias del centro de una rueda a todos los puntos del contorno es la misma, para luego construirla, 'generarla', mediante una cuerda. Lo importante para él es que «*la observación, o la construcción, o ambas operaciones, deben, pues, preceder a toda definición*»[14].

Por su parte, **Luis Paunero**, cuyo libro de metodología[15], al igual que el de Eyaralar, no se centra en la metodología de la matemática, sino más bien en los aspectos relacionados con su enseñanza, diferencia entre definiciones *nominales* –de palabras– y *objetivas* –de cosas–; tras comentar la esterilidad pedagógica de tal clasificación, en el caso de las matemáticas, presenta dos formas de definición, igual que los otros autores: la *descriptiva*, que en su aspecto lógico se caracteriza por señalar género próximo y diferencia específica, y la *generativa*, que describe la manera de formarse el objeto; no obstante, ya no se ocupa más de ésta última y todas las observaciones que hace son en relación con las definiciones descriptivas, que considera mayoritarias por ser más intuitivas.

[12]Ibídem, p. 66.

[13]Ouvrier-Buffet, *Construction de définitions...*, op. cit., cap. II.

[14]Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 67.

[15]Paunero Ruiz, Luis: *Ensayo. Las matemáticas en la educación.* Tipografía Heliópolis, Sevilla, 1935.

Al igual que Eyaralar, recuerda la relación entre este último proceso de definir y el propio de las ciencias naturales, aunque Paunero no ve diferencia entre ambas ciencias; incluso identifica la construcción de una definición descriptiva con la elaboración de un cuadro sinóptico. Podría pensarse que ignora las diferencias entre la clasificación en ciencias naturales y el acto de elaborar una definición matemática mediante sucesivas clasificaciones[16], pues en este caso la clasificación no es un resumen, sino un principio de conocimiento, además de que no se presupone la existencia del objeto. Es cierto que no centra su interés en los aspectos formales de la definición, como en el caso de Xiberta, sino más bien en los aspectos pedagógicos, en vista de a quién iba dirigido su libro.

Así, parte de un ejemplo, repetido en todos los libros analizados, el de las dos definiciones de circunferencia, y solo después se aclara la diferencia entre ambos modos de definir. Explica en qué consiste la 'diferencia última', comparando la propiedad característica de la circunferencia con la de la elipse, que también se refiere, como aquélla, a la conservación de la distancia: ambas son líneas curvas cerradas y planas –género próximo–, pero mientras la circunferencia se caracteriza por que sus puntos equidistan de un punto fijo (el centro), el valor constante en la elipse es la suma de las distancias de cualquier punto de ella a dos puntos fijos (los focos).

Y recomienda, como Eyaralar, que en las primeras edades la observación preceda a la definición: «Jamás dar la definición de las cosas, que no debe llegar a los niños hasta que no se haya adquirido la percepción clara del objeto primario o sea el objeto que se va a definir»[17].

Felipe Sáiz Salvat, autor de un libro de metodología de las matemáticas dedica poca atención a las definiciones, a las que considera como «descripciones breves de términos u objetos»[18], y a continuación comenta las condiciones que han de cumplir.

[16] Ouvrier-Buffet, *Construction de définitions...*, op. cit., p. 44. Liard estudia las diferencias entre las definiciones en geometría y en ciencias naturales.

[17] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 64.

[18] Sáiz Salvat, Felipe: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental*. Imp, Mercé, Castellón, 1931. Cita en p. 12.

8.1.1.1. Requisitos de una definición

Otra cuestión presente en las obras de metodología para la formación de maestros es la de los requisitos que ha de satisfacer una definición, y también aquí se observan diferentes grados de rigor y formalismo, pero sobre todo distintos grados de preparación matemática y de reflexión entre las obras que estudiamos.

En el texto de Rey Pastor y Puig Adam es donde se tratan las condiciones de la definición con más cuidado. Las definiciones que consideran más interesantes desde el punto de vista de la Matemática son las realizadas por abstracción y las implícitas, las únicas que permiten 'crear' nuevos objetos matemáticos. Pero pensando en las definiciones por género próximo y diferencia específica, en general de objetos matemáticos clasificables, hacen un listado de las condiciones que suelen imponerse –importadas de la Lógica– a este tipo de definiciones y critican la mayoría de ellas:

> 1.ª La definición ha de ser más clara que lo definido.
> 2.ª Lo definido no debe entrar en la definición.
> 3.ª La definición ha de ser breve.
> 4.ª No sea la definición ni redundante ni diminuta.
> 5.ª La definición ha de convenir a todo y sólo a lo definido.
> 6.ª La definición debe hacerse declarando el género próximo y la diferencia última de la cosa definida[19].

La sexta condición pone de manifiesto para qué tipo de definiciones están formuladas estas condiciones lógicas. Los autores van descartando la mayoría de las condiciones, hasta que solo consideran imprescindibles la segunda y la cuarta, y de ésta última solo la característica de no ser 'diminuta', es decir, que no omita alguna propiedad esencial característica del objeto que se define, de modo que comprenda a una clase mayor de objetos; por ejemplo, definir los polígonos regulares por la igualdad de lados, olvidando la igualdad de ángulos. Además imponen la condición de 'compatiblidad' o no contradicción, ligada a la existencia de lo definido, condición a la que ya nos hemos referido.

Otros autores, sin embargo, en su lista de condiciones para una definición, recogen algunas que Rey Pastor y Puig Adam consideran innecesarias

[19] Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica...*, op. cit., p. 96.

o faltas de sentido. Es el caso de Xiberta Roqueta, que incluye en su listado (en segundo y quinto lugar) las dos condiciones que los autores anteriores consideraban las únicas realmente necesarias, pero también otras que éstos habían criticado ya, como la 1.ª y la 5.ª del listado anterior (que aparecen ahora en primer y cuarto lugar, respectivamente). En cambio, introduce en sexto lugar un requisito, que también figura en el libro de Rey Pastor y Puig Adam, y alude a la preocupación de Leibniz por el papel de las definiciones en los procesos demostrativos: que la definición contenga los datos necesarios y suficientes para poder demostrar todas las propiedades del ente definido (condición que vincula la definición con una de las funciones que Lakatos le atribuye, la función de *prueba*[20]).

También recoge Xiberta la crítica que hacen Rey Pastor y Puig Adam a la exigencia de que las definiciones no sean redundantes, y lo ejemplifica con el mismo ejemplo que aquéllos, la definición de triángulos semejantes, que se pueden caracterizar como aquéllos que tienen los lados proporcionales o bien los ángulos iguales. Pero solo Rey Pastor y Puig Adam requieren que cuando la definición incluya propiedades que sean consecuencia de otras, se demuestre inmediatamente la relación de inclusión, o lo que es lo mismo, la equivalencia de ambas propiedades, que darían lugar a su vez a dos definiciones equivalentes[21]. Las razones que aducen para aconsejar incluso, en algunos casos, una definición *superabundante* o redundante son de tipo estético y didáctico, como en el ejemplo anterior[22]. Al rigor lógico se antepone el papel que consideran que han de desempeñar las definiciones en la enseñanza.

Sáiz Salvat –que no disponía de la obra de los dos matemáticos, y que escribió su libro tres años antes que Xiberta– se limita a enumerar las condiciones que ha de satisfacer una definición, sin aclararlas ni poner ejemplos. Vemos no obstante que entre las condiciones que recoge está la de «ser ade-

[20] Ouvrier-Buffet, *Construction de définitions...*, op. cit., cap. II.

[21] En el *Nuevo Tratado de Geometría*, Eyaralar también cumple esta condición, aunque no aparece como tal explícitamente en sus obras de *Metodología*.

[22] Precisamente insistir en ambas condiciones en el caso de los triángulos, y demostrar su equivalencia, lleva a preguntarse si en el caso de los demás polígonos será también equivalente la igualdad de ángulos a la proporcionalidad de lados, cosa que no es así, lo que motiva volver sobre una propiedad fundamental del triángulo, su rigidez.

cuada representación de todo el concepto y de nada más»[23], condición que coincide con la 5.ª anterior y que también exigía Xiberta. Igualmente, incluye algunas condiciones como pedir que las definiciones sean *breves* y *afirmativas*[24]. Esto último nos indica qué tipo de definiciones estaba considerando, las descriptivas, puesto que para las definiciones de objetos no clasificables, las que han de producirse por abstracción o mediante axiomas, no tiene sentido hacer la distinción anterior.

Precisamente Rey Pastor y Puig Adam criticarán ambos requisitos, el primero por no considerarlo indispensable –más aún si ello implica un menor rigor–, y también el segundo, ya que consideran que la distinción entre definiciones positivas y negativas (las que caracterizan lo definido por la carencia de alguna propiedad) es una oposición solo formal. Dan tres razones para no preferir siempre las definiciones positivas antes que las negativas:

> 1.ª Porque ciertas definiciones afirmativas implican infinitas afirmaciones, como acontece con las negativas [...]
>
> 2.ª Porque ciertas definiciones negativas son considerablemente más simples que otras afirmativas que pueden darse para el mismo concepto. [...]
>
> 3.ª Porque no es difícil dar carácter afirmativo a las definiciones negativas, puesto que el no pertenecer a una clase equivale a pertenecer a la clase definida por la propiedad opuesta[25].

8.1.2. La definición desde la perspectiva ecológica

Las constantes que se detectan en el tratamiento de la definición por los autores estudiados reflejan la influencia de una *cultura* compartida, entre cuyos factores condicionantes se encuentran las ideas pedagógicas de la Escuela Nueva, y la perspectiva adquirida por algunos de los profesores renovadores con el conocimiento de otros sistemas de enseñanza y de propuestas plasmadas en obras extranjeras.

[23] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 12.

[24] Manuel Xiberta no incluye el requisito de que las definiciones sean afirmativas en el listado de condiciones que ha de satisfacer una definición, pero sí diferencia entre definiciones afirmativas y negativas, en el caso de las definiciones descriptivas.

[25] Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica...*, op. cit., pp. 105-106.

Esa cultura determina la 'relación institucional a la definición' (que se detecta en el análisis de los manuales), es decir, el sentido que la institución acepta sobre las definiciones; y al decir 'sentido' se entiende las situaciones en las que es adecuado definir matemáticamente, las propiedades de la definición y las formas de definir y de expresar la definición. Y ese sentido varía dependiendo de que la institución de referencia sea una Facultad universitaria, un centro de enseñanzas medias o uno de formación de maestros.

Pero, con esa referencia, cada profesor construye su propia concepción sobre la definición y sobre el papel que puede desempeñar.

Este apartado trata sobre el sentido de la definición en la institución de formación de maestros. Por las características de la propia institución, esta cuestión está interrelacionada con el tratamiento (la relación institucional) que se proponía en la escuela primaria. Por ello, también nos ocuparemos de las orientaciones que los profesores normalistas formulan en relación con la enseñanza de algunos objetos matemáticos en la enseñanza primaria; e intentaremos inferir, a partir de los ejemplos seleccionados, cuál era el tratamiento que proponían dar a la definición, contrastándolo con las indicaciones didácticas –cuando existan– de sus autores sobre la definición.

Ello supone un estudio *ecológico* de la definición, en el sentido de la TAD. Estudio que realizaremos limitándonos a algunos ejemplos significativos, concretamente de la definición en geometría, a través principalmente de los manuales disponibles para la formación de maestros, y en algún caso, también para la enseñanza secundaria. Es el caso de Rey Pastor y Puig Adam, que escriben su libro de *Metodología de la matemática* para uso en las Normales, destinado a la formación de maestros y a la vez para el profesorado de secundaria, y cuyos libros *Elementos de aritmética*[26] y *Elementos de geometría*[27], ambos pertenecientes a la *Colección Elemental Intuitiva*, están destinados a la enseñanza secundaria y a los últimos grados de la primaria[28]. También de

[26]Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Elementos de aritmética. Colección Elemental intuitiva. Tomo I.* Imprenta de A. Marzo, Madrid, 3.ª edición, 1928. La primera edición es de 1927.

[27]Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Elementos de Geometría. Colección elemental intuitiva. Tomo II.* Imp. de Afrodisio Aguado, Madrid, 5.ª edición, 1942. La primera edición es de 1928.

[28]Así lo declaran sus autores en el Prólogo de *Elementos de Aritmética*. En el de *Ele-*

Manuel Xiberta y José María Eyaralar, cuyas obras de metodología, como declaran sus autores, van destinadas al alumnado normalista y que, además de libros para la Escuela Normal, escriben otros para el nivel secundario.

8.1.2.1. Propuestas sobre la definición en la escuela primaria: el cuadrado

Tomamos como ejemplo un objeto típico de la geometría elemental: el cuadrado. En esos momentos, y a pesar de que algunas voces ya clamaban por una geometría basada en el estudio de los 'invariantes' o de los 'movimientos', lo cierto es que la propuesta del matemático Félix Klein en su *Programa de Erlangen*, no había tenido apenas repercusión en la escuela elemental española. Rey Pastor y Puig Adam sí que conciben su propuesta para enseñar geometría en la enseñanza secundaria según esta visión, más dinámica[29], y Eyaralar, aunque no se refiere a ello explícitamente, muestra en sus obras una visión de la geometría más cercana a esta concepción[30]. El estudio de los cuerpos geométricos y de las figuras constituye pues el centro de los programas de geometría.

Margarita Comas presenta en su obra *Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría*[31] unas líneas generales para confeccionar los programas escolares de ambas materias en cada uno de los tres grados; en particular esboza lo que puede ser una lección de cada una de ellas. La lección sobre el cuadrado se organiza de este modo:

Primer grado. Construir cuadrados doblando una hoja de papel; nombre de la figura; búsqueda de cosas cuadradas; dibujo de un cuadrado usando el anterior como plantilla; dibujo a mano alzada; se constata que tiene 4 lados y 4 ángulos; se gira el cuadrado para observar la igualdad de lados y de ángulos; comprobar que el ángulo coincide con el de la escuadra, ángulo *recto*; construcción –por parte del maestro– de un cuadrado en la pizarra con

mentos de Geometría no figura nada al respecto.

[29] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de Geometría... (1942)*, op. cit., Prólogo. El Prólogo es el que figura en la primera edición, publicada en 1928.

[30] Lo hemos comentado en el apartado 4.1.3, pp. 253 y sig.

[31] Comas Camps, Margarita: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 5.ª edición, 1932.

la escuadra y la regla graduada; lo mismo los niños en el papel; construcción por el maestro de un cubo a partir de 6 cuadrados; dibujo de cuadrados en papel cuadriculado, contando cuadrículas y coloreándolas alternativamente; dibujo a pulso de un mosaico de cuadrados.

Vemos que en este grado se trata de presentar el objeto matemático a través de actividades preparatorias de posibles situaciones de construcción de definiciones, más que de definiciones. Los niños buscan la forma basándose en la percepción, ya que ha sido presentada de manera ostensiva (la construcción a partir de un papel no es algo que deban plantearse los niños, se les indica el modo de hacerlo, sin hacer hincapié en las propiedades utilizadas), aunque se han ido comprobando, de forma pragmática, algunas de sus propiedades, las suficientes para caracterizarlo. No se define en este grado el cuadrado, ni siquiera de manera informal; solo se les dice el nombre, tras indicar un procedimiento de construcción. Es más, la autora insiste en no forzar ningún tipo de definición en este nivel:

> Con algunos niños quizá podría llegarse a deducir que un cuadrado es una figura con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos; pero si los niños no pueden llegar a esta conclusión, es inútil, y quizá perjudicial, que el maestro se lo diga[32].

Segundo grado. Aquí recoge, como modelo, una lección sobre superficies de Benchara Brandford: comienza con la construcción de un cuadrado a partir de una hoja de papel; en ese momento comienza un diálogo entre el profesor y los alumnos:

> Maestro (dirigiéndose a un niño en particular).- ¿Qué quieres decir con la palabra cuadrado?
>
> Niño.- Un cuadrado es una figura con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.
>
> M.- (Tomando uno de los cuadrados y alabeándolo un poco).- ¿Es esto un cuadrado?
>
> N.- No.
>
> M.- ¿Por qué?
>
> N.- Porque no es plano.

[32]Ibídem, p. 32.

> Entonces se conviene en añadir la palabra plana a la definición.
> M.- ¿Cómo podremos saber que una figura es plana?[33]

Hay que señalar que en su libro *Metodología de la Aritmética y la Geometría*, escrito en la década siguiente, esta lección es retomada –vuelve a citar a su autor– y propuesta pero para el *tercer grado*, que es cuando se estudian los conceptos de superficie, línea y punto. En este momento, ya había publicado (un año antes) su obra sobre el método de proyectos, y la propuesta para trabajar la geometría, en los grados primero y segundo, parte de los objetos en el espacio, para pasar luego al plano y finalmente a la línea y el punto. Así pues, el cuadrado es presentado a partir de las caras del cubo y, aunque las actividades con el cuadrado son parecidas a las descritas anteriormente, introduce algunas actividades que permiten poner de manifiesto propiedades del cuadrado que, aunque consideradas antes, no tenían el carácter de necesidad que tienen ahora. Por ejemplo, la construcción de cuadrados con tiras de cartón o un metro plegable, que obliga a imponer intencionadamente que los ángulos sean rectos y a la vez pone de manifiesto otra propiedad, la no rigidez del cuadrado.

En el tercer grado sí se define, pero lo relevante es que no es el maestro el que proporciona una definición, sino que se pide a los niños que lo hagan; la labor del maestro consiste en hacer que esa primera definición, incompleta, se afine añadiendo propiedades que permitan caracterizar la figura y diferenciarla de otras. En realidad el propósito de esta clase no es la definición de cuadrado, sino la de 'superficie' en general y 'superficie plana', «tema en el que la aplicación del procedimiento activo encuentra, al decir de las gentes, mucha dificultad»[34]. Para ello escoge un objeto matemático conocido, el cuadrado, y aprovecha que los niños están en condiciones de proporcionar una primera definición, que no importa que no sea precisa; al contrario, esta primera definición incompleta es el medio para centrar la atención en otra propiedad, la de ser una superficie plana. Y precisamente es esta característica la que permite, a su vez, completar la definición de cuadrado.

[33] Ibídem, p. 38.

[34] Comas Camps, Margarita: *Metodología de la Aritmética y la Geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1932, p. 53.

La siguiente pregunta que se formula a los alumnos es cómo saber si una superficie o figura es plana. Se propone a los maestros que planteen a los niños la tarea de definir como medio para acceder al concepto matemático: «De los intentos de definición dados por los niños va tratándose de deducir el concepto». La gestión de la tarea, por parte del maestro, pone de manifiesto las *técnicas didácticas* empleadas.

Comienza por considerar las respuestas –intentos de definición– que aportan los niños e intervenir haciendo preguntas para estimularlos a precisar o a completar las primeras definiciones. Por ejemplo, cita el caso de un niño que describe una superficie plana como la que es 'llana' y que, llevado por las preguntas del maestro, la caracteriza en función de las dimensiones: «una figura es plana cuando tiene sólo ancho y largo»[35]. La siguiente técnica consiste en *clasificar* objetos en 'puntos' o esquinas, 'líneas' o bordes, 'superficies' y 'sólidos' . Tras ello se hacen preguntas tendentes a determinar las relaciones, es decir, advertir que cada tipo de objeto queda limitado por los de la clase anterior, que éstos pueden distinguirse en él, y que en una caja (paralelepípedo) se pueden distinguir bordes (aristas) y vértices (puntos). Es entonces cuando el maestro plantea a la clase la tarea de describir o definir un cuadrado con más exactitud.

La propuesta que hace **Aurelio R. Charentón**, escrita en una época similar a la de la *Metodología* de Margarita Comas, presenta bastantes puntos en común, aunque hemos de tener en cuenta que, mientras que los libros de Margarita Comas son obras de *Metodología*, con orientaciones dirigidas a maestros o a quienes se preparan para serlo, en este caso las obras de referencia son textos escolares, libros escritos para el alumnado de primaria[36], organizados por lecciones que siguen una secuencia temporal.

Primero vienen –en el grado preparatorio– las lecciones sobre el cubo y, tras constatar que las caras son todas iguales (usando el cubo como plantilla para repasar el contorno de varias caras), se da el nombre de 'cuadrado' a la forma de las caras. Se construyen cubos de cartulina a partir de seis cuadrados iguales (obtenidos por el procedimiento anterior). Se hacen frisos con

[35] Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., p. 39.

[36] Como ya hemos comentado en otro capítulo, no tenemos constancia de que llegaran a publicarse los correspondientes Libros del maestro, aunque aparecen anunciados.

cuadrados (seguimos obteniéndolos contorneando una cara de un cubo apoyado sobre el papel). En la lección sobre el cuadrado se comienza por dibujar y recortar un cuadrado, pero ahora hay un avance desde una definición *visual*, hacia una definición que, aunque aún insuficiente, ya hace referencia a propiedades del objeto, o sea, una definición que se sitúa en un *nivel* (en el sentido de Van Hiele) superior[37]; nos referimos a la comprobación –pragmática– de que tiene cuatro lados iguales y también cuatro vértices. En este caso se hace explícita la introducción de términos para denominar los elementos del cuadrado, «lados«» y «vértices». La noción de ángulo recto se introduce ahora para completar la definición de cuadrado, que es una *definición redundante*, 'no económica': «*El cuadrado tiene 4 lados iguales y 4 ángulos* rectos *también iguales*»[38]. Sin embargo, el ángulo recto se define de manera visual en este grado de la enseñanza, diciendo simplemente el nombre y cómo construirlo doblando dos veces un papel sobre sí mismo, para comprobar ángulos por superposición. Después vienen, como es habitual en Charentón, actividades de trabajo manual y dibujo (frisos, mosaicos, etc., con cuadrados dibujados o recortados). Hay actividades preparatorias de *reconocimiento* y de *construcción* del objeto geométrico (esto es una constante para todos los objetos geométricos).

Para el siguiente grado de la enseñanza primaria, la secuencia propuesta es otra. Comienza por construir un cuadrado en papel y va ampliando las propiedades. Ahora la definición es más redundante, incorpora la propiedad de tener los lados paralelos. Igual que en el grado anterior, la definición aparece resaltada, como algo que hay que *institucionalizar* y recordar. Entre los ejercicios llamados 'de reflexión' figura: «Una cuartilla de papel tiene de lado mayor 25 centímetros y el lado menor 20, ¿cuál será la longitud del lado del mayor cuadrado que podamos construir?»[39] También propone en este

[37] De Villiers, Michael: «To teach definitions in geometry or teach to define?» En: A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *PME 22 Proceedings*, pp. 248–255. Univ. Stellenbosch, RSA, 1998.

[38] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?, p. 66.

[39] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado elemental. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual.* Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?, p. 118.

nivel la construcción de un cuadrado con cuatro lápices o reglas iguales, es decir, la propiedad de tener los ángulos rectos –o iguales– ahora no es algo que simplemente los niños observan, sino una propiedad que hay que hacer intervenir.

A continuación, en la lección de dibujo, construye cuadrados a partir del trazado –con regla y compás– de rectas perpendiculares[40], tomando distancias iguales, o uniendo los puntos medios de los lados contiguos (ahora los cuadrados resultantes no están apoyados sobre una base, sino sobre un vértice). Este cuadrado girado 45º –que en el libro anterior aparecía en frisos, pero no se construía como tal– contribuye a superar un *obstáculo didáctico*[41] relacionado con asociar a una figura una posición privilegiada. También obtiene cuadrados dividiendo uno por las paralelas medias. Finalmente, la lección de trabajo manual incluye objetos cotidianos y frisos con cuadrados.

La siguiente lección sobre el cuadrado trata el perímetro. De hecho, esta noción se introduce precisamente con el cuadrado. Define el perímetro como 'contorno' y solo después le da un tratamiento más aritmético a su medida, siempre comprobando con un hilo que rodea el cuadrado y luego se estira. La 'fórmula' –no expresada formalmente– se deduce, no se parte de ella. La manera de conocer la longitud del lado a partir del perímetro se pide como ejercicio.

El cubo se estudia después del cuadrado y, lo mismo que con éste, la definición se completa con nuevas propiedades: a la de tener seis caras cuadradas iguales se añade tener doce aristas iguales, aunque resulte una definición redundante[42]. En los ejercicios de reflexión aparecen, como antes, preguntas destinadas a completar el *análisis* del objeto definido: «¿Por qué las aristas son iguales? [...] ¿Cómo sabrías si dos cubos son iguales?»[43].

José María Eyaralar, aunque en su libro de *Metodología* no descri-

Se presupone que se pide construir un cuadrado con los lados paralelos a los de la cuartilla.

[40]Estudiado en una lección anterior.

[41]En el sentido dado por Guy Brousseau a este concepto.

[42]Hay que señalar que 'define' metro cúbico, decímetro cúbico y centímetro cúbico como un cubo de un metro «de lado», un decímetro o un centímetro, respectivamente. En general al trabajar la medida de superficies y de volúmenes considera la unidad ligada a una única 'forma'.

[43]Charentón, *Lecciones de cálculo. Grado elemental...*, op. cit., p. 241.

be una propuesta para enseñar concretamente este objeto geométrico –el cuadrado– en la escuela primaria, sí lo utiliza como ejemplo en varias ocasiones, para tratar aspectos relacionados con el material de enseñanza, la demostración o la enseñanza intuitiva. Este autor incluye *técnicas* que no observamos en los otros textos analizados, al menos explícitamente, para estudiar las propiedades del cuadrado, algunas contenidas en todas las definiciones más usuales, como es la igualdad de lados. Se trata de *girar* un cuadrado transparente sobre otro de igual tamaño, alrededor del centro, para comprobar que los lados coinciden, igual que las diagonales y las semidiagonales, girando un cierto ángulo. También propone comprobar por plegado la igualdad de los ángulos que forman las diagonales[44].

Vemos cómo tanto Margarita Comas, en su último libro, como Aurelio R. Charentón proponen estudiar el cuadrado a partir del cubo en los niveles más bajos, pero en los niveles superiores, una vez que el niño tiene conocimiento de ambos objetos, y cuando se pretende pasar de un estudio basado en la percepción de la figura a otro en el que se estudian algunas propiedades y se intenta completar una definición 'suficiente', aunque no 'económica', se invierte el orden en el que se presentan las figuras, comenzando por la más simple, en este caso el cuadrado, cuyas propiedades se van a trasladar al cubo.

Precisamente Eyaralar dice al respecto:

> Un criterio armónico es el mejor, empezando, en efecto, por el conocimiento de los sólidos: esfera, cilindro y cubo, como quería Froebel para pasar en seguida al plano y continuar en él, si bien no con el rigor clásico, sino que en cada grado puede estudiarse la parte plana y la parte espacial[45].

En lo que se refiere al papel y al tratamiento de las definiciones en los primeros niveles educativos, en particular en la escuela primaria, encontramos posturas muy cercanas entre los autores estudiados.

En primer lugar, coinciden en graduar las definiciones; concretamente Eyaralar advierte de que «sería absurdo definir a un párvulo la esfera, el

[44] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 205.
[45] Ibídem, pp. 178-179.

cilindro y el cubo que distingue perfectamente»[46], y establece varias fases que debe seguir la enseñanza de la Matemática:

> En la primera se dice: *esto es tal cosa*. Se traza una circunferencia y se dice: *esto* es una circunferencia [...] en el segundo grado [...] Se pone un ejemplo de interés, sin necesidad de definirlo. Más tarde vendrán las definiciones imperfectas: una línea redonda es la circunferencia, como un cuerpo redondo es la esfera; el interés es la *ganancia*, etc.
>
> Al final se darán las definiciones correctas de todos conocidas[47].

Fases que coinciden con las que señala Luis Paunero, dos años más tarde:

> El aspecto de las definiciones en la enseñanza primaria, se sigue por cuatro[48] procesos de definición: fijando las cosas por sus nombres mismos [...]; después viene un proceso de definición descriptiva que podemos subrayar por los elementos secundarios en lo definido [...] y luego completa esto por los elementos esenciales del definido [...], así, ésta es la que se refiere más al concepto de los elementos geométricos[49].

Observamos que las definiciones en geometría, en un principio, están presentes sobre todo para *denominar* a los objetos manipulados, lo que Vinner denomina el 'valor lexical', o como señala N. Balacheff «une abréviation permettant une économie de mots»[50]. Sáiz Salvat insiste en la importancia de esta función: «y de ahí que sea recomendable enseñar los vocablos tal como son, así no *redondo como una pelota* sino *esférico*»[51]. Después progresivamente se va construyendo la definición, que es una caracterización del objeto por sus propiedades, aumentando el número de éstas hasta determinar unívocamente el concepto definido, pero sin que exista preocupación por el carácter 'minimal' de la definición. Se trata de precisar la noción, la *función de comunicación* se hace presente. La definición de un concepto matemático no se

[46]Ibídem, p. 179.
[47]Ibídem, p. 180.
[48]Solo cita tres.
[49]Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 63.
[50]En: Ouvrier-Buffet, *Construction de définitions...*, op. cit., p. 130.
[51]Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 174.

completa en un único tiempo, sino que después se vuelve sobre ella. Tiene por tanto un carácter provisional, al menos para el maestro: es algo que se va construyendo y refinando a la vez que se estudian las propiedades del objeto en cuestión.

Esta característica la observamos de manera más explícita en las lecciones que propone Comas como ejemplo[52], inspiradas en su conocimiento de lo que se hacía en Inglaterra, país en el que había estado becada por la JAE. El tratamiento que se otorga a la definición es el de un *proceso* continuo; la definición (de cuadrado o de otro objeto) no es algo que el niño tiene que saber, es algo que tiene que construir y se trata de una construcción progresiva, en la que el alumno participa.

La *tarea* del maestro no es proporcionar la definición apropiada a la edad del niño en cada momento, sino poner en juego las *técnicas didácticas* necesarias para que la definición sea el producto del trabajo de la clase. En el ejemplo recogido aquí, la técnica consiste en partir de una definición previamente construida e ir haciendo preguntas, a la vez que se presentan *contraejemplos* que muestran la insuficiencia de las propiedades incluidas hasta ese momento en la definición y la necesidad de incluir otras ('que sea plana'). Aunque la *tecnología didáctica* no se hace explícita al menos en lo que se refiere a esta técnica, se percibe claramente la influencia de las teorías de la Escuela Nueva. En la medida en que compromete al alumno en la actividad de definir, estamos ante una reconstrucción activa del conocimiento, propia de un modelo de aprendizaje constructivista[53]. Tal como expresan S. Larsen y M. Zandieh, recordando lo que decía Freudenthal, «definitions are generally not preconceived but are just the finishing touches of the mathematical activity of defining. He argued that students should not be denied the opportunity

[52]En un artículo seleccionado en el VIII Concurso de la Revista de Pedagogía, su autor, un maestro nacional, que reconoce haberse inspirado precisamente en la *Metodología* de Margarita Comas, transcribe esta secuencia, que recuerda al diálogo anterior (p. 514): «Todas las cosas que hemos dicho son esferas –les digo–. Y pregunto: ¿Qué es esfera? / - Una cosa redonda, contestan. / Les presento una moneda, y pregunto cómo es. / - Redonda. / - ¿Entonces, esta moneda es también una esfera? / - No, la esfera es redonda por todas partes...». Bullón, Francisco: «La Geometría en mi escuela». *Revista de Pedagogía*, 1934, **152**, pp. 353–357. Cita en p. 355.

[53]De Villiers, *To teach definitions...*, op. cit.

participate in this activity»[54]. Y más adelante, De Villiers: «It would appear that in order to increase students' understanding of geometric definitions, and of the concepts to which they relate, it is essential to engage them at some stage in the process of defining of geometric concepts»[55].

Esta visión de cómo debe tratarse la definición en la escuela estaba vinculada a la idea de la escuela activa, como lo muestra el hecho de que empezaba a ser compartida al menos por aquellos maestros más involucrados en este movimiento. Precisamente en el IV Concurso de la *Revista de Pedagogía* resulta seleccionado un trabajo que critica la escuela de ese momento, entre otras cosas, porque «la definición precede al conocimiento» y propone, para hacer la enseñanza del niño activa, basarse en «las concepciones por él elaboradas para una futura definición»[56].

No obstante lo dicho hasta ahora, las propuestas renovadoras no confunden intuición con falta de precisión al definir, es solo que a esta última se llega a través de aquélla. Margarita Comas aborda este asunto en relación con la definición de 'línea', haciendo ver que sus representaciones concretas no son exactamente unidimensionales[57], y a partir de ahí concluye con la necesidad de ser precisos al definir. La definición *institucionalizada* del concepto no se aconseja hasta los últimos grados. Sáiz Salvat, no es partidario de definiciones precisas en los primeros grados, «las definiciones no es conveniente darlas hasta el último grado [...] Y cuando se den [en edades anteriores]

[54] «Las definiciones no son preconcebidas generalmente, sino que son precisamente los toques finales de la actividad matemática de definir. Argumentaba que a los estudiantes no se les debería negar la oportunidad de participar en esta actividad». Larse, S. y Zandieh, M.: «Conjecturing and Proving as Part of the Process of Defining». En: G.M. Lloyd; J.L.M. Wilson y S.L Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th PME-NA*, pp. 797–804, 2005. `http://www.web.pdx.edu/~slarsen/ResearchPapers/pmena05LarsenZandieh.pdf`. La traducción es nuestra.

[55] «Parecería que para aumentar la comprensión de las definiciones geométricas por los alumnos, y la de los conceptos a los que se refieren, es esencial involucrarlos en alguna etapa del proceso de definición de los conceptos geométricos». De Villiers, *To teach definitions...*, op. cit., p. 249. La traducción es nuestra.

[56] Fuster, Julio: «La aritmética en el sentido de la acción». *Revista de Pedagogía*, 1930, **100**, pp. 211–216. Cita en p. 213.

[57] Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., pp. 54-55.

debe hacerse experimentalmente, como hacían Froebel y Pestalozzi»[58]. Pero manifiesta otra preocupación cuando se trata de niveles más avanzados:

> En la matemática abstracta y última parte del último grado de la primaria son parte esencial las definiciones, axiomas y teoremas. Por falta de educación hoy se define muy mal casi siempre y debe procurarse en esas etapas que el alumno defina [...] El alumno estudiará la realidad propuesta por el maestro como ejemplo y ensayará a describir con el menor número de palabras y obtener la definición como síntesis de este análisis[59].

Precisamente Eyaralar critica el tratamiento que se da a la definición en la enseñanza francesa –que conocía bien gracias a la beca concedida por la JAE– por considerarlo un signo del intelectualismo de aquel sistema: «nos encontramos con el plan francés excesivamente intelectualista que desde el primer grado emplea definiciones y reglas que aprender de memoria»[60]. Él, que en el libro que escribe para bachillerato[61] destaca las definiciones (también las propiedades y reglas o teoremas) encuadrándolas y escribiéndolas en letra cursiva con la intención de que sean memorizadas, advierte en cambio que las definiciones intermedias no deben aprenderse de memoria[62]; las definiciones imprecisas, aproximadas o incompletas, son un medio para construir la definición correcta, que es la que se institucionaliza.

8.1.2.2. La definición en los textos para las Escuelas Normales: José María Eyaralar

A diferencia de lo que ocurre en los textos dirigidos a alumnos de primaria, o de aquellos con orientaciones metodológicas, en los libros de matemáticas para alumnos normalistas –también para alumnos de bachillerato– los enunciados tienen un estatus específico, se diferencian «definición», «propiedad»,

[58] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 175.
[59] Ibídem, p. 185.
[60] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 184.
[61] Eyaralar Almazán, José María: *Nociones de Aritmética y Geometría. Primer curso*. Sardá, Guadalajara, 1936.
[62] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 180.

«clasificación», etc. Se advierte en el tratamiento que Eyaralar da a la definición de 'cuadrado' en el *Nuevo Tratado de Geometría*, publicado en 1924. En primer lugar define 'cuadrilátero':

> I. DEFINICIONES.- *Cuadrilátero es la porción de plano limitada por una línea quebrada de cuatro lados.*
>
> Señálense objetos en cuyas superficies haya algún cuadrilátero.
>
> Los cuadriláteros puede ser *convexos* (a) figura 100, y *cóncavos* (b), según sea la quebrada que los limita. [...]
>
> ¿Cuántos ángulos tiene un cuadrilátero? ¿Cuántos vértices? [...]
>
> *Se llama diagonal en un cuadrilátero a la recta que une dos vértices no consecutivos*[63].

Los alumnos normalistas ya conocen el objeto matemático que se está definiendo; se trata de dar una definición precisa, normalmente 'económica' o lo que en matemáticas se llama 'minimal', esto es, no redundante. Ya no se trata de definir para *delimitar* (comparar con otros conceptos para hallar criterios de reconocimiento), y por ello no se empieza por una lista de *ejemplos* y *contraejemplos*[64] a partir de los que construir una definición, como sucedía en primaria (búsqueda de objetos que responden a la definición y de otros que no responden). Aquí el estatus de la definición ya no es provisional, la función de la definición es diferente, no es ya una función de *denominación*, ni solo de *comunicación*, sino que, además de determinar con precisión el concepto matemático, ha de servir a la función de *prueba*[65]. Y, en efecto, la definición se utiliza en la obtención de nuevas propiedades del objeto definido: «Las diagonales de un cuadrilátero convexo son interiores. ¿Y en uno cóncavo? ¿Cuántas diagonales tiene un cuadrilátero?»[66].

Sin embargo, los conceptos de 'cóncavo' y 'convexo', que se suponen nuevos para el alumno, tienen un tratamiento muy diferente, se definen de manera no formal, remitiendo a un *dibujo* que representa un ejemplo. Estos

[63] Eyaralar Almazán, José María y Cebrián, Francisco: *Nuevo Tratado de Geometría*. Reus, Madrid, 1924, p. 90.

[64] Ouvrier-Buffet, Cécile: «An Activity for constructing a Definition». En: *Proceedings PME 26*, pp. 4–25, 2002.

[65] Ouvrier-Buffet, *Construction de définitions...*, op. cit., cap. II.

[66] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 91.

conceptos no conocidos previamente son objeto de una *definición ostensiva*: la representación gráfica mediante un dibujo no acompaña a la definición, a modo de ejemplo del concepto definido, sino que ocupa su lugar. Aunque después se hace intervenir esta propiedad al determinar el número de diagonales y también la suma de los ángulos de un cuadrilátero. En general no se define de este modo en el *Nuevo Tratado de Geometría*, sobre todo cuando se trata de conceptos que han de utilizarse de manera *operativa*[67] en el establecimiento de propiedades o de teoremas, como ocurre la mayoría de las veces; en este caso se necesita una definición –o varias equivalentes– que fije las propiedades del objeto definido y pueda ser utilizada en un proceso de prueba.

Observamos cómo no solo se ponen en juego criterios matemáticos al decidir qué definiciones se utilizan en cada momento, sino también criterios *pedagógicos* que tienen en cuenta las posibilidades de los alumnos en cada institución, en particular los conocimientos previos.

Tras presentar los criterios de igualdad de cuadriláteros, define los diferentes tipos de cuadriláteros mediante una *clasificación*: trapezoides, trapecios y paralelogramos, según que no tengan ningún par de lados paralelos, un solo par o dos. Después da una definición *generativa*: «Se obtiene fácilmente un trapecio trazando dos rectas paralelas y cortándolas por otras dos que no lo sean»[68]. Esta definición pone el énfasis en el aspecto procedimental, la construcción.

Muestra de la importancia que concede a la comprensión de las definiciones es que, a continuación de otro epígrafe también titulado «Clasificación», en el que caracteriza los trapecios rectángulos y los isósceles (no da nombre especial al resto), hace plantearse a los alumnos: «¿Por qué no pueden ser los dos lados del trapecio perpendiculares a las bases?». Responder a esta pregunta supone en este caso, no recurrir al conocimiento del rectángulo, sino más bien a la clasificación de los cuadriláteros en términos de pares de lados paralelos, hecha anteriormente. Es decir, pone a los alumnos en situación de emplear la definición para deducir propiedades de los objetos definidos.

Después de la definición y la demostración de algunas propiedades de la

[67] Ouvrier-Buffet, *An activity...*, op. cit.

[68] Eyaralar Almazán y Cebrián, *Nuevo Tratado de Geometría*, op. cit., p. 93.

paralela media de un trapecio, define el paralelogramo, también de manera generativa, indicando el modo de construirlo (cortando dos rectas paralelas por otras también paralelas). Y otra vez recurre a la clasificación para definir rectángulo «cuyos ángulos son todos rectos» (definición redundante), rombo «cuyos lados son iguales», cuadrado «cuyos lados son iguales y todos sus ángulos son rectos» y romboide (el resto). Presenta estos polígonos como casos particulares del paralelogramo. Observamos que esta clasificación no constituye una verdadera *partición*, en el sentido matemático, ya que no clasifica en clases disjuntas, puesto que la clase de los cuadrados estaría incluida en la de los rombos y en la de los rectángulos. Más tarde presenta el cuadrado como un caso particular de rombo y rectángulo a la vez y aclara que el cuadrado comparte las propiedades del rectángulo y las del rombo. El énfasis en mostrar las relaciones de inclusión de unas clases en otras se pone de manifiesto cuando presenta alguna propiedad característica del rectángulo (y más tarde del cuadrado); recuerda que esta nueva propiedad se añade a todas las que comparte con el paralelogramo (el rectángulo y el rombo).

En realidad se trata de objetos matemáticos previamente conocidos por los alumnos. El interés de las definiciones no es designar objetos, ni conocerlos y reproducirlos, como en el nivel primario; ahora se trata de ampliar un conocimiento previo, pero haciendo a la vez una *sistematización* y las definiciones por clasificación cumplen esa función. La clasificación, ligada a las definiciones *descriptivas*, pone de manifiesto los 'invariantes' (propiedades comunes) de cada clase y permite, a la vez que sistematizar, introducir conceptos nuevos (por ejemplo, los tipos de trapecios)[69], mientras que la definición *constructiva* o generativa, en el caso de la geometría plana, podía facilitar el *dibujo* preciso de los objetos geométricos, que en aquel momento histórico se consideraba un conocimiento integrante del estudio de la geometría.

Pero si bien al estudiar los cuadriláteros los va clasificando, yendo de lo general a lo particular, mediante divisiones sucesivas de unas clases en otras

[69] Ouvrier-Buffet, Cécile: «Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve. Étude épistémologique et enjeux didactiques», 2013. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00964093`. Consultado el 10-10-2015, pp. 39-40.

(igual que había hecho previamente con los triángulos), la definición y el estudio de los 'polígonos' es posterior; es decir, trata primero algunos casos particulares relevantes, pero sobre todo conocidos, que han sido objeto de estudio en el nivel de primaria, antes de dar una definición que supone, en este caso, una *generalización* de las definiciones dadas previamente.

En la institución Escuela Normal, para Eyaralar, la actividad de definir va íntimamente ligada, en primer lugar, a la formulación de propiedades. Es frecuente que se pida a los alumnos enunciar un listado de propiedades, partiendo de las clases a las que pertenecen los objetos geométricos.

En segundo lugar, en este nivel la definición se relaciona con la prueba. Así, tras haber expresado en lenguaje simbólico las relaciones entre los lados y los ángulos de un paralelogramo, pide que se formulen explícitamente estas propiedades y que se deduzcan otras a partir de ellas:

> RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y ENTRE LOS ÁNGULOS. (Fig. 107[70].)
>
> 1.ª, $a = c$; $b = d$; (§ 10-9). 2.ª, $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$ (§ 10-11) . 3.ª, $\alpha + \delta = 2R$. (§ 10-7). Enúnciense estas propiedades.
>
> Consecuencia: Si un ángulo de un paralelogramo es recto, ¿qué serán los demás?[71]

(La respuesta proporciona otra definición –no redundante– de rectángulo).

También se utilizan estas mismas propiedades –y otras– para establecer *condiciones necesarias y suficientes* para que un cuadrilátero sea un paralelogramo (lados opuestos iguales dos a dos; dos lados opuestos iguales y paralelos; ángulos opuestos iguales; diagonales que se dividen en partes iguales). Anteriormente había establecido cada una de estas condiciones como propiedades del paralelogramo (condición necesaria), y ahora demuestra de forma deductiva que son también condiciones suficientes. Lo mismo hace con el rectángulo y el rombo en cuanto a la igualdad o la perpendicularidad de las diagonales, respectivamente. Precisamente por su condición de necesarias y suficientes a la vez, actúan como *definiciones equivalentes* de paralelogramo

[70] La figura 107 es un paralelogramo de lados a, b, c y d, a // c, b // d, vértices A, B, C y D, y ángulos correspondientes a cada vértice α, β, γ y δ, respectivamente.

[71] Eyaralar Almazán, José María y Cebrián, Francisco: *Nuevo Tratado de Geometría*. Reus, Madrid, 1924, op. cit., pp. 95-96.

(o rectángulo o rombo), en tanto que cada una de ellas permite caracterizarlo en la clase más amplia de los cuadriláteros. Estas definiciones equivalentes son interesantes en tanto que aumentan las posibilidades a la hora de demostrar, y revelan una preocupación por esta función de la definición. La definición tiene pues en la enseñanza normal un carácter *operativo*, a diferencia de la escuela primaria, en la que predominaban la funciones de *designación* y de *comunicación*.

Lo que no ha desaparecido es la consideración de la definición como proceso. Por ello involucra a los alumnos en la actividad de definir y así, tras indicar que el cuadrado reúne las propiedades del rectángulo y del rombo, solicita: «Enúnciense»[72].

El interés de Eyaralar por presentar al alumno, antes que una definición acabada, una definición como un enunciado por construir, o al menos un enunciado que analizar, se manifiesta con claridad en numerosas ocasiones. Proporciona varias definiciones de 'circunferencia' y de nuevo plantea tareas relacionadas con el análisis de la definición. Primero da una definición generativa de 'circunferencia' (después de explicar las acciones prácticas para obtenerla), y aclara que «estas definiciones *sirven para trazar* una circunferencia con un hilo tirante, o mediante el compás»[73]. La segunda definición dice así: «Si observamos una circunferencia ya trazada, podremos dar de ella la siguiente definición descriptiva: *La circunferencia es una curva cerrada y plana, cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro*»[74]. Menciona expresamente que esta definición es descriptiva, y especifica que surge a partir de una circunferencia previamente construida. Se refiere pues, no solo la existencia de diferentes definiciones, sino a los tipos de definición. Pero además plantea estas cuestiones: «¿Por qué es cerrada? ¿Por qué ha de ser plana? Trácese en una esfera sólida una línea cerrada»[75]. La frase última apela a un *cambio de marco* –de la geometría plana a la esférica– para motivar la reflexión sobre la necesidad de imponer ciertas condiciones a la definición.

[72]Ibídem, p. 99.
[73]Ibídem, p. 111.
[74]Ibídem.
[75]Ibídem, p. 111.

Este es otro ejemplo de cómo plantea de forma explícita la equivalencia entre dos definiciones y el hecho de que dicha equivalencia puede –y debe– demostrarse, tarea que deja a la responsabilidad del alumno:

> DEFINICIÓN.- *Dos rectas que forman un ángulo recto se llaman perpendiculares.*
>
> Si las rectas son indefinidas, forman cuatro ángulos; si uno de ellos es recto, ¿cuánto valdrán los demás?
>
> ¿Equivale esta definición a decir: *Dos rectas son perpendiculares cuando forman dos ángulos adyacentes iguales?*[76]

Era pues consciente de la *dialéctica entre definición y propiedades* por un lado y, por otro, del *aspecto operativo de la definición* en una prueba. Y de la necesidad de atender a la relación entre estos dos procesos matemáticos, definir y demostrar, en la formación de los maestros.

Esta forma de utilizar la definición es anterior a las reflexiones sobre la misma que desarrolla en su *Metodología* y que hemos comentado anteriormente. El *Nuevo Tratado de Geometría* lo escribió cuando la Metodología no era una asignatura del plan de estudios para la formación de maestros, y las cuestiones que aprendían los alumnos sobre esa temática lo hacían a través del tratamiento de las correspondientes disciplinas. Por tanto, la importancia conferida a las cuestiones metodológicas dependía de las concepciones del profesor sobre la formación matemática necesaria a los maestros. Este apartado muestra el interés y la profundidad de sus planteamientos.

8.1.2.3. La definición en los textos para Bachillerato

Vamos a contrastar lo anterior con el tratamiento de la definición en libros de texto escritos para alumnos de bachillerato. Concretamente compararemos las definiciones de cuadrado y algunas relacionadas, en geometría, y algunos ejemplos de actividades en relación con la definición en los textos de aritmética. Usaremos como referencia los textos para bachillerato de Manuel Xiberta, José María Eyaralar, y Rey Pastor y Puig Adam. Los dos primeros son profesores normalistas. Eyaralar era además profesor de matemáticas de

[76] Ibídem, pp. 37-38.

bachillerato por oposición. Pedro Puig Adam, profesor de bachillerato, fue el principal representante en las décadas posteriores a la Guerra Civil de la corriente renovadora representada por profesores preocupados por cuestiones didácticas y metodológicas. Rey Pastor, el matemático español más relevante en los años que estudiamos, estaba vinculado a la JAE y, durante unos años, al Instituto-escuela de Madrid, un centro paradigmático de la renovación pedagógica. El texto de *Metodología* de estos últimos lo destinaban también a las Escuelas Normales.

El Plan de 1926 establece en el bachillerato elemental las asignaturas *Elementos de Aritmética*, en primer curso, y *Elementos de Geometría*, en segundo curso. Es entonces cuando Xiberta publica las dos obras cuyos títulos coinciden con los de las asignaturas correspondientes[77].

Estos libros, realizados a partir de otros escritos desde 1919, fueron elegidos como textos oficiales en 1928, a raíz del Real Decreto de Eduardo Callejo[78], que impuso el texto único. En ese momento el plan de estudios vigente en las Normales era el de 1914, y en él existía igualmente una asignatura de Aritmética y otra de Geometría. Creemos que pueden reflejar bastante bien las ideas de su autor –en particular sobre el papel y el tratamiento que ha de darse a la definición– en aquellos años de renovación metodológica.

El resto de libros que comparamos están escritos en la época de la República, tras el Plan de 1934 que establece la asignatura llamada Matemáticas en todos los cursos de bachillerato, en particular en el primer ciclo, que comprendía, como el anterior bachillerato elemental, los tres primeros años. Por ello estos libros tienen una parte de aritmética y otra de geometría. Aquí utilizamos los de primer curso, es decir, para alumnos de 10-11 años.

El libro para primer curso de bachillerato de Rey Pastor y Puig Adam[79]

[77] Xiberta Roqueta, Manuel: *Elementos de Geometría*. Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, Madrid, 1928.

Xiberta Roqueta, Manuel: *Elementos de Aritmética*. Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, Madrid, 1929. Primera edición de 1928.

[78] «Real Decreto de 23 de agosto de 1926». *Gaceta de Madrid*, 1926, **240**, pp. 1237–1239.

[79] Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Bachillerato. Matemáticas. Primer curso*. Unión Tipográfica S.A., Madrid, 1934. Este libro fue autorizado como libro de texto en los institutos de segunda enseñanza por el gobierno republicano (R.O. de 13 de diciembre de 1937). Villalaín Benito, José Luis: *Manuales escolares en España. Tomo III. Libros de texto autorizados y censurados (1874-1939)*. UNED, Madrid, 2002, pp. 408-410.

en realidad es una reproducción exacta, para el nuevo Plan de Bachillerato, de varios de los temas de sus obras anteriores de aritmética y de geometría, de la *Colección elemental intuitiva*, *Elementos de Aritmética*[80], de 1927, y *Elementos de Geometría*[81], de 1928. Estaban dirigidos a la segunda enseñanza y también –según expresan sus autores en el prólogo– al último grado de la primaria. Se hicieron reediciones ampliadas en 1933[82], declarando que eran para el tercer curso del bachillerato del Plan de 1903, que el gobierno republicano había vuelto a establecer en 1931, hasta que fue sustituido por el del ministro Villalobos en 1934.

En cuanto a Eyaralar, en el caso de la aritmética reelabora, diez años más tarde, la obra escrita en 1922 para las Escuelas Normales, concediendo mayor papel a la intuición. No disponemos de una reelaboración similar de su libro de geometría, escrito en 1924, por lo que consideramos que el de bachillerato[83], escrito durante el periodo republicano[84], nos puede aportar información acerca de la evolución de las ideas de su autor sobre la manera de tratar la definición.

Elegimos como ejemplo, igual que antes, un tema, el de los cuadriláteros, y comparamos las diferentes propuestas.

Xiberta comienza el tema dedicado a los polígonos por la definición de polígono y sus elementos, antes de los apartados destinados a los triángulos y a los cuadriláteros; tras un apartado en el que demuestra algunas propiedades de los polígonos en general, dedica otro a los polígonos inscritos y circunscritos y a los regulares. El apartado dedicado a los cuadriláteros comienza por una clasificación en paralelogramos, trapecios y trapezoides; presenta a continuación, como casos particulares del paralelogramo, el rectángulo, el rombo y el cuadrado, y este último a su vez como caso particular a la vez de rombo y rectángulo; los trapecios los clasifica en rectángulos, isósceles y escalenos.

[80] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de aritmética*, op. cit.

[81] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de Geometría... (1942)*, op. cit.

[82] Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Elementos y Complementos de Geometría. Colección Elemental Intuitiva*. Imprenta de A. Marzo, Madrid, 1933.

[83] Eyaralar Almazán, *Nociones de...*, op. cit.

[84] Este libro fue autorizado como libro de texto en los institutos de segunda enseñanza por el gobierno republicano (R.O. de 28 de febrero de 1938). Villalaín Benito, *Manuales escolares...*, op. cit., p. 411.

A continuación demuestra varias propiedades de los paralelogramos, y deja las recíprocas ('condición suficiente' para que el cuadrilátero sea un paralelogramo) como ejercicio. Finalmente, aborda el estudio de las propiedades de los polígonos en general. Los ejercicios que hay al final del tema son de demostración de propiedades y, sobre todo, de construcción de polígonos a partir de ciertos datos.

Se trata de una exposición formal, ilustrando las definiciones matemáticas con dibujos geométricos, sin ninguna referencia a ejemplos de la vida real ni tampoco a otras construcciones que las propias del dibujo geométrico.

Rey Pastor y **Puig Adam**, en el primer capítulo dedicado a la geometría, definen los polígonos y demuestran algunas de sus propiedades. En las lecciones dedicadas a los cuadriláteros los clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides; después estudian, en este orden, el paralelogramo, el rectángulo, el rombo, el cuadrado, el trapecio y, finalmente, los polígonos regulares en general, relacionándolos con las circunferencias circunscritas e inscritas.

Sin embargo, el tratamiento de los polígonos, y en particular de las definiciones, es diferente al anterior. Comienzan con una exposición formal pero luego incluyen subapartados dedicados a la construcción de las figuras que se han estudiado, en los que proponen ejemplos que hacen referencia a manipulaciones concretas con materiales de uso corriente (papel, cuerdas, recorridos...), así como referencias y ejemplos de la vida cotidiana, para ilustrar las definiciones y propiedades anteriores e introducir o aclarar otras. Los diferentes cuadriláteros aparecen como casos particulares unos de otros y se hace ver que heredan las propiedades de los de la clase más amplia a la que pertenecen, más otras que puedan tener. Además, hay algunas notas históricas. Entre los ejercicios los hay de demostración y de construcción de polígonos a partir de ciertos datos (con instrumentos de dibujo), pero también los hay de dibujo a mano alzada y en papel o cartulina.

La introducción de estos elementos materiales y de ejemplos de la vida real ayuda a comprender o a aclarar las definiciones, a completar su sentido, y supone una visión menos formal y más intuitiva. En el Prólogo de otro de sus libros, se pronuncian con claridad: «Sólo confundiendo la comodidad del

que lee con la del que expone, puede defenderse la conveniencia de anteponer lo general a lo particular»[85].

En cuanto al libro de **Eyaralar**, hallamos algunas diferencias significativas con los anteriores en el estudio de los polígonos y en particular en cuanto a las definiciones.

Para empezar, no parte de la definición de polígono y, por sucesivas clasificaciones va obteniendo clases y subclases cuyos elementos van heredando las propiedades de los de la clase que los contiene, sino que estudia polígonos particulares, rectángulo, cuadrado, rombo y romboide, antes de definir en general el paralelogramo, y son las propiedades de éste último las que destaca como intersección de todas las vistas, o sea, las comunes a los casos estudiados. Luego estudia el trapecio (sin distinguir subclases) y el trapezoide. Es ahora cuando define lo que es un cuadrilátero, como clase que engloba a todas las estudiadas, cuyos elementos se caracterizan por tener cuatro lados, y después define polígono. En lugar de definir la clase más amplia e ir obteniendo las otras por particiones sucesivas, va de lo particular a lo general, tratando de determinar clases cada vez más amplias que incluyan a las anteriores.

Veamos la diferencia entre las definiciones de 'polígono' en las tres obras consideradas:

> *Xiberta*: «Toda porción de superficie plana P (fig. 88) limitada por una línea quebrada cerrada se llama *polígono*»[86]. [Después clasifica los polígonos por el número de lados].
>
> *Rey Pastor y Puig Adam*: «La línea quebrada cerrada se llama *poligonal* cuando dos lados no consecutivos cualesquiera carecen de punto común, como ocurre en la figura 2.ª. Si cortamos una hoja de papel siguiendo una poligonal se desprende un trozo de hoja que se llama *polígono*, si bien la costumbre ha hecho que este nombre se aplique también a la línea poligonal que lo limita»[87]. [Después clasifica los polígonos por el número de vértices].

[85] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de aritmética*, op. cit., p. VIII.

[86] Xiberta Roqueta, *Elementos de Geometría*, op. cit., p. 50.

[87] Rey Pastor y Puig Adam, *Bachillerato...*, op. cit., p. 31 *(de Nociones de Geometría)*.

> *Eyaralar*: «Se llama polígono a una porción de plano limitada por varios segmentos consecutivos. [...] El *contorno* del polígono es la línea quebrada que forman sus lados»[88].

Ya hemos comentado que Xiberta no incluye ningún ejemplo ni referencia a objetos ni acciones reales, mientras que Rey Pastor y Puig Adam sí lo hacen, al estudiar los distintos tipos de polígonos. E incluso aquí, al hablar de la hoja de papel que se desprende, aclaran la diferencia entre el polígono y su contorno; es decir, al definir no solo se preocupan por el rigor matemático de la definición, sino también de ayudar al alumno a comprender realmente su significado, es decir, los objetos a los que caracteriza. De hecho, la definición de Xiberta, no por más formal es más rigurosa que la de de Rey Pastor y Puig Adam o la de Eyaralar; al contrario, aquél no tiene en cuenta que la definición que da incluye los llamados –impropiamente– 'polígonos estrellados' (que Xiberta no estudia; no los excluye de manera deliberada, simplemente no es consciente de ello).

Otra muestra de la diferencia en la manera de abordar la definición la hallamos en las definiciones de 'rectángulo' y 'rombo'. Mientras que Xiberta los define como los paralelogramos con sus *cuatro* ángulos rectos o con los *cuatro* lados iguales, respectivamente, Rey Pastor y Puig Adam, antes de las definiciones correspondientes, razonan que en un paralelogramo un ángulo recto implica que los cuatro lo sean, o que dos lados contiguos iguales implica la igualdad de los cuatro lados. Así la propiedad de ser un paralelogramo con un ángulo recto, o con dos lados consecutivos iguales, desempeña en cada caso el papel de condición necesaria y suficiente, es decir, de *definición equivalente* de rectángulo o de rombo.

En cuanto a la definición de Eyaralar, utiliza la noción de 'segmento' en lugar de la de 'línea quebrada poligonal', y la condición de que sea una 'porción de plano limitada' (región acotada) sustituye a la condición de que la línea sea 'cerrada'. Esto, unido a que aquí la definición se da una vez que ya se han definido y estudiado varios casos particulares de polígonos, hace que resulte una definición más intuitiva. Además recurre, como Rey Pastor y Puig Adam, a los ejemplos y manipulaciones reales (aunque sean

[88] Eyaralar Almazán, *Nociones de...*, op. cit., pp. 126-127.

evocadas) para aclarar y dar sentido a la definición, que aparece así como una *institucionalización* del objeto geométrico conocido o construido. Prueba de esa intención es que las definiciones –como las propiedades– siempre aparecen, no solo en letra cursiva, sino además recuadradas destacando en el texto. El propósito está explicado en las *Observaciones Preliminares* de la obra:

> Se dan en letra cursiva y encuadradas definiciones, propiedades y reglas que creemos deben aprenderse de memoria por los alumnos, faltos generalmente de léxico, como modelo de lenguaje y expresión, para *facilitar la obtención ulterior de conocimientos que sobre ellas se apoyan*, y en las reglas, para facilitar la obtención del mecanismo operatorio y recobrarlo cuando se haya perdido[89].

La definición aparece vinculada así a la función de servir a la obtención de nuevas propiedades. La importancia que concede Eyaralar a la intuición se advierte en detalles como que antes de cada definición (o de cada propiedad) haya un epígrafe titulado «Experimento», que contiene un ejemplo de manipulación con objetos reales para construir la figura (o para comprobar la propiedad). Y esta *técnica didáctica* aparece sistemáticamente en toda la geometría del libro, para abordar la *tarea* de dar una definición. Su autor explica la razón, argumentando que «la exposición es razonada, porque ha de serlo toda enseñanza y especialmente la Matemática, pero apelando a la intuición y prescindiendo del rigor lógico en cuanto es indispensable para adaptarse a la capacidad del alumno»[90]. Y, recordemos que, en la institución 'bachillerato elemental' los alumnos ingresaban con 10 u 11 años. Podemos observar algunos elementos de la *tecnología didáctica* asociada en el artículo que publica en la *Revista de Escuelas Normales*; en ese caso ponía como ejemplo la definición de 'línea recta':

> Observación 2. Un hilo pendiendo libremente, tenso por la acción de un peso, cuyo grueso podamos suponer que disminuya cuanto se quiera suscita en nosotros el concepto de un *segmento rectilíneo.*
>
> Las propiedades del segmento rectilíneo se fijan en los postulados siguientes.

[89] Ibídem, p. 5. El enfatizado es nuestro.
[90] Ibídem, p. 5.

> (Esta definición, llamémosla así, válida para iniciar una exposición rigurosa, lo es más para la enseñanza elemental, por lo cual se impone la desaparición de las definiciones a que antes aludíamos [definiciones usuales en textos de secundaria, rigurosas solo en apariencia], y que aprenden los muchachos de memoria sin comprender su significación... afortunadamente. De ella se deduce el trazado de rectas por una cuerda tirante, volviendo por tanto inmediatamente a la práctica; como debe hacerse en toda enseñanza pedagógica de las matemáticas)[91].

Otra técnica didáctica utilizada para abordar la tarea de «ejercitar en la comprensión de definiciones y propiedades» son los que denomina «ejercicios de *inteligencia*»[92]. Aunque los ejemplos en los que más explícitamente se pone de manifiesto esta intención quizá sean los que aparecen en la parte de aritmética:

> ¿A cuál de las definiciones [de división] corresponde mejor la palabra resto? ¿Y la palabra diferencia?
>
> Pon ejemplos de problemas que se resuelvan con arreglo a la primera definición. [...]
>
> ¿Qué elementos de la división según la Definición primera tienen carácter concreto? [...]
>
> ¿Qué elementos de la división son concretos según la Definición segunda?[93]

Ejercicios para interpretar la definición de 'división' y comprender cada una de las tres definiciones posibles ya se proponían en el libro de aritmética de 1922 y en el de 1932, destinados a quienes se preparaban para ser maestros.

Efectivamente, las reflexiones que hace Eyaralar sobre cómo han de enseñarse las matemáticas en la escuela primaria y en la formación de maestros guían igualmente esta propuesta para la enseñanza de la matemática, en particular de las definiciones matemáticas, en el primer ciclo del bachillerato.

[91] Eyaralar Almazán, José María: «Los conceptos fundamentales de la Geometría». *Revista de Escuelas Normales*, 1930, **75**, pp. 223–227. Cita en p. 224.

[92] Eyaralar Almazán, *Nociones de...*, op. cit., p. 5.

[93] Ibídem, p. 32, p. 41

8.2. La validación

Nos ocuparemos en primer lugar del tratamiento que se hace de la demostración en los libros escritos para la asignatura *Metodología de la Matemática* que se centran de la metodología de la ciencia; como ya hemos comentado (p. 320) son los libros de Xiberta y de Rey Pastor y Puig Adam. En ellos se ponen de manifiesto las ideas de sus autores sobre la demostración y el papel que desempeña en la matemática, el valor que atribuyen a cada uno de los métodos y tipos de demostración, e incluso las *funciones* que le asignan. Michael de Villiers asigna cinco funciones a la demostración en matemáticas: *verificación* (una prueba matemática muestra la verdad de un enunciado); *explicación* (permite analizar o profundizar en por qué es verdad); *descubrimiento* (puede servir para descubrir o inventar nuevos resultados); *sistematización* (se refiere a organizar varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas); *comunicación* (se refiere a la transmisión del conocimiento matemático)[94]. Después veremos cómo algunos autores proponían tratar la validación en el marco de una enseñanza activa, que concede la mayor importancia a la intuición, y las propuestas en relación con la demostración en la enseñanza primaria; consultaremos libros para este nivel y también los libros de Metodología con una orientación didáctica, como los de Sáiz Salvat y Eyaralar. Por último, a modo de ejemplo, compararemos las demostraciones de un mismo autor, José María Eyaralar, en libros de aritmética para Escuelas Normales escritos en momentos diferentes, lo que permitirá observar diferencias debidas en parte a la evolución personal del autor, y en parte al aumento de la influencia de las ideas de la Educación Nueva.

Atendemos así a la dimensión praxeológica y a la ecológica, en el sentido de la TAD. A lo largo del apartado haremos referencia a las ideas y propuestas de los autores sobre la formación de los maestros, en lo que se refiere al razonamiento matemático y concretamente a la demostración.

[94] De Villiers, Michael: «El papel y la función de la demostración en matemáticas». *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 1993, **26**, pp. 15–30.

8.2.1. La demostración en los libros de metodología de la matemática

En primer lugar analizamos las propuestas de algunos autores que escribieron libros para la asignatura *Metodología de las Matemáticas* para ser utilizados en las Escuelas Normales e incluyen el tema de la demostración entre sus contenidos. Nos centramos sobre todo en obras de carácter más formalista, como las de Rey Pastor y Puig Adam o Xiberta, y en otras con una intención más didáctica, como las de Eyaralar, Paunero o Sáiz Salvat. Estas últimas y algunas otras que no tratan la demostración propiamente aunque incluyen ejemplos, como la de Margarita Comas, servirán de referencia sobre todo para ver qué transposición se hace de la demostración cuando se trata de la enseñanza primaria.

Manuel Xiberta Roqueta dedica el segundo capítulo de su *Metodología*, titulado «Formación de las ciencias matemáticas», a cuestiones de fundamentos de la matemática, y a cómo establecer las verdades en matemáticas, sin entrar en métodos de demostración, que se tratan ampliamente en los dos capítulos siguientes. Comienza por definir algunos términos: «*Proposición* es la exposición clara y precisa de una verdad matemática que debe probarse. El razonamiento con que se prueba esta verdad se llama *demostración*»[95]. A continuación, explica la necesidad de utilizar axiomas y postulados; tras aclarar las condiciones que ha de cumplir un sistema de postulados, esto es, que sean compatibles entre sí e independientes, señala como postulados en los que se fundamenta la geometría métrica:

> *La mínima distancia entre dos puntos es la medida del segmento comprendido entre ellos.*
>
> *Por dos puntos dados puede pasar una recta y solamente una.*
>
> *Dos rectas distintas no pueden tener más que un punto común.*

Y más adelante se intercala el llamado postulado de Euclides (postulado de las paralelas)[96].

[95] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit., p. 26.

[96] Ibídem, p. 27.

Sin embargo, esta lista de postulados no puede servir para basar, como pretende Xiberta, la geometría métrica por varias razones. En primer lugar, no cumple una de las dos condiciones que él mismo impone, la independencia, ya que el tercer postulado es consecuencia del segundo, por lo que sobra. Pero hay otras razones: el primer postulado introduce la noción de 'distancia', no definida[97] y por tanto sin sentido. Además en esta lista de postulados, que no coincide con los que Euclides establece para fundamentar la geometría, faltan postulados básicos, como la existencia del círculo con centro y radio dados o la igualdad de los ángulos rectos[98].

Se observa pues una manifiesta falta de reflexión, por un lado, y de consulta de fuentes fiables por otro, lo que deja en evidencia a su autor, en lo que se refiere a su preparación matemática. Pero esta falta de 'finura matemática' se aprecia también en lo que sigue. Expone los 21 axiomas (de conexión, de ordenación, de paralelismo de igualdad y de continuidad) con los que el matemático David Hilbert –una vez que se conocía que los axiomas de Euclides eran incompletos– había fundamentado a finales del siglo XIX la geometría euclídea, e incluye el cuarto del grupo II: «Cuatro puntos colineales A, B, C, D, pueden ordenarse de modo que B quede entre A y C y también entre A y D, y que C quede entre A y D y también entre B y D»[99]. Pero este axioma[100] efectivamente enunciado por Hilbert en 1899[101], era redundante (se podía por tanto eliminar), hecho que ya en 1902 se había demostrado, aunque Xiberta no lo sabría.

[97]Tampoco las definiciones primeras, del Libro I de Euclides definen esta noción. Euclides: *Elementos. Libros I-IV*. Traducido por M.ª Luisa Puertas Castaños. Gredos, Madrid, 1991, pp. 89-96.

[98]Euclides, *Elementos. Libros I-IV*, op. cit., p. 197.

[99]Xiberta Roqueta, Manuel: *Matemáticas. Metodología y Prácticas*. Gerona: Talleres Gráficos de Solomón Marqués, 1934, op. cit., p. 29.

[100]Se conoce como *Teorema de Pasch*.

[101]La formulación original es «II, 4. Any four points A, B, C, D of a straight line can always be so arranged that B shall lie between A and C and also between A and D, and, furthermore, that C shall lie between A and D and also between B and D». Hilbert, David. The Foundations of Geometry. (Trad. E.J.Townsend). The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1950 (Ed. original The Open Court Publishing Co., 1902), p. 4. En: http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf?session_id=24ff5c16c8f581e6435b1e45ee5b75ca937a4689 [Consultado el 10-10-2015].

En cualquier caso, lo sorprendente es que enumere este extenso conjunto de axiomas, que no resultan precisamente simples, y no deberían parecerlo a un hipotético alumno normalista sin ninguna clase de explicación, gráfico ni ejemplo y, sobre todo, sin referirse después a ellos en el resto de la obra. Es más, justo a continuación critica la «matemática moderna» (la matemática basada en la fundamentación de Hilbert) cuyos fundamentos con tanto detalle acaba de exponer, o más bien se limita a recoger la crítica realizada por Poincaré[102].

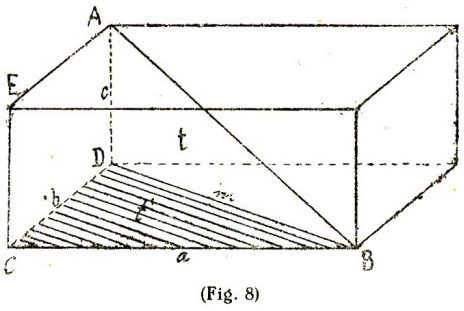
Lo curioso es que critica el carácter excesivamente formal de la geometría de Hilbert, pero el término 'formal' aquí se aplica a una cuestión de filosofía de la matemática, es una cuestión de fundamentos. No se trata de una crítica al formalismo (como opuesto a la intuición) en cuanto al modo de presentar la matemática para su enseñanza y aprendizaje; formalismo que por cierto es una característica de las obras de Xiberta, al contrario que las de sus contemporáneos más renovadores. Sencillamente este autor se limita a recoger en su obra las teorías –y las discusiones– más conocidas en aquel momento, sin analizarlas, con una intención más enciclopedista que didáctica.

Tras los postulados y axiomas, define teorema como proposición que precisa demostración, y algunas relaciones entre los teoremas: teoremas recíprocos, contrarios, equivalentes; también deduce algunas leyes para dar por probados teoremas que se relacionan de alguna de estas formas.

El apartado siguiente trata de los problemas, y el último sobre los métodos *deductivo* e *inductivo* en matemáticas. Para Xiberta la demostración y la resolución de problemas son las dos maneras de deducir los hechos en matemáticas; ambas permiten deducir hechos matemáticos a partir de otros. El primero de los procesos da lugar a la conclusión de un teorema y el segundo a la solución de un problema. En cuanto a los métodos inductivos, diferencia entre inducción incompleta, que asocia a las ciencias experimentales, e inducción completa. Clasifica los métodos deductivos en directos, el *sintético* y el *analítico*, e indirectos, como el de *reducción al absurdo*.

[102]El enfrentamiento entre los matemáticos David Hilbert y Henry Poincaré era famoso en aquel tiempo. Poincaré estaba enfrentado a las posturas logicistas, en un momento en que el tema de la fundamentación del edificio matemático había sido una cuestión importante para la comunidad matemática internacional. Por ello en varias obras de *Metodología* se cita a Poincaré como defensor de los métodos intuitivos.

A explicar los métodos de demostración y poner ejemplos consagra los dos siguientes capítulos del libro. Dedica atención a aclarar la diferencia entre el método *sintético* y el *analítico* a la hora de demostrar un teorema, y pone varios ejemplos de problemas resueltos sucesivamente por ambos métodos. El interés en explicitar el método, el proceso lógico seguido, se advierte en que al final de cada demostración hace una síntesis de ella, detallando la sucesión de pasos. Por ejemplo, para demostrar que la diagonal de un paralelepípedo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones, lo hace primero por síntesis (figura 8.2, p. 541) y luego por análisis:



(Fig. 8)

Demostración por síntesis. — Trazando el segmento *m* (1) se obtienen dos triángulos rectángulos *t* y *t'*; y así se tiene:

$$AB^2 = m^2 + c^2 \qquad (2)$$

pero

$$m^2 = a^2 + b^2 \qquad (3)$$

luego

$$AB^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (4)$$

de donde

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (5)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Figura 8.2: Xiberta. Demostración por síntesis

Proceso demostrativo: (1) Construcción auxiliar a fin de relacionar la diagonal con las aristas por medio de triángulos. (2) Verdad inicial. (3) Nueva igualdad resultante de aplicar el teorema de Pitágoras. (4) Id. resultante de una transformación legítima. (5) Tesis que se quería demostrar [fórmula]. [...]

Demostración por análisis: Supongamos cierta la igualdad

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (1)$$

elevando al cuadrado

$$AB^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (2)$$

Trazando el segmento m se tiene:

$$a^2 + b^2 = m^2 \qquad (3)$$

de donde:

$$AB^2 = m^2 + c^2 \qquad (5)$$

verdad conocida; luego el teorema es cierto.

Proceso demostrativo. (1) Tesis que suponemos cierta [fórmula]. (2) Transformación legítima. (3) Construcción auxiliar para facilitar la descomposición del segundo miembro. (4 y 5) Transformaciones legítimas, la última de las cuales resulta ser una verdad conocida (el teorema de Pitágoras) que evidencia la certeza de la igualdad inicial[103].

Después expone no solo las diferencias entre ambos métodos, sino también las ventajas e inconvenientes que presenta cada uno de ellos. Señala que, además del procedimiento lógico de demostración, el llegar a demostrar algo depende de la «cultura matemática» que se tenga; es decir, de los conocimientos matemáticos, y que a veces hacen falta también 'ideas felices', para decidir qué teoremas o propiedades aplicar en un momento de la demostración, la forma en la que manipular las expresiones que se van obteniendo, etc.

Critica el abuso que se hace a veces del método sintético, ya que considera un error asociar casi exclusivamente el método analítico a la 'invención' y al descubrimiento de resultados nuevos y el sintético a la exposición; se refiere en sus juicios a la forma en la que viene expuesta la matemática en los textos, por emplear el método sintético de manera generalizada. De alguna manera, reconoce en dicha forma de presentar la matemática las *funciones de comunicación y de verificación* de la demostración; sin embargo, echa en falta otras funciones, como las *funciones explicativa y de descubrimiento*[104]:

> No puede negarse que, una vez descubierto un hecho matemático, resulta más cómodo exponerlo por síntesis y hasta no hay duda de que así *convence* más a los principiantes.
>
> Mas, también es cierto que el empleo exclusivo de la síntesis en la enseñanza de las Matemáticas origina funestas consecuencias. [...] en lugar de ser los alumnos sujetos activos de la enseñanza [...] aquéllos

[103] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit., p. 46.

[104] De Villiers, *El papel y la función...*, op. cit. Esta terminología es actual.

> actúan de meros receptores, quedando así poco menos que anulado el *valor educativo* de la enseñanza de las matemáticas[105].

Tras los que Xiberta denomina «métodos generales de demostración», explica el método de recurrencia o de inducción completa y, en el capítulo siguiente, el método de demostración por reducción al absurdo y las demostraciones utilizando proposiciones equivalentes o utilizando los teoremas recíprocos. A continuación, incluye ejemplos de teoremas demostrados, cada uno de ellos, de varias maneras: «por síntesis, por análisis y por el absurdo». A diferencia de Rey Pastor y Puig Adam o de Eyaralar, Xiberta cuando describe las técnicas de demostración no hace distinción entre *modos* y *métodos* de demostración[106]. El modo se refiere al procedimiento de exposición (análisis o síntesis) mientras que el método hace referencia al procedimiento lógico (inducción completa, reducción al absurdo, método constructivo, analogía y dualidad), pero en la obra de Xiberta, aunque en principio se refiere a los modos como métodos generales, no queda suficientemente clara la diferencia con los métodos.

En cuanto a los *tipos* de demostración[107] –atendemos ahora a la estructura lógica del enunciado– los ejemplos que pone son 'de condición suficiente' (salvo algunas igualdades, como el ejemplo recogido anteriormente). A pesar de que este autor hace un estudio de la demostración casi exclusivamente matemático –con muy escasos comentarios acerca de su utilización o tratamiento en la enseñanza–, no se observa preocupación por diferenciar en las demostraciones aspectos lógicos, ni en cuanto a la implicación (condición necesaria, suficiente o necesaria y suficiente) ni relativos al cuantificador universal (existencia, imposibilidad, unicidad).

Finalmente, se ocupa del *método de inducción* y de las demostraciones por *reducción al absurdo*. Este último método lo critica por motivos lógicos o filosóficos, pero también por razones pedagógicas, por el peligro que supone

[105] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit., pp. 53-54. La cursiva es nuestra.

[106] Ibañes Jalón, Marcelino J. y Ortega del Rincón, Tomás: «Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato». *Números*, 2005, **61**, pp. 19–40.

[107] Conejo Garrote, Laura y Ortega del Rincón, Tomás: «Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes españolas». *Números*, 2014, **87**, pp. 5–23.

de fijar en la memoria hipótesis y conclusiones falsas; eso sí, no se refiere a la dificultad lógica que supone comprender el método en sí. Aunque por otro lado considera de utilidad, con alumnos del grado profesional, demostrar por reducción al absurdo teoremas ya estudiados «para *repasar* e *intensificar* los conocimientos matemáticos adquiridos»[108]. En este caso parece atribuir al método la *función de sistematización*.

En su libro hay ejemplos de demostraciones de un mismo teorema por varias técnicas, de modo que quedan patentes las características del método utilizado en cada caso y las diferencias entre ellos. También aparecen claramente diferenciados el 'enunciado' de la proposición o teorema de su 'demostración', lo que contribuye a marcar los papeles respectivos y a reconocer el proceso como una demostración[109]. Algunas décadas después, en otra de sus obras, se percibe la importancia que concede Xiberta a enseñar una matemática razonada:

> No hay razón ni pretexto alguno para enseñar las reglas operativas prescindiendo de los principios en que se fundan. No hay razón, porque al convertir la Aritmética en un arte de sacar cuentas, y la Geometría en un recetario para distinguir formas y obtener medidas, sin otro esfuerzo por parte del alumno que retener palabras y fórmulas en la memoria, se anula todo el valor educativo de la enseñanza de las Matemáticas[110].

Se echan en falta, en cambio, comentarios acerca de la conveniencia o de las ventajas de unos métodos sobre otros, según los casos (los que hace no son específicos del tipo de proposición que se demuestra), en particular observaciones de tipo didáctico en una obra destinada a quienes habrían de enseñar matemáticas. La preocupación por exponer con rigor los métodos propios de la «matemática sabia» parece ser lo primordial en la obra de Xiberta.

[108] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit., p. 73.

[109] Ibañes Jalón, Marcelino J. y Ortega del Rincón, Tomás: «Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato». *Números*, 2004, **57**, pp. 19–32.

[110] Xiberta Roqueta, Manuel y Xiberta Peremateu, Juana: *Aritmética y su Metodología*. Suc. tipografía Careras, Gerona, 9.ª edición, 1961.

Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam en su *Metodología y didáctica de la matemática elemental*[111], exponen la diferencia entre los métodos *inductivos* (aquellos que van de lo particular a lo general) y *deductivos* (los que parten de lo general para llegar a lo particular), así como entre los métodos *analítico* (basado en la descomposición en elementos simples) y *sintético* (aplicación de leyes generales a casos particulares). Pero inmediatamente aclaran que no existe equivalencia entre inducción y análisis ni entre deducción y síntesis.

Tampoco están de acuerdo con la creencia de que la exposición de las matemáticas en la enseñanza se hace por síntesis, y en las creaciones o los descubrimientos matemáticos se emplee sólo el análisis:

> Lo que acontece es que la moderna pedagogía, que utiliza además conjuntamente el análisis en la enseñanza, lo hace precisamente para seguir el mismo camino de la invención: por ello, tal combinación del análisis y de la síntesis que remeda en la enseñanza la vía de la invención y que convierte al alumno en un redescubridor de verdades ya sabidas por otros, suele designarse por el nombre de método *eurístico* [sic][112].

Observamos pues un claro reconocimiento de la *función de descubrimiento*[113] de la demostración en matemáticas.

Diferencian entre las ciencias experimentales o 'ciencias físicas', en las que la inducción incompleta es el método aceptado de validación, y las matemáticas, en las que la inducción incompleta no permite establecer verdades generales, y lo relacionan con el concepto de verdad en unas ciencias y otras.

Tras establecer la obligación del método deductivo, argumentan la necesidad de disponer de un sistema de axiomas o de postulados para basar en él –directa o indirectamente– todos los razonamientos posteriores. En cuanto a la demostración de una propiedad o teorema, la explican con un ejemplo que puede llevar a caer en un «círculo vicioso»[114]. Y posteriormente tratan de los

[111] Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica...*, op. cit.
[112] Ibídem, pp. 7-8.
[113] De Villiers, Michael: «An example of the discovery function of proof». *Mathematics in School*, 2007, **36(4)**, pp. 9–11.
[114] Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica...*, op. cit., p. 17.

teoremas derivados, esto es, el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco, lo que aprovechan para definir lo que es una *condición necesaria y suficiente*.

Estos autores conceden importancia al análisis de la estructura lógica del enunciado; aunque el libro no incluye relaciones de ejercicios y problemas casi en ningún capítulo, en este caso se hace una excepción, ya que hay 8 ejemplos y ejercicios destinados a identificar este tipo de condiciones:

> 6.- Pártase de la siguiente proposición:
> Todo alumno con más de quince faltas de asistencia será suspenso.
> Fórmese la contraria, la recíproca y la contrarrecíproca.
> 7.- Dígase cuáles son ciertas.
> 8.- Se puede deducir de esta proposición una condición necesaria para aprobar. ¿Es suficiente? Se puede deducir una condición suficiente para ser suspenso. ¿Es también necesaria?[115]

Alguno de ellos incide en cuestiones cuyo tratamiento se echa en falta incluso en el momento actual:

> Es condición *necesaria* para que una división esté bien hecha, que el divisor por el cociente, más el resto, sea igual al dividendo; pero no es *suficiente*, pues se precisa además que el resto sea menor que el divisor.
>
> Ambas condiciones conjuntamente son *necesarias y suficientes*, es decir, determinan el cociente y el resto[116].

Se observa en esta obra que sus autores destacan la importancia del *proceso global* de la demostración, aspecto necesario para la comprensión de lo que es un proceso de demostración en matemáticas[117]. Para ello ponen como ejemplo el teorema que establece que, dado un triángulo rectángulo, la circunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa pasa por el vértice del

[115] Ibídem, p. 49.

[116] Ibídem, p. 49.

[117] Ibañes Jalón, Marcelino J. y Ortega del Rincón, Tomás: «Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de Trigonometría en Bachillerato». En: *VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, SEIEM, Logroño, 2002. `http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Ibanes02.pdf`. Consultado el 10-10-2015.

ángulo recto. Especifican cuál es la 'hipótesis', cuál la 'tesis' y qué es o en qué consiste la 'demostración'; pero además analizan los teoremas utilizados y la cadena deductiva completa[118].

El método de demostración por reducción al absurdo ocupa un capítulo y tras su exposición realizan una crítica, como hace Xiberta un año después, mencionando las mismas razones.

Aunque la *Metodología* de Rey Pastor y Puig Adam, al igual que la de Xiberta, se centra en la metodología de la matemática y no en una metodología didáctica, el tratamiento es distinto. Por ejemplo, no recogen largas listas de axiomas o postulados, sino solo algún ejemplo, pues lo que pretenden es justificar la necesidad de un sistema de axiomas por la imposibilidad de deducir las verdades primeras; el interés se centra en hacer entender la imposibilidad de deducir todas las verdades de otras anteriores y la necesidad de establecer algunas de partida.

Consideran que en la enseñanza no siempre el rigor es la prioridad:

> Esta posibilidad de desarrollo perfectamente lógico no excluye que en la enseñanza se admitan numerosas propiedades como evidentes, aunque podrían ser deducidas [...]. Y esto se hace con el laudable fin de simplificar y abreviar la exposición, que de aquel modo resultaría excesivamente larga y complicada[119].

En todo caso, para Rey Pastor y Puig Adam, al contrario que para Xiberta, está clara la diferencia entre una enseñanza *racional* y una enseñanza *formal*, y así lo afirman en los Prólogos de sus *Elementos de Aritmética*[120] y de sus *Elementos de Geometría*[121], obras destinadas a la enseñanza secundaria y al último grado de la primaria.

Felipe Sáiz Salvat se refiere a la demostración en varias ocasiones en su obra sobre metodología de la matemática[122]. Primero describe el método

[118] Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica...*, op. cit., pp. 34-36.
[119] Ibídem, p. 18.
[120] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de aritmética*, op. cit., Prólogo.
[121] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de Geometría... (1942)*, op. cit., Prólogo.
[122] Nos referimos a la primera parte, titulada *I. Metodología*, de la obra, ya citada, *Arte de Estudiar Matemáticas*, que contiene otras dos partes: *II. Didáctica* (referida a la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria) y *III. Cálculo Mental*.

analítico (que presenta como propio de la investigación y más científico) y el sintético (más didáctico, del profesor), declarando que ambos son intuitivos y propios de las ciencias empíricas. Como métodos abstractos, característicos de las ciencias formales, señala el inductivo y el deductivo. En cuanto a las matemáticas, aunque formales, aclara que se desarrollan 'inductivamente' a partir de postulados, axiomas y definiciones, pero las demostraciones de las proposiciones se hacen por deducción, por lo que las caracteriza de ciencias inductivo-deductivas.

Muestra confusión en lo que se refiere a estos conceptos sobre los fundamentos de la matemática y sus métodos: «Hay cierta distinción entre axioma y postulado: ambos no necesitan demostración por ser evidentes. Pero el axioma puede demostrarse, mientras el postulado no»[123]. Pone precisamente como ejemplo de postulado el quinto de Euclides, pero no hace comentario alguno sobre él ni aclara por qué declara demostrables a los axiomas. De hecho los ejemplos que pone de axiomas coinciden con lo que Euclides denomina «nociones comunes»[124] en el Libro I de los *Elementos*: «Si dos valores son iguales a otro, aquéllos son iguales»[125]. El propio Aristóteles califica de *premisas* o *verdades primeras* estas afirmaciones, lo que implica que no son demostrables.

Contrapone *definición* a *teorema* y caracteriza a estos últimos precisamente por necesitar demostración. Dedica su esfuerzo a distinguir la hipótesis de la tesis, con varios ejemplos en que vienen diferenciadas una y otra; describe lo que son teorema recíproco y contrario, y establece varias leyes para deducir la verdad de uno a partir de otros relacionados.

Es consciente, y así lo dice expresamente, de la relación entre la demostración y la resolución de problemas –en realidad todos los autores estudiados relacionan ambas cosas y exponen los métodos mencionando ambas–, considerando que la demostración de un teorema es un problema.

Llama «experimentales» a los métodos analítico-sintéticos, por oposición a los 'formales' o pruebas «más lógicas». El libro incluye varios ejemplos de demostraciones realizadas por síntesis y por análisis, para comparar ambos

[123] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 11.
[124] Euclides, *Elementos. Libros I-IV*, op. cit., p. 199.
[125] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 11.

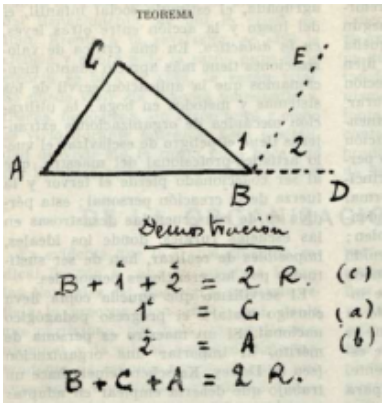
modos. Concretamente, identifica el método sintético con el «procedimiento de sustituciones sucesivas», al que atribuye sencillez y rigor lógico y considera el más agradable y comprensible para los estudiantes. La preocupación por hacer las demostraciones comprensibles, al tiempo que rigurosas, es lo que le lleva a proponer que se justifique cada uno de los pasos:

> Por ello es conveniente, cuando se ha aplicado [el procedimiento de sustituciones sucesivas] a un razonamiento, anotar al margen del desarrollo escrito o enunciar si la exposición es oral, las proposiciones que se han necesitado para patentizar a certeza de la verdad[126].

Esta misma recomendación veremos que la hace también para la enseñanza primaria. Dos años después de escribir su obra de metodología, insiste en esta misma idea: «el maestro que conozca el proceso permanente de *sustituciones sucesivas* estará más capacitado para una sugerencia educativa, de origen personal, que si aplica fríamente el sistema Decroly»[127], y propone este ejemplo:

> Así, si demostró [el maestro] que *la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos*, puede ocurrírsele hacer escribir a los niños, a la derecha del desarrollo, las proposiciones que fundamentan el razonamiento para llegar con ello a una educación lógica.

TEOREMA



a) En un sistema de dos rectas paralelas las [sic] cortadas por una secante, los ángulos alternos internos son iguales.
b) En un sistema de dos rectas paralelas cortadas por una secante, los ángulos correspondientes son iguales
c) Los ángulos consecutivos en una misma región de una recta valen dos rectas [sic].

[126] Ibídem, p. 18.

[127] Sáiz Salvat, Felipe: «De la organización didáctica». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **94**, pp. 4–6. Cita en p. 5.

La preocupación por hacer las demostraciones más comprensibles se manifiesta en el ejemplo que pone a continuación, en el libro que estudiamos, el de la propiedad distributiva de la multiplicación, que demuestra primero de forma «cifrada», luego de manera «general» y por último, por «sustituciones sucesivas», según la denominación del propio autor[128]. Hay que destacar que en realidad lo que hace es poner en primer lugar un ejemplo que actúa de *ejemplo genérico*[129] con dos sumandos, luego lo ejemplifica para n sumandos –esta prueba sería un paso intermedio entre la anterior y la general– y, finalmente, da una prueba algebraica que reproduce la anterior, con letras en lugar de números. Saiz Salvat utilizó el término 'general' en el sentido de un número cualquiera de sumandos, no en el sentido de una demostración general, que es la que hace en tercer lugar[130].

Más adelante y como introducción al método matemático de demostración por inducción (completa) vuelve a retomar esta propiedad y realiza de nuevo la demostración dos veces con sendos ejemplos, antes de enunciar la propiedad en general. A este método de validación[131] lo denomina «de *extensión*, porque la propiedad que se observa en los casos particulares *se extiende* a todos los demás similares»[132], descripción que coincide con la utilización de un ejemplo como ejemplo genérico.

Es de destacar que, aunque al describir los métodos de prueba no formales es evidente su interés por la intuición, sin embargo cuando describe los métodos de demostración matemática, los ejemplos que pone no son los más sencillos; como en el caso del método de inducción completa, para el que

[128] $(a+b)n = (a+b)+(a+b)+.....+(a+b)_{nveces} = a+b+a+b+.....+a+b_{nveces} = a+a+.....+a_{nveces}+b+b+.....b_{nveces} = an+bn$.

Proposiciones premisas. 1.- Definición de multiplicar. 2.- Ley disociativa de la suma. 3.- Ley conmutativa de la suma. 4.- Principio: Una suma de sumandos iguales es igual al producto del sumando repetido por el número de ellos. (Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 19).

[129] Hemos comentado la definición de Balacheff de 'ejemplo genérico' en la p. 177.

[130] Aunque se trate de una prueba algebraica, no puede considerarse una demostración matemática rigurosa ya que no utiliza una definición verdaderamente formal de suma y de producto, apelando a la axiomática de Peano, por ejemplo.

[131] $(7+6)3 = (7+6)+(7+6)+(7+6) = 7+6+7+6+7+6 = 7+7+7+6+6+6 = 7x3+6x3$. Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 48.

[132] Ibídem, p. 49

pone el ejemplo la demostración por inducción de la fórmula del binomio de Newton.

La falta de formación matemática de Sáiz Salvat, y posiblemente la consulta de fuentes matemáticas no del todo fidedignas, o quizá no actualizadas, se percibe nuevamente en el tratamiento de algunas cuestiones matemáticas. Por ejemplo, cita como método de demostración el que denomina «procedimiento de los límites»; hace referencia a la definición de 'número real' mediante las 'cortaduras' de Dedekind, y aplica el 'procedimiento de los límites' a la definición de a^x, con x irracional («no conmensurable»)[133]; en realidad se trata de una *definición* como el límite común de dos sucesiones, una creciente y otra decreciente, y es el hecho de definirlo de ese modo lo que requiere a su vez probar que dichos límites existen y coinciden.

La exposición citada merece varios comentarios. En primer lugar, menciona la construcción de los números reales[134] de Dedekind, pero dando por sabida esta construcción, que no se recoge en el libro anteriormente, lo que hace incomprensible este discurso para estudiantes no familiarizados. Tras eso, plantea la *definición* de a^x, con x no conmensurable, como una *demostración*, y en ningún momento aclara que la demostración que se propone hacer, una demostración de existencia y unicidad, es una *exigencia del modo de definir* mediante límites, y no la prueba de ninguna propiedad del objeto matemático así definido. Por si fuera poco, en la demostración no aclara suficientemente los pasos ni las propiedades que utiliza, concretamente para elegir [determinar] las dos sucesiones que utiliza o para demostrar el crecimiento o decrecimiento de cada una de ellas.

Esta falta de preparación matemática no es exclusiva de Felipe Sáiz; Manuel Xiberta también da muestras de ello, entre otras cosas, precisamente en relación con la noción matemática de 'límite', en el capítulo dedicado a la medida de cantidades:

> Se dice que una magnitud constante es el *límite* de una variable, cuando ésta última, *creciendo o decreciendo sin cesar* con arreglo a una ley, se va acercando cada vez más a la primera de tal modo, que la

[133] Ibídem, pp. 21-27.

[134] Él, como otros autores, habla de conmensurables e inconmensurables para referirse a los racionales e irracionales, respectivamente.

> diferencia entre ambas puede llegar a ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, *sin reducirse nunca a cero la expresada diferencia*[135].

En la misma página, más adelante, insiste otra vez en uno de los errores que contiene la definición, cuando dice expresamente que la variable no puede tomar el valor del límite.

En cuanto al libro de metodología escrito por **Luis Paunero**, no contiene un capítulo específico sobre la demostración en matemáticas (los capítulos tampoco van estructurados en apartados), pero sí que hace referencia a la demostración en varios momentos, en general mezclando aspectos matemáticos de la demostración con observaciones de carácter didáctico, tratando aspectos como las características de las matemáticas, los métodos de razonamiento propios, la historia y la filosofía de esta ciencia, e intercalando todo ello en un discurso generalmente poco estructurado, en el que se percibe en ocasiones, junto a un sincero reconocimiento del valor educativo de las matemáticas y de los métodos activos para su enseñanza, un conglomerado de ideas que debían ser importadas de otros textos[136] con una exposición más compilatoria que sistemática.

Hace un repaso histórico de las exigencias de rigor en matemáticas, y reconoce que estas exigencias, no solo no han sido las mismas en todos los periodos históricos, sino que el rigor se entiende de diferente manera en la investigación matemática y en la enseñanza. Describe lo que es un proceso demostrativo en matemáticas, diferencia entre axiomas, postulados y teoremas, y en los postulados entre *esenciales* (no pueden demostrarse) y *circunstanciales* (se admiten sin demostración por razones didácticas).

Comenta el papel de los procesos inductivos y deductivos en matemáticas. En cuanto a los primeros diferencia, como hacen otros profesores, la inducción en matemáticas y en las ciencias físicas; incluso pone dos ejemplos para

[135] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit., p. 85. La segunda y tercera cursivas son nuestras.

[136] Hemos observado que debió importar muchas de las ideas del libro de Eyaralar, publicado dos años antes y que figura entre la compilación bibliográfica que hay al final del libro.

mostrar cómo un proceso de inducción incompleta no permite asegurar que conduzca a una conclusión verdadera[137] y, a continuación, enuncia el principio de inducción completa, aunque no pone ningún ejemplo de aplicación del método (se refiere a la fórmula del binomio de Newton, pero ni la enuncia siquiera).

Destaca el papel que, junto a los procesos deductivos, tiene la inducción en esta ciencia. Se refiere también a las demostraciones por reducción al absurdo (sin ejemplo alguno), que considera poco recomendables en la enseñanza elemental, por las mismas razones que sus contemporáneos. En cualquier caso, afirma que todo proceso demostrativo comienza por uno de inducción.

Observamos en este autor, igual que en los dos últimos citados, cierta falta de 'finura matemática' en el tratamiento que hace de la demostración.

Un ejemplo lo hallamos cuando comenta el *método de la correlación*, que Paunero define como «método típicamente geométrico que consiste en hallar las relaciones que existen entre unas proposiciones y otras»[138], y luego aclara que su base son las relaciones entre la geometría plana y la del espacio. Escribe respecto a este método de validación: «Todas las demostraciones de propiedades de ángulos, entre ángulos y planos y ángulos diedros, son sencillas, pues podemos trasladar uno a otro, trasladando también la palabra»[139]. Por suerte no pone ningún ejemplo.

Comparemos con José María Eyaralar, que define el método de correlación como

[137]Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., pp. 74-75. Los ejemplos son: la conclusión –falsa– de que todos los números que se obtienen como producto de los p primeros primos más una unidad, es decir, los de la forma $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times p + 1$, son primos. Y que la sucesión formada por las diferencias entre cada dos números consecutivos en la serie 0^2, 1^2, 2^2, 3^2... es la de los números impares, en este caso verdadera, aunque, a diferencia de Eyaralar, cuyo libro contiene estos mismos ejemplos, Paunero no lo aclara. Habría bastado un contraejemplo $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times ... \times 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509$, para demostrar que la primera proposición es falsa, pero Paunero solo pregunta: «¿Podemos asegurar que estos productos darán un número primo para cualquier valor de p?» (p. 74). E igualmente deja sin demostrar la otra propiedad: «¿Podremos asegurar para siempre estas cualidades? En Matemáticas, no» (p. 75). Estos ejemplos, posiblemente, los tomó de la *Metodología* de Eyaralar (pp. 75-76).

[138]Ibídem, p. 76.

[139]Ibídem, p. 77-78.

> la acción de corresponder uno a uno los elementos de dos figuras, y constituye un método importantísimo, no sólo para establecer propiedades y demostrarlas por una *analogía más o menos rigurosa*, sino además para *sistematizar* los conocimientos agrupándolos en un sencillo paralelismo[140].

E insiste en que la correlación entre ángulos planos y diedros, si bien puede establecerse con fines didácticos, no tiene gran rigor lógico; además aclara que las propiedades, lo mismo que las demostraciones, unas veces son idénticas y otras solo análogas. Además Eyaralar reconoce en este método la *función de sistematización*, que justificaría, junto a la sencillez, su uso con fines didácticos.

Por el contrario, Paunero no parece ser siquiera consciente de la falta de rigor matemático de este método que, de hecho, daría lugar a resultados falsos. Eyaralar en cambio, consciente de los diferentes resultados en geometría plana, espacial o esférica, los expone conjuntamente para ayudar a los alumnos a aprenderlos de una manera relacionada, cuando los resultados son paralelos (desigualdad triangular) o cuando son distintos (suma de los ángulos de un triángulo plano, triedro o triángulo esférico).

La *Metodología* de **José María Eyaralar** comienza por conceder al razonamiento matemático la virtud de contribuir a desarrollar hábitos como la precisión y la claridad. Y critica las escuelas primarias del momento por la escasa preocupación, entre otras cosas, por el razonamiento; cita como ejemplo que aspirantes al ingreso en las Normales –antes de la reforma de 1931– demostrasen que dos rectas paralelas a una tercera son paralelas «diciendo que no se encuentran, porque si se encontrasen no serían paralelas»[141].

Entre los hábitos mentales que promueve la Matemática señala no dar por cierta una proposición sin analizarla detenidamente y, en caso necesario, sin demostrarla con rigor, así como «*descubrir* por analogía, generalización o deducción nuevas cuestiones relacionadas con las conocidas»[142]. Observamos aquí la *función de descubrimiento* asociada a la demostración. Una evidencia

[140] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 77. La cursiva es nuestra.
[141] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 3.
[142] Ibídem, p. 47-48. La cursiva es nuestra.

de esta función de la demostración es la propuesta de que los corolarios no se den, sino que sean inventados por los alumnos, como ejemplo de trabajo deductivo[143].

Expone, como es habitual en las obras de metodología de la matemática, los métodos inductivos y deductivos y el papel que desempeñan en la construcción de la matemática; el método de inducción completa, con observaciones y comentarios sobre la insuficiencia de la inducción incompleta y la diferencia entre el establecimiento de verdades en otras ciencias y en matemáticas; el método de reducción al absurdo, que critica con argumentos como los ya comentados; y los métodos analítico y sintético, que asocia respectivamente a la invención y a la exposición de la verdad.

Aunque describe lo que son axiomas, postulados, proposiciones, teoremas, hipótesis y tesis en un teorema, etc., las cuestiones más formales en relación con la demostración, como las diferentes axiomáticas para fundamentar la geometría o las formulaciones equivalentes del postulado de las paralelas, no figuran en el texto principal, sino que están agrupadas en un anexo.

También explica lo que denomina métodos particulares de demostración para la aritmética y para la geometría, en este caso, métodos intuitivos de validación, que estudiaremos en los apartados siguientes.

8.2.2. Enseñanza intuitiva y validación en matemáticas

Si la actividad demostrativa ha ido intrínsecamente ligada a la creación matemática y también a su enseñanza, en el periodo histórico que estudiamos, las ideas de la Escuela Nueva hacen que la preocupación por hacer la enseñanza intuitiva forme parte de todas las propuestas verdaderamente renovadoras.

Una muestra del interés didáctico está en el empleo de técnicas de demostración que se pueden denominar «extramatemáticas»[144], en el sentido de no rigurosas –y no admitidas como tales– desde el punto de vista de la

[143]Ibídem, p. 30.

[144]Cabassut, Richard: «Dans les manuels scolaires la rencontra entre la validation mathématique et les validations non mathématiques: Un example de double dialectique des medias et des milieux». En: *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 751–770. IUFM de l'Academie de Montpellier, 2010.

Matemática. Las propuestas de los diferentes autores están influidas por el espíritu de la época, pero matizadas en función de las ideas pedagógicas de cada uno y, también, de su formación matemática.

Rey Pastor y Puig Adam ponen como ejemplo de demostración deductiva (en la terminología actual se clasificaría como *deductiva informal*[145]) la demostración de la propiedad conmutativa de la multiplicación mediante un *ejemplo genérico*, y justifican la generalidad del procedimiento por ser «aplicable a cualquier otro par de números»[146]:

> En vez de hacer comprobaciones numéricas, que nada demuestran, analicemos la esencia de la multiplicación, escribiendo:
>
> $$4 \times 3 = 4 + 4 + 4$$
>
> y descomponiendo cada sumando en unidades, podremos formar un cuadro de tres filas y cuatro columnas:
>
> $$1 + 1 + 1 + 1+$$
> $$+1 + 1 + 1 + 1+$$
> $$+1 + 1 + 1 + 1.$$
>
> Si ahora contamos estas unidades, agrupándolas por columnas, obtendremos:
>
> $$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4.$$
>
> Ahora bien, «el número que resulta de contar varios objetos cualesquiera es independiente del orden en que se cuentan», según el principio o postulado fundamental de la Aritmética: luego resulta:
>
> $$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

En su obra *Elementos de Aritmética* incluyen una lección, la quinta, dedicada a las demostraciones y las notaciones aritméticas; en dicha lección, además de establecer la diferencia entre teoremas y axiomas, explican lo que es un ejemplo genérico, distinguiéndolo de un simple ejemplo. Aclaran que, aunque en un razonamiento (la demostración de la propiedad asociativa de la suma) hecho de este modo, sobre un ejemplo, se hayan usado unos números determinados, no se han usado para operar con ellos, sino como punto de

[145] Martínez Recio, Ángel: «La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica». En: *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 27–44. Almería, 2002.

[146] Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica...*, op. cit., p. 16.

partida de un «*razonamiento*», tal que se percibe que es aplicable «*a cualquier caso*» y las verdades se obtienen como «consecuencia» de otra verdad anterior, luego de poderse obtener dicha consecuencia en este caso, será cierta para todos. Dan a este método el nombre de *deducción* y lo consideran válido para demostrar los teoremas[147].

Sáiz Salvat, en un artículo publicado en 1925 en la *Revista de Escuelas Normales*, aboga por las demostraciones intuitivas en las clases para la formación de maestros, pero no considera que este tratamiento sea parte de la preparación *didáctica* del maestro ni comenta la posible transposición didáctica de esas demostraciones para la enseñanza primaria: «Atendido este precepto legal [el RD de 1914 determina que se demuestren las proposiciones] y con el fin de que quede el mayor tiempo posible para la didáctica, veamos la modalidad que para nosotros tiene la parte de *matemática pura*»[148]. Y a continuación indica cómo, al modo de los tratados alemanes (a pie de página cita varias colecciones de demostraciones de autores alemanes), la mayor parte de las demostraciones las realiza de manera *intuitiva*, aunque aclara, eso sí, que la finalidad es llegar a enlazar con la demostración algebraica.

En otro artículo posterior vuelve a insistir en ello:

> Sabios cultivadores de la Matemática Superior, sin embargo, afirman que nada contribuye tanto a fortificar los conceptos matemáticos como hacer intuitivas las relaciones fundamentales (Tannery, Rey Pastor). Lo cual no es negar la superioridad de la abstracción sobre la intuición; pero sí afirmar su gradación a posteriori[149].

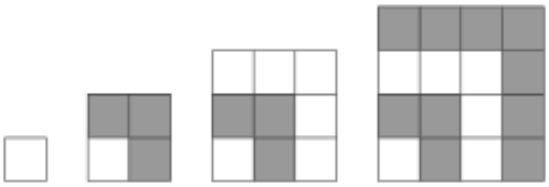
Como ejemplos de demostraciones intuitivas pone la demostración del teorema de Pitágoras con la cuerda de nudos, y la de la suma de los n prime-

[147] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de aritmética*, op. cit., pp. 26-27. En realidad no se trata de un método deductivo formal, matemáticamente hablando, sino de lo que hemos calificado como una técnica deductiva informal. En este tipo de demostraciones se trabaja con números, en lugar de con letras, pero se «conserva la traza de las operaciones», igual que si se hiciera algebraicamente, de ahí su generalidad.

Sessa, Carmen: *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Libros del Zorzal, Buenos Aires (Argentina), 2006, capítulo 2.

[148] Sáiz Salvat, Felipe: «El sentido de la Normal». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **25**, pp. 176–177, p. 176. La cursiva es nuestra.

[149] Sáiz Salvat, Felipe: «La nueva didáctica». *Revista de Escuelas Normales*, 1930, **75**, pp. 228–230. Cita en p. 228.



$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Figura 8.3: Suma de los n primeros números impares

ros números impares con recortes de cartulina. Hemos de decir, no obstante, que se trata de justificaciones de distinto tipo. La primera de ellas permite *comprobar* el teorema en *un* caso concreto (triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades, respectivamente), y se situaría en lo que Balacheff[150] denomina '*empirismo ingenuo*', un tipo de validación que no consigue justificar el teorema. En cambio la otra prueba que incluye como ejemplo, que sería más o menos como la figura 8.3 (p. 558), aunque en realidad es una '*prueba por ostensión*', la representación activa mediante acciones físicas con recortes de cartulina y el hacerla en varios casos (inducción incompleta), prepara para una generalización que no es posible en el caso anterior (de hecho, la forma de ejemplificar el teorema con una cuerda dividida en partes iguales, solo tiene validez cuando los lados del triángulo rectángulos forman una terna pitagórica, es decir, son enteros a, b, c que cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$). En su *Metodología*, incluirá este ejemplo, aunque recurriendo a un dibujo, sin hacer referencia al recortado[151].

El hecho es que Sáiz Salvat ve una y otra forma de validar como intuitivas, sin diferenciar entre ellas. Otros autores, también partidarios de una enseñanza intuitiva, presentan igualmente pruebas pragmáticas, pero solo consideran como prueba las que permitan la generalización; podríamos decir que están mucho más cerca de las '*pruebas intelectuales*', en el sentido de Balacheff.

[150] Balacheff, Nicolas: *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Traducido por Pedro Gómez. Una empresa docente. Universidad de los Andes, Bogotá (Colombia), 2000. `http://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-00520133/document`. Consultado el 10-10-2015.

[151] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., pp. 56-57.

Por ejemplo, **Eyaralar** presenta una demostración tipo puzle del teorema de Pitágoras, válida en el caso de que los triángulos rectángulos sean también isósceles (figura 7.15, p. 495), pero se pueden observar algunas diferencias. En primer lugar, no se trata de un único ejemplo, es una clase incluida en la de los triángulos rectángulos; además él es consciente de esta limitación, que advierte al alumno, y la prueba se propone como parte del proceso de demostración, que ha de continuar hasta la generalización a todos los triángulos rectángulos. Por ello sugiere –igual que para deducir las áreas de los polígonos– una demostración mediante composición y descomposición de figuras que recoge del libro de geometría de Mahler (figura 8.4, p. 559)[152].

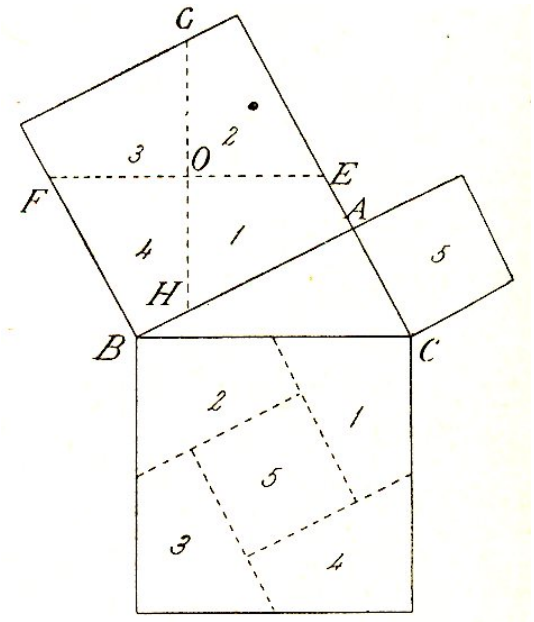


Figura 8.4: Mahler. Demostración del teorema de Pitágoras

Comentando un artículo de Federico Landrove[153] sobre el desarrollo de

[152]Mahler, Gottfried: *Geometría del plano*. Traducido por Federico Alicart. Labor, Barcelona, 1927. Traducción de Mahler, Gottfried: *Ebene Geometrie*. Walter de Gruryter and Co., Leipzig, 1897. `https://archive.org/details/ebenegeometrie00mahl`. Consultado el 10-10-2015, pp. 94-96. La demostración que recoge del teorema de Pitágoras es una debida a Perigal.

[153]Landrove Moiño, Federico: «La enseñanza de la geometría. La comprensión de la forma. La invención y el recortado de figuras». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **19**, pp. 269–271.

la invención en geometría mediante el recortado y ensamblaje de figuras, recomienda

> sustituir en las Nociones de Geometría las demostraciones lógicas por los procedimientos intuitivos, y más aún para completar con éstos las simples reglas que sin demostración alguna suelen darse (olvidándose de que la enseñanza ha de ser racional) colocándonos así en el justo adecuado medio[154].

A continuación, advierte: «claro es que caben grados en la aplicación del método, consistiendo el más sencillo en la simple inspección, el acoplamiento y equivalencia, y el segundo en la demostración de por qué coinciden segmentos y ángulos»[155]. Propone pues *pruebas prágmáticas*, pero recomienda no quedarse ahí y aprovechar estas argumentaciones para pasar de *pruebas ostensivas* a *pruebas intelectuales*.

Igualmente, Margarita Comas propone una prueba no formal del teorema, primero en el caso de que el triángulo rectángulo tenga los catetos iguales y a continuación lo hace para un triángulo rectángulo escaleno en general[156].

También Rey Pastor y Puig Adam, en sus *Elementos de Geometría*, eligen para la educación secundaria una demostración intuitiva de tipo puzle geométrico del teorema de Pitágoras[157], incluso proponen analizar alguna más de este tipo en los ejercicios al final del tema.

Xiberta, en cambio, para este mismo nivel educativo propone una demostración más formal y menos intuitiva, basada en otras dos que determinan la relación entre la altura, la hipotenusa, los catetos y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa ('teorema de la altura' y 'teorema del cateto'), demostradas previamente utilizando la noción de triángulos semejantes; a continuación ofrece otra demostración de tipo gráfico, menos intuitiva que las basadas en la descomposición y composición de cuadrados[158]. A conti-

[154]Eyaralar Almazán, José María: «Enseñanza de la Geometría. El recortado de figuras». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **22**, pp. 52–53, p. 52.

[155]Ibídem, p. 53.

[156]Comas Camps, *Metodología...*, op. cit., pp. 66-68.

[157]Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de Geometría... (1942)*, op. cit., pp. 126-127 y 131.

[158]Xiberta Roqueta, *Elementos de Geometría*, op. cit., pp. 94-95.

nuación proporciona una demostración que llama «demostración gráfica», y que es la de Euclides (Libro I, proposición 47)[159]

Eyaralar reconoce que, si bien las fórmulas para calcular las áreas y los volúmenes de los cuerpos redondos no pueden demostrarse por los procedimientos geométricos elementales, deben obtenerse, no obstante, de manera intuitiva tal que convenza al alumno. Asigna también a la demostración la *función de verificación*, y se muestra partidario de una *prueba prágmática*, mediante el «aparato Arquímedes» (permite trasvasar líquidos o arena de un cono o de una esfera a un cilindro cuya base coincide con la del cono y con el círculo máximo de la esfera y cuya altura coincide con la del cono y con el diámetro de la esfera), diseñado por él mismo (figura 7.12, p. 474), antes que de un *argumento de autoridad*[160]:

> No faltará quien piense que tales cosas son puerilidades y que el niño, como el principesco discípulo, está dispuesto a creer al maestro que el volúmen [sic] del cono es el tercio del cilindro «*par ce que* vous etes [sic] un honnete [sic] homme»[161].

Lo mismo se observa cuando plantea que los alumnos construyan un material para hacer intuitiva la equivalencia entre prismas o pirámides rectos y oblicuos, recurriendo al 'Principio de Cavalieri'[162] (figura 4.1, p. 251). Vemos cómo Eyaralar aboga por la intuición en las pruebas, pero sin que eso suponga eludir u obstaculizar el rigor, antes bien, el material ha de servir para comprender el principio citado, haciendo a los alumnos imaginar los estratos tan delgados como se quiera. Este 'paso al límite', que impide considerar la demostración como una demostración válida desde el punto de vista estricta-

[159] Euclides, *Elementos. Libros I-IV*, op. cit., pp. 260-262.

[160] Cabassut, Richard: *Démonstrations, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et an Allemagne*. Tesis doctoral, Université Paris 7, París, 2005. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009716`. Consultado el 10-10-2015.

[161] Eyaralar Almazán, José María: «El aparato «Arquímedes». Para la obtención de las áreas y los volúmenes de los cuerpos redondos». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **36**, pp. 210–212. Cita en p. 211.

[162] Eyaralar Almazán, José María: «La explicación de los volúmenes». *Revista de Escuelas Normales*, 1928, **53 y 56**, pp. 137–138 y 202–203.

mente matemático[163], la aleja a su vez de una argumentación estrictamente pragmática y la acerca a una demostración de tipo intelectual, en el sentido de Balacheff. Respecto a la relación entre intuición y razonamiento, Rey Pastor y Puig Adam se expresan así:

> Muchas veces se emplea este término [intuitivo] como contrapuesto a racional; es decir, casi como sinónimo de *empírico*. Nada más lejos de nuestro intento. Este libro es razonado, pero los razonamientos se apoyan siempre en imágenes muy concretas; de este modo, sin abdicar de ninguno de los dos fines educativos de la Matemática, procuramos cultivar tanto la intuición como el raciocinio del niño, huyendo lo mismo del *formalismo* abstracto que del *empirismo* mecánico y ramplón[164].

Cuando Eyaralar propone aplicar la fórmula para el volumen del 'prismatoide'[165] a la esfera y a otros cuerpos con caras curvas, declara: «Claro es que la demostración rigurosa de la demostración es difícil, y es preciso aplazarla, por ello no constituye sino un inocentivo [sic] de nuevo saber para los alumnos, y un conocimiento de la limitación de la propia ciencia»[166]. En este caso, el motivo de no demostrar con rigor el volumen de la esfera es la *no disponibilidad de los conocimientos necesarios* por parte de los alumnos, los argumentos formales no se pueden *movilizar*[167].

En otras ocasiones son *razones didácticas* las que llevan a elegir una demostración 'no matemática', incluso cuando los argumentos formales se podrían movilizar. Prevalece, en estos casos, sobre la *función de verificación* la *función de explicación* de la demostración.

Entre las técnicas de demostración intuitivas, no formales, en Aritmética, señala[168]:

[163] Cabassut, *Démostrations,...*, op. cit., pp. 309-321.
[164] Rey Pastor y Puig Adam, *Elementos de aritmética*, op. cit., p. VII.
[165] Sobre el prismatoide, comentarios en p. 251.
[166] Eyaralar Almazán, *La explicación de los volúmenes*, op. cit., p. 263.
[167] Cabassut, Richard: «The double transposition in proving». En: *Proceedings of CERME 6*, INRP, Lyon (France), 2010. `www.inrp.fr/editions/cerme6`. Consultado el 10-10-2015.
[168] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 80-84.

- El método *objetivo*, consistente en representar los números mediante objetos y operar con ellos. Pone varios ejemplos relativos a la comprensión del sistema de numeración y las operaciones con los diferentes órdenes de unidades, la propiedad conmutativa del producto o probar que la suma de los n primeros números impares es n^2.

Advierte que estas pruebas pueden hacerse con dibujos (como el último ejemplo citado), pero conviene hacerlas de manera activa. Observamos aquí la influencia del *principio de actividad* que caracteriza el movimiento de renovación pedagógica ligado a la Escuela Nueva y que había madurado en el periodo republicano.

En la *Aritmética Intuitiva*, dirigida a alumnos de bachillerato, Rey Pastor y Puig Adam utilizan esta técnica para demostrar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, entre otras.

- Método *gráfico*, mediante la representación gráfica de los números. Como ejemplos Eyaralar pone la propiedad conmutativa de la multiplicación –que comentaremos en el siguiente apartado– o la distributiva.

- Método *nomográfico*, representando las relaciones mediante la gráfica de una función.

- Método *geométrico*, cuando los números se representan de manera continua, lo que permite representar relaciones de proporcionalidad, etc.

Precisamente remite para los ejemplos a los dos libros de aritmética que había publicado.

Las técnicas que cita como más frecuentes en la enseñanza primaria para probar relaciones y propiedades geométricas son[169]:

- La *superposición*, que exige que se haga de manera pragmática, con figuras recortadas o con el «Cinematógrafo Geométrico». Recomienda pasar de las pruebas perceptivas a la explicación del porqué de las coincidencias.

[169]Ibídem, pp. 92-94.

- La *composición* y *descomposición*, que describe como una síntesis y análisis intuitivos. Por ejemplo, para determinar las fórmulas de las áreas de las figuras plana.

- La *simetría*, muy útil cuando se trata de demostrar propiedades de figuras con elementos de simetría.

- Los *límites*. Pone como ejemplos de demostraciones intuitivas en las que se hace un 'paso al límite': el cálculo de la longitud de la circunferencia y el área del círculo o los volúmenes del cilindro y del cono.

Estas mismas técnicas son las que hallamos aplicadas –en general menos sistematizadas– en los ejemplos que contienen los libros de **Margarita Comas** y los otros profesores renovadores que estudiamos.

No obstante, si bien la mayoría de los autores reconocen las ventajas didácticas de las demostraciones intuitivas en los primeros aprendizajes, advierten de la necesidad de una exposición organizada lógicamente, cuando el nivel de los alumnos hace aumentar la necesidad de rigor.

Rey Pastor y Puig Adam señalan que hay métodos de demostración en geometría, el 'experimental' y el 'intuitivo', que no permiten establecer las verdades con el mismo grado de certeza que el método racional. Ponen un ejemplo de demostración 'no matemática', esta vez *pragmática* (por construcción) y *visual*[170], basada en cómo se percibe la figura. Es un ejemplo que plantean igualmente Eyaralar[171] (figura 8.5, p. 565) y Sáiz Salvat[172]. Se trata de descomponer un cuadrado en varias piezas y formar con ellas un rectángulo de área algo mayor que aquél.

> *Demostrar intuitivamente que* $64 = 65$.
>
> Tomemos un cuadrado [...] de 8 unidades de lado, con lo cual obtenemos la representación gráfica de $8^2 = 64$, comprobándose que efectivamente está constituido por 64 cuadraditos; trácense las líneas que muestra la figura, recórtese por ellas y ensamblando convenientemente los trozos, resulta [...] un rectángulo que tiene de lado 13 y 5 divisiones, y por tanto $13 \times 5 = 65$ cuadraditos. La aparición del cuadradito

[170] Cabassut, *Démostrations,...*, op. cit.
[171] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 50-51.
[172] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., pp. 125-126.

misterioso es debido a la deficiente ensambladura de los trozos, difícil de percibir, y que puede ser atribuida a errores de construcción[173].

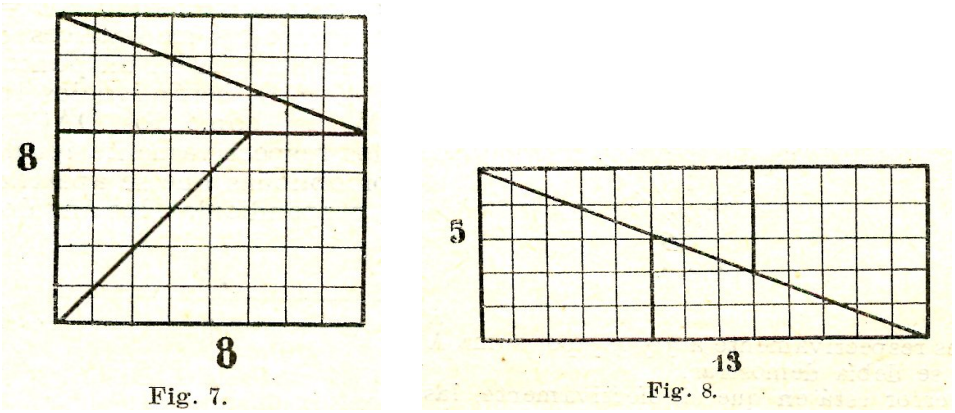


Figura 8.5: Eyaralar. 64 = 65

Es más, ponen verdadero interés en dejar claro que un argumento visual no es un método de demostración que permita establecer las verdades con carácter de *necesidad*, y no podría hacerlo incluso si experimentalmente no pudiese comprobarse la falsedad de un teorema o resultado[174]. Del mismo modo previenen contra la creencia en la suficiencia de la *intuición* como experiencia imaginativa y plantean la necesidad de una discusión de las demostraciones –y de los problemas– mientras las demostraciones se realicen en el marco de la geometría clásica, habitualmente con figuras, algo que no sería necesario con los métodos algebraicos de la geometría analítica.

Dedican bastantes páginas a describir los posibles 'paralogismos' o falsas demostraciones, en un intento de advertir sobre la necesidad de rigor en las demostraciones matemáticas; pero, por otro lado, podemos decir que son conscientes de que el rigor es *relativo a una época y a una institución*[175]. En

[173]Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica...*, op. cit., pp. 20-22. Este ejemplo sigue siendo frecuente hoy día, sobre todo en textos de matemática recreativa.

[174]Ponen el ejemplo de dividir un cuadrado de lado 233 unidades de forma análoga a la anterior, en dos rectángulos de alturas 89 y 144, respectivamente. En este caso, los bordes de la diagonal montan uno sobre otro, lo que es imperceptible incluso con un microscopio corriente.

[175]Cabassut, *Démostrations,...*, op. cit.

efecto, hacen algunos comentarios de tipo histórico para poner de manifiesto cómo la idea de rigor en la Matemática ha ido cambiado. Pero no solo se trata de consideraciones matemáticas; citan a Hermite cuando dicen que una matemática rigurosa no puede atraer a principiantes que no entienden su interés. Además. hay que tener en cuenta la *institución*, en este caso el nivel de enseñanza, a la hora de decidir qué demostraciones se consideran pertinentes; si en la niñez (lo que correspondería a la enseñanza primaria) creen que han de estar basadas en la intuición y la experiencia, opinan que éstas no son suficientes para los espíritus razonadores.

Concretamente, insisten en las deficiencias o puntos débiles en las demostraciones no formales cuando, a propósito de la demostración citada anteriormente del teorema de Pitágoras, se dice:

> No basta, pues, ver, es preciso *razonar* [...] también es preciso acudir al razonamiento para probar aquí la exactitud de la descomposición [...] Las demostraciones no serán rigurosas ni, por tanto, admisibles sino a condición de no apoyarse en las relaciones geométricas que aparecen en la figura sin haber demostrado previamente que tales relaciones deben presentarse en cualquier otro caso como consecuencia obligada de las hipótesis[176].

Una opinión parecida es la expresada por **Paunero**, a propósito de las demostraciones realizadas a partir de una figura concreta en geometría. Pues reconociendo que la demostración tiene una construcción manual, la reflexión sobre las figuras y la generalización de los resultados requieren comprobaciones de carácter mental.

Para **Sáiz Salvat** la formación matemática de una persona está relacionada con su nivel de razonamiento:

> El modo de razonar de una persona declara su abolengo científico. El carbonero es una persona muy respetable; pero su modo de razonar es intuitivo, de sentido común; sin embargo el razonamiento del que estudia debe distinguirse por ser coordinativo, esto es, enlazando las premisas de una conclusión con las conclusiones anteriormente obtenidas[177].

[176] Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica...*, op. cit., pp. 117-118.
[177] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., pp. 75.

Por ello, recomienda que en la escuela primaria, a la que confiere un carácter fundamentalmente educativo, se hagan «ejercicios comprobatorios» para desarrollar el razonamiento, primero de manera experimental, haciendo las pruebas de las operaciones o, en geometría, con plegado, recortado, etc., y en el tercer grado salpicando demostraciones lógicas.

Incluso aconseja proponer a estos alumnos sofismas como la paradoja de Aquiles y la tortuga, u otros basados en pruebas visuales. Insiste que en matemáticas no ha de admitirse algo con certeza sin que se haya *comprobado*, y esa prueba, que en el caso de un problema suele ser una 'comprobación' de los resultados, en el caso de un teorema es una 'demostración'.

Además, ve en la demostración de las verdades matemáticas una función de sistematización: «Esta relación de las verdades, establecida mediante jerarquías, hace posible la organización de la ciencia»[178]. Y por eso decide de intercalar algunas demostraciones abstractas para mostrar con ello a sus alumnos el método que siguen las ciencias formales.

Igualmente, Paunero recomienda poner ejemplos en los que se advierta que es preciso comprobar primero y demostrar después las fórmulas que se usan en geometría, aunque aconseja estar atento a cuándo los alumnos sienten la necesidad de definiciones y demostraciones más abstractas y lógicas[179].

Eyaralar dice al respecto que la comprobación de todas las operaciones, además de dar seguridad y confianza, deja ver las relaciones entre las operaciones y en ocasiones puede sustituir a la demostración[180]. De hecho, opina que el tipo de prueba, en cuanto al rigor, ha de ser diferente para cada edad o *institución*. Precisamente porque es consciente de la dificultad de los alumnos ante el progresivo abandono de los métodos puramente intuitivos, y de la dificultad para entender la necesidad de otro tipo de prueba, sugiere utilizar demostraciones intuitivas que dan lugar a resultados falsos, como el ejemplo anterior (p. 564), y algunos de tipo aritmético, para hacer sentir al alumno la necesidad de pruebas más intelectuales.

[178]Ibídem, pp. 75.
[179]Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., cap. IV.
[180]Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 16.

8.2.3. El tratamiento de la demostración en los textos de matemáticas para la formación de maestros: José María Eyaralar

En este apartado vamos a contrastar las propuestas sobre la validación de propiedades aritméticas en los dos libros de aritmética del mismo autor, José María Eyaralar, escritas en dos momentos diferentes, y las relacionaremos con los cambios institucionales que ocurrieron durante su vida profesional, concretamente la cada vez mayor influencia del movimiento de la Escuela Nueva, con nuevos planteamientos y prácticas educativas. Diversos autores[181] han señalado la utilidad del marco conceptual y las herramientas de la TAD con la finalidad de analizar libros, que podemos considerar de texto, en nuestro caso, para la formación matemática en las Escuelas Normales.

Las obras que consideramos son el *Nuevo Tratado de Aritmética*, escrita en 1922, al comienzo de su vida profesional, y su *Aritmética Intuitiva*, de 1932; esta última constituye una reelaboración de la anterior, recogiendo su experiencia como profesor en esos años y las nuevas ideas que se estaban incorporando a la enseñanza de la matemática. Seguiremos refiriéndonos a la *Metodología de la Matemática*, publicada en 1933, de características diferentes a los dos manuales anteriores, para que nos sirva de contraste en nuestro análisis.

Desde una perspectiva *ecológica*, planteamos la comparación de estas obras de un mismo autor en distintas épocas, porque los cambios observados pueden ser debidos a la evolución del pensamiento de su autor en el periodo intermedio y en ello influye su práctica profesional. Pero también hay que tener en cuenta el cambio que se produjo en la formación de maestros con la

[181] Assude, Teresa: «De l'écologie et de l'économie d'un système didactique: une étude de cas». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1996, **16(1)**, pp. 47–72.

Carrillo Gallego, Dolores: «La codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas. Pestalozzi y la enseñanza mutua». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2004, **24(1)**, pp. 11–44.

Chachaoua, Hamid y Comiti, Claude: «L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique». En: A. Bronner y al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 771–789. IUFM de l'Academie de Montpellier, Montpellier, 2010.

proclamación de la II República en España y los intentos de institucionalizar los presupuestos de la Escuela Nueva y las experiencias relacionadas que se habían llevado a cabo en España en los decenios anteriores.

Un interesante y útil análisis de la validación en distintos contextos, realizada a partir de manuales, puede encontrarse en Cabassut; este autor identifica e ilustra los siguientes tipos de *tareas* relacionadas con la validación:

> découvrir (conjeturer ou reconnaître), contrôler (reconnaître les status, les formes de raisonnement, l'application des énoncés conditonnels), charger de registre (tracer, encoder, décoder), démontrer (avec ses variations calculer, construire, étudier)[182].

Nos centramos en dos ejemplos de las obras aritméticas de Eyaralar que nos parecen suficientemente representativos[183]:

- **Ejemplo 1**: Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

En la figura 8.6 (p. 570) hemos recogido el tratamiento que se da a esta cuestión en el *Nuevo Tratado de Aritmética*[184].

El tratamiento en la *Aritmética Intuitiva* se encuentra en la figura 8.7 (p. 571)[185].

Comparamos ambos textos. La cuestión que se plantea en ambos textos es *formular y validar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma*, así como presentar algunas consecuencias y aplicaciones de la

[182] «Descubrir (conjeturar o reconocer), verificar (reconocer los estatus, las formas de razonamientos, la aplicación de enunciados condicionales), cambiar de registro (dibujar, codificar, decodificar), demostrar (con sus variaciones calcular, construir, estudiar)» Cabassut, *Dans les manuels...*, op. cit., pp. 752-753. La traducción es nuestra.

[183] Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «La validación en la formación de maestros». En: M. Bosch y al. (Eds.), *Un panorama de la TAD*, tomo 10, pp. 283–298. Centre de Recerca Matemática, Bellaterra (Barcelona), 2011.

[184] Eyaralar Almazán, José María: *Nuevo Tratado de Aritmética*. Reus, Madrid, 1922, pp. 67-68.

[185] Eyaralar Almazán, José María: *Aritmética Intuitiva*. Reus, Madrid, 1932, pp. 65-66. Hay una errata en el texto original. Donde dice $(5+3)\times 4 = 5\cdot 8+3\cdot 4$, debe decir $(5+3)\times 4 = 5\cdot 4+3\cdot 4$.

64. MULTIPLICACIÓN DE UNA SUMA INDICADA POR UN NÚMERO.—Ejemplo: *Calcular los ingresos de una familia obrera, en seis días, sabiendo que el jornal diario es el siguiente: El padre, 8 pesetas; hijo mayor, 5 pesetas; hijo menor, 3 ptas; hija, 4 ptas.* Puede decirse. Cada día ganan $8 + 5 + 3 + 4 = 20$, y en los seis días $(8 + 5 + 3 + 4) \times 6 = 20 \times 6 = 120$ pesetas, o bien: el padre en 6 días, 8×6, el hijo mayor 5×6, el hijo menor 3×6, la hija 4×6 y en total $8 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 48 + 30 + 18 + 24 = 120$, tendremos, pues, $(8 + 5 + 3 + 4)\,6 = 8 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6$, es decir, que *para multiplicar una suma indicada por un número, basta multiplicar cada sumando por dicho número y sumar los productos parciales.*

Puede demostrarse fundándose en la definición de multiplicación y en las propiedades de la suma. Así, en general

$$(a + b + c)n = (a + b + c) + (a + b + c) + \ldots {}^{(n \text{ veces})} = a + a + a + \ldots {}^{(n)} + b + b + \ldots {}^{(n)} + c + c + c + \ldots {}^{(n)} = a \cdot n + b \cdot n + c \cdot n\ (*).$$

Y resumiendo

$$\boxed{(a + b + c)\, n = a \cdot n + b \cdot n + c \cdot n}$$

Observaciones.—1.ª Teniendo en cuenta [**62**] se verificará $n(a + b + c) = n \cdot a + n \cdot b + n \cdot c$, que puede enunciarse en regla práctica.

2.ª Considerando la igualdad anterior en sentido contrario, tendremos $(a \cdot n + b \cdot n + c \cdot n) = (a + b + c)n$, es decir, que *cuando en todos los sumandos de una suma aparezca un factor común, puede suprimirse, efectuar la suma y multiplicar el resultado por dicho factor.* Esta operación se llama *sacar factor común.* Ejemplo: En el caso [**64**] sería $8 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = (8 + 5 + 3 + 4)\,6 = 20 \times 6 = 120$.

La operación de sacar factor común facilita, como se ve, extraordinariamente los cálculos, pero si el factor no está de manifiesto, es preciso recurrir, para encontrarlo, a la teoría de la divisibilidad, y para sacarlo, a la división.

Figura 8.6: Eyaralar. Propiedad distributiva (*Nuevo Tratado de Aritmética*)

propiedad. Esta cuestión se concreta en secuencias de tareas diferentes en ambas obras.

En el *Nuevo Tratado de Aritmética* la primera tarea que se plantea es *formular (conjeturar)* la propiedad distributiva en términos de *regla de cálculo* equivalente. La técnica empleada es la resolución de un problema 'real', contextualizado. El problema se resuelve de dos maneras, razonando a partir de las magnitudes y las operaciones con magnitudes implicadas. La equivalencia de las dos técnicas de resolución empleadas constituye un ejemplo de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, a partir del cual se formula la regla correspondiente.

La siguiente tarea propuesta la constituye la generalización de la propiedad, que se expresa ahora de forma literal (*cambio de registro*) y la *demostración* de la misma; se trata de una justificación de tipo matemático. Por último se plantean varias tareas de *aplicación.*

En *Aritmética Intuitiva* el desarrollo es diferente. La primera tarea planteada es la misma; la técnica empleada es el cálculo de una expresión arit-

50. Propiedad distributiva. Problema.—*Efectuar* $(5 + 3) \times 4$ *sin obtener el valor del paréntesis.*

Si representamos gráficamente el producto que buscamos, obtendremos (fig. 12) el rectángulo

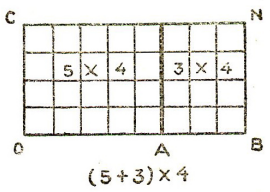


Fig. 12

OBNC, y si por el extremo del segmento de valor 5 trazamos una perpendicular, tendremos el producto descompuesto como indica la figura, y podremos escribir $(5 + 3) \times 4 = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4$, o sea $20 + 12 = 32$; esto es, que *para multiplicar una suma por un número basta multiplicar cada sumando por el número y sumar los productos parciales.*

Demostración analítica. Por la definición de multiplicación

$$(5 + 3) \times 4 = (5 + 3) + (5 + 3) + (5 + 3) + (5 + 3)$$

y suprimiendo los paréntesis (25), y agrupando los sumandos iguales resulta

$$(5 + 3) \times 4 = (5 + 5 + 5 + 5) + (3 + 3 + 3 + 3)$$

y volviendo a tener en cuenta la definición de multiplicación

$$(5 + 3) \times 4 = 5 \cdot 8 + 3 \cdot 4$$

En general,

$$\boxed{(a + b)\, n = a \cdot n + b \cdot n}$$

Observación.—En virtud de la propiedad conmutativa será $n\ (a + b) = n \cdot a + n \cdot b$, que puede enunciarse en regla práctica.

Figura 8.7: Eyaralar. Propiedad distributiva (*Aritmética Intuitiva*)

mética «sin obtener el valor del paréntesis», resuelto mediante una técnica gráfica que requiere un *cambio de registro*. Además, la representación gráfica no sólo cumple la función de ayudar a justificar la propiedad, sino que permite *descubrirla* y de hecho no hay paso intermedio entre la comprobación gráfica y la formulación general de la propiedad. La justificación de la técnica se basa en argumentos visuales y pragmáticos.

A continuación aparece una nueva tarea, la «demostración analítica» de la propiedad enunciada. La técnica de demostración es de estructura similar a la que figura en el *Nuevo Tratado de Aritmética*, pero se trata de una comprobación efectuada con números concretos. La técnica se justifica, pues, por argumentos inductivos, no se valida de forma general sino que se opera sobre un único ejemplo, aunque, como en el *Nuevo Tratado de Aritmética*, el

cálculo se realice a partir de la definición y de las propiedades previamente estudiadas. Este ejemplo único, que se presenta como modélico, recoge las características de la técnica de la demostración, basada en la definición de multiplicación y en las propiedades de la suma.

En *Aritmética Intuitiva* se sirve de la representación gráfica para construir un modelo, una representación geométrica, de una propiedad aritmética. Podemos decir que si en *Nuevo Tratado de Aritmética* la demostración cumple sobre todo la función de 'convencer', el objetivo principal de la justificación gráfica, intuitiva, es 'comprender'.

Por otra parte, también hay que señalar que en el primer libro se recogen unas aplicaciones de la propiedad distributiva referidas a la simplificación de la multiplicación por 9[186] y por 11; estas consideraciones están situadas a pie de página, mientras que en el segundo libro, que también aplica la propiedad estudiada a la multiplicación por 9 y por 11, aparecen incluidas en el texto. Esta preocupación por las aplicaciones bien podría indicar la importancia que se concede a mostrar a los alumnos la 'razón de ser' de la propiedad matemática estudiada, aunque también es verdad que el interés puede ser proporcionarles una interesante colección de casos en los que tiene sentido aplicarla para 'comprobar' que efectivamente se cumple. Probablemente ambas cosas.

- **Ejemplo 2:** División de un producto por un número

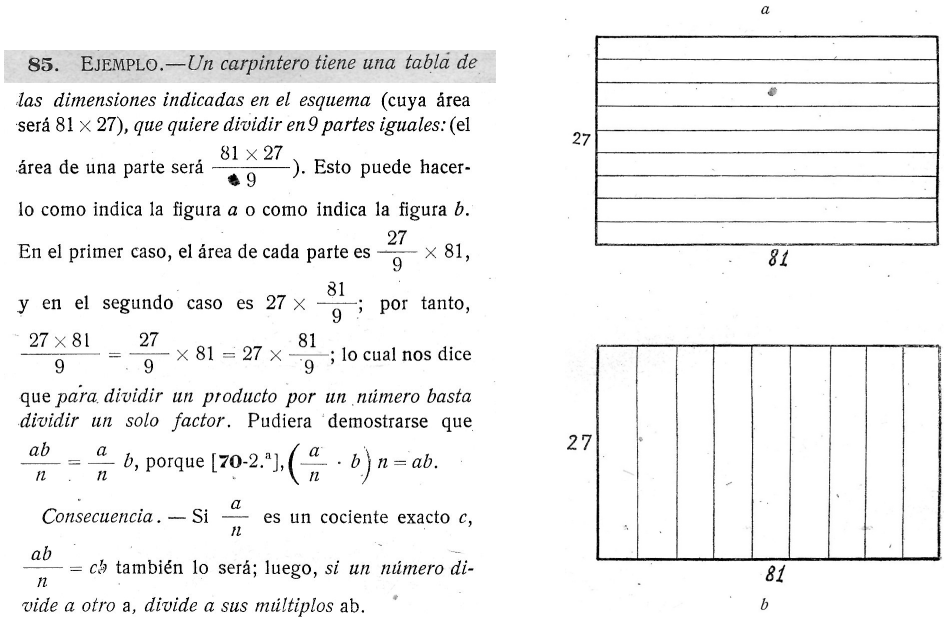
En el siguiente ejemplo se trata también de *formular y validar* una propiedad aritmética: la división de un producto por un número y *aplicarla* para obtener nuevas propiedades. Veamos la forma de tratar esta cuestión en ambas obras.

En la figura 8.8 (p. 573) se recoge el apartado sobre esta cuestión en el *Nuevo Tratado de Aritmética*[187], y en la figura 8.9 (p. 574) el correspondiente en la *Aritmética Intuitiva*[188].

[186] Tras demostrar que $n(a-b) = na - nb$.

[187] Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., pp. 94-96. Sáiz Salvat también hace una prueba de este tipo en el artículo citado de 1930 (reproducida en su libro en 1931), que él mismo reconoce que no es inventada.

[188] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 94. Hay una errata en el texto original. En el enunciado del problema, se lee «(8 · 12) x 4», en lugar de «(8 · 12) : 4».



85. EJEMPLO.—*Un carpintero tiene una tabla de las dimensiones indicadas en el esquema* (cuya área será 81×27), *que quiere dividir en 9 partes iguales:* (el área de una parte será $\frac{81 \times 27}{9}$). Esto puede hacerlo como indica la figura *a* o como indica la figura *b*. En el primer caso, el área de cada parte es $\frac{27}{9} \times 81$, y en el segundo caso es $27 \times \frac{81}{9}$; por tanto, $\frac{27 \times 81}{9} = \frac{27}{9} \times 81 = 27 \times \frac{81}{9}$; lo cual nos dice que *para dividir un producto por un número basta dividir un solo factor*. Pudiera demostrarse que $\frac{ab}{n} = \frac{a}{n}\, b$, porque [**70**-2.ª], $\left(\frac{a}{n} \cdot b\right) n = ab$.

Consecuencia. — Si $\frac{a}{n}$ es un cociente exacto *c*, $\frac{ab}{n} = cb$ también lo será; luego, *si un número divide a otro* a, *divide a sus múltiplos* ab.

Figura 8.8: Eyaralar. División de un producto por un número (*Nuevo Tratado de Aritmética*)

Al comparar ambos textos se observa que nuevamente, ante una misma cuestión plantea tareas diferentes en cada manual.

En el *Nuevo Tratado de Aritmética* vuelve a utilizar como técnica la resolución de un problema contextualizado, que resuelve mediante cálculos usando representaciones gráficas como justificación, antes de la formulación general y la demostración matemática. Nuevamente, la representación gráfica proporciona un modelo para el cálculo y una imagen mental de la propiedad.

En *Aritmética Intuitiva* la técnica consiste en la resolución de un ejercicio numérico (no contextualizado), aplicando propiedades, previamente estudiadas, de la multiplicación y la división. Son propiedades que pueden ser usadas para demostrar la propiedad con generalidad, pero de nuevo se usa una justificación inductiva a partir de un solo ejemplo para enunciar la regla general. Otro tipo de justificación que utiliza explícitamente es la *analogía* (en este caso con la regla, ya vista, para multiplicar un producto por otro número); y en ese contexto utiliza una representación gráfica, similar a la del *Nuevo Tratado de Aritmética*, para señalar los límites del razonamiento analógico y como imagen mental de la propiedad.

73. Problema. — *Obtener* $(8 \cdot 12) \times 4$ *sin efectuar el producto indicado.*

Por analogía con lo hecho en [57] diremos

$$\frac{8 \cdot 12}{4} = \frac{8}{4} \times 12 = 2 \cdot 12 = 24,$$

puesto que

$$(2 \times 12) \times 4 = (2 \times 4) \times 12 = 8 \cdot 12,$$

que es el dividendo.

En general,

$$\boxed{(ab) : n = (a : n)\, b}$$

Regla: *Para dividir un producto indicado por un número basta dividir uno de sus factores.*

Observación.—La analogía conduciría como en el caso anterior a sugerir que deben dividirse cada uno de los factores; para acabar de apartar al lector de tal idea basta que considere los esquemas adjuntos:

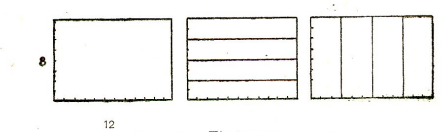


Fig. 17

El primero representa el producto 8 . 12, que en los otros dos está dividido por 4. En el central dicha cuarta parte es $(8 : 4) \times 12 = 2 \cdot 12$; en el último es $8 \times (12 : 4) = 8 \cdot 3 = 24$.

Figura 8.9: Eyaralar. División de un producto por un número (*Aritmética Intuitiva*)

Recapitulemos sobre el empleo en cada libro de la representación gráfica. En ambas obras cumple la doble función de servir, por una parte, como técnica para resolver la situación (carácter *instrumental*) y por otra, como medio de comprender o 'verificar' la propiedad (carácter de *representación*)[189]. Pero mientras que en el Ejemplo 1 la representación gráfica aparecía en la *Aritmética Intuitiva* antes del enunciado general del teorema y estaba en el lugar de la demostración, sustituyéndola, ahora aparece con una función explícita de evitar el uso abusivo de la analogía.

En la *Metodología de la Matemática*, Eyaralar trata explícitamente sobre la validación de los conocimientos matemáticos. En particular destaca la importancia de la analogía, ligada a la función de '*descubrimiento*' de propiedades; califica la *analogía* como uno de los «métodos generales puramente lógicos» que emplea la matemática, además de sus métodos especiales: «aunque rigurosamente no es un método lógico, pues sus resultados necesitan demostración, es utilísimo como guía del pensamiento en el descubrimiento de propiedades, y la Matemática acude a él con frecuencia»[190].

[189] Esta doble función la hemos estudiado en Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «Enseñanza intuitiva y representaciones gráficas en Eyaralar». En: Víctor Juan (Ed.), *Museos Pedagógicos. La memoria recuperada*, pp. 175–183. Museo Pedagógico de Aragón, Huesca, 2008.

[190] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 29.

Pero a la vez advierte de los riesgos de un uso abusivo:

> Como en espíritus poco formados lógicamente tiene más fuerza la analogía que el razonamiento, conviene en estos casos mostrar intuitivamente y por medio de ejemplos numéricos repetidos cuál es la verdadera regla, y el error cometido aplicando la simple analogía[191].

y remite a la *Aritmética Intuitiva*, precisamente a este mismo ejemplo.

8.2.3.1. Las técnicas de demostración en aritmética

La importancia que concede Eyaralar a la demostración en la formación de maestros, se refleja en el uso que hace de la misma en sus dos aritméticas (en las que se usa la demostración como objeto paramatemático) y también, de forma más explícita, en el contenido de su *Metodología de las Matemáticas*, en la que dedica varios apartados a esta cuestión. Contrastaremos, pues, los usos que hemos encontrado en las aritméticas con sus propuestas en esa obra.

Se encuentran diversas referencias a la importancia que concede a una enseñanza razonada de las matemáticas. Así, cuando además de los fines utilitario y educativo, comunes a todas las disciplinas, habla de los 'fines especiales' de la enseñanza de la matemática, incluye «3.º La formación de ciertos *hábitos mentales* entre los cuales citaremos la precisión y claridad, que puede referirse *a los conceptos, al razonamiento y a la expresión*»[192].

Constata, sin embargo, la enseñanza rutinaria y la falta de razonamiento en las escuelas:

> La dificultad de los niños para el razonamiento abstracto, su docilidad mental y su facilidad para los mecanismos, tienden a que la enseñanza se haga en las Escuelas puramente rutinaria, sin intervención de la razón, sin demostración de ninguna clase. Esto, desde el punto de vista educativo, es una aberración, contra la que hay que ponerse en guardia[193].

[191] Ibídem, p. 29.
[192] Ibídem, p. 3.
[193] Ibídem, p. 40.

El interés por los procedimientos que desarrollan el razonamiento de los niños, lo lleva a interrogarse por las condiciones de ese proceso; y señala que la dificultad, en muchas ocasiones, proviene de la falta de disponibilidad para los alumnos de conocimientos y de técnicas matemáticas:

> Hay reglas y propiedades que no pueden ser demostradas racionalmente en la Escuela. Unas veces por su propia dificultad [...], y otras porque exijan conocimientos previos [. . .] en tales casos basta la comprobación intuitiva, pero advirtiendo siempre al alumno del escaso valor de tal procedimiento[194].

Su defensa de un estudio razonado de las matemáticas, tiene en cuenta las posibilidades de los alumnos, pues

> este rigor lógico sólo puede alcanzarse en una etapa elevada de los estudios, sustituyéndose en un principio por las demostraciones intuitivas y aun las simples comprobaciones, pero alcanzando en cada momento todo el rigor lógico de que es susceptible la inteligencia del alumno, cuidando mucho de no sobrepasarlo[195].

Y señala la siguiente graduación: «El niño pequeño se conforma con una simple *comprobación* [...]. Más tarde viene la demostración *intuitiva* [...]. Pero cabe también una graduación aún más fina dentro de cada grupo para aquellas propiedades difíciles de percibir»[196].

En el caso de la aritmética, defiende los procedimientos de validación que hemos visto en sus obras, pues «el método que consiste en obtener por sí mismo las reglas y las propiedades hace que se razonen, no con el razonamiento explícito, difícil al niño y desagradable, sino con un razonamiento práctico e implícito que es diferente»[197].

Considera importante que los futuros maestros sean conscientes de los riesgos o los límites de cada tipo de demostración. Así, a propósito de las

[194]Ibídem, pp. 191-192.
[195]Ibídem, p. 33.
[196]Ibídem, pp. 180-181.
[197]Ibídem, p. 191.

demostraciones intuitivas, dice: «Muy útiles en los primeros años de la enseñanza, deben proscribirse en cuanto la mente del niño alcanza la madurez lógica suficiente»[198].

Eyaralar concede gran importancia a la cuestión de la justificación de los conocimientos matemáticos y en sus obras presenta unas matemáticas lógicamente organizadas. Pero hemos constatado que su forma de validar el conocimiento matemático varía en las obras consultadas ¿Por qué se da esa diferencia? ¿Cuáles han sido los condicionantes de ese cambio? En estos ejemplos se han podido apreciar algunas de esas diferencias.

Tanto en las demostraciones como incluso cuando se trata de comprobaciones mediante un ejemplo, en *Aritmética Intuitiva* recurre con mucha más frecuencia que en el *Nuevo Tratado de Aritmética* a las representaciones o demostraciones gráficas o *argumentos visuales*. Esta característica podemos relacionarla con la mayor importancia que, en esos momentos, se confiere a una enseñanza denominada *intuitiva*. Pero la diferencia no se limita al número. En la *Aritmética Intuitiva* no sólo hay mayor presencia de representaciones gráficas en la justificación de propiedades y teoremas, sino que tienen otra función. En *Nuevo Tratado de Aritmética* están *acompañando* a las demostraciones matemáticas, con una *función de explicación*, frecuentemente para dar sentido a éstas; mientras que en la *Aritmética Intuitiva ocupan el lugar* de la demostración, con la pretensión de hacerla más *intuitiva*. En este segundo libro es mucho más frecuente que represente gráficamente las propiedades y las justificaciones y no sólo las exprese simbólicamente; se pueden presentar, no sólo con la función de explicar, sino también de *descubrir* y, de esa manera, *justificar*.

Eyaralar utiliza y justifica técnicas inductivas –comprobar ejemplos– aunque lo hace de forma diferente en ambas obras. En el *Nuevo Tratado de Aritmética* suele introducir las cuestiones a través de problemas contextualizados y, desde ahí, generaliza formulando la propiedad en cuestión y la comprueba de forma analítica, aunque se ayude de algún dibujo. En la *Aritmética Intuitiva* parte, en muchas ocasiones, de ejercicios descontextualizados, con datos más sencillos, usando la representación gráfica como explicación y justificación, sin llegar a formular la propiedad con toda generalidad. En la

[198]Ibídem, p. 50.

Metodología de la Matemática, de esta misma época, Eyaralar habla de la *invención* y la relaciona con estas técnicas inductivas; también utiliza lo que llama la 'memoria visual' y pone ejemplos de las propias *Aritméticas*, en los que el dibujo ayuda a retener la imagen de la demostración.

Aunque en la *Aritmética Intuitiva* aumenta el uso de técnicas *no matemáticas*, Eyaralar es consciente de los riesgos y límites de dichas técnicas y tecnologías. Los comentarios que incluye en su *Metodología de las Matemáticas* marcan la frontera entre un tipo de razonamiento y otro y da diversas razones para su utilización, comentadas en la página 562: adecuación a las características e intereses de los estudiantes o bien *no disponibilidad* de otros conocimientos o tipos de argumentos.

8.3. El tratamiento de la resolución de problemas

Los libros de *Metodología de la Matemática* suelen incluir capítulos o apartados dedicados a la resolución de problemas. Por ello comentamos cómo abordan esta cuestión Charentón, Sáiz Salvat, Xiberta, Paunero y Eyaralar. Nos interesan las ideas que tienen estos autores sobre el papel de los problemas en la enseñanza, los métodos que proponen para su resolución, las observaciones que hacen acerca de las cuestiones que tratan y de los enunciados, los tipos de problemas que distinguen, etc., así como los comentarios sobre ciertas clases especiales de problemas. En particular, nos detendremos en las propuestas de Aurelio R. Charentón y de José María Eyaralar.

El primero destina su *Metodología* a los problemas y el último, además de la *Metodología*, escribió una obra dedicada a los problemas, *Didáctica de los Problemas de Aritmética y Geometría*; en ella presta a los problemas geométricos –a los que consigna la mitad del libro– tanta atención al menos como a los aritméticos, a diferencia de lo que suele ocurrir en otras obras de carácter didáctico.

Un referente para conocer las influencias que puede haber tenido una obra, suele ser la bibliografía que figura en ella. Charentón no incluyó las fuentes bibliográficas que puedo haber utilizado; no obstante, sabemos que conocía

–y de hecho tradujo al español en esa época– la obra de Detaille, profesor en una Escuela Normal de Maestros en Bélgica, *La Metodología en acción*[199]. Usamos este libro y lo comparamos con la *Metodología de los Problemas*[200] para estudiar la influencia de Detaille en la obra de Charentón.

8.3.1. Los problemas en matemáticas

Para realizar el análisis de algunos aspectos relativos a los problemas, hay que tener en cuenta cómo concibe cada uno de los profesores que estudiamos la matemática y su enseñanza. Además, la consideración que un autor da a los problemas, nos proporciona una visión bastante fiable de sus ideas respecto a los objetivos de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria, y sobre el papel de ésta.

Así, **Manuel Xiberta** en su libro sobre metodología de la matemática[201], la mayor parte del cual está dedicado precisamente a la resolución de problemas, se ocupa en el tercer apartado del capitulo II, «Formación de las ciencias matemáticas», de los problemas; en él trata los tipos de problemas y su resolución desde un punto de vista estrictamente matemático, no didáctico. De la misma forma, en el capítulo V, titulado «Resolución de los problemas numéricos», se destinan los tres primeros apartados a la medida de magnitudes, y solo los dos últimos a los métodos de resolución (sintético, analítico, 'reductivo') y a la resolución algebraica de problemas, respectivamente. La mayor parte de la obra son ejemplos de problemas resueltos, sin indicaciones didácticas, clasificados por las cuestiones matemáticas que tratan o por el método matemático de resolución.

El tratamiento que hace Xiberta de la resolución de problemas coincide pues con la visión más formalista de la enseñanza de esta ciencia, propia de un profesor que no había asumido, como hicieron muchos de sus contemporáneos, las ideas de la Escuela Nueva.

[199] Detaille, L.: *La Metodología en acción*. Juan Ortiz, Madrid, 1933. Traducción de A. R. Charentón.

[200] Charentón, Aurelio Rodríguez: *Metodología de los problemas. Enseñanza razonada de los problemas de Aritmética y Geometría en la Escuela Primaria*. Editorial Instituto Samper, Madrid, 1930.

[201] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit.

El papel que asignan a la resolución de problemas el resto de los autores y la manera de abordar en sus libros esta cuestión son muy diferentes. Por ejemplo, la intención de ofrecer una extensa colección de problemas hechos es algo a lo que expresamente renuncia Eyaralar, por entender que basta con dar normas generales para que cada maestro vaya renovando su colección, adaptándola a su grupo de alumnos; y declara en el prólogo de su libro: «En la Escuela a la medida, los problemas deben ser a la medida también, y en la Escuela activa, deben crearse cada día»[202].

Charentón, en cuanto a la enseñanza del cálculo, considera los problemas como *punto de partida* de las operaciones aritméticas («humanizamos las cuestiones abstractas de las matemáticas») y también como aplicación de las mismas («despegamos de la Vida para volver a aterrizar en ella»[203]). No obstante, «los problemas sirven además de base para descubrir la técnica de las operaciones»[204], es decir, no olvida la importancia de las *técnicas* en matemáticas, aunque eso sí, considera que se deben estudiar de manera razonada.

Su idea de presentar la matemática a los niños desde la intuición y evitando el formalismo excesivo, no le hace sin embargo olvidar cuál ha de ser la verdadera esencia del conocimiento matemático: «En este flujo y reflujo de los problemas a la teoría, y de ésta nuevamente sobre los problemas, hacemos consistir, fundadamente, la formación matemática elemental que el niño debe recibir en la escuela»[205].

Pero la influencia de la Escuela Nueva no se refleja sólo en el rechazo del formalismo excesivo, sino también de la rutina, cuando es innecesaria:

> Es posible que para algunos maestros llegue a ser una preocupación la de lograr que en la escuela se resuelvan el mayor número de problemas [...]; nosotros sentimos esa preocupación bajo otro aspecto: el de la importancia que tiene para la formación matemática de un alumno el resolver un mismo problema de todas las maneras posibles.

[202] Eyaralar Almazán, José María: *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría. Normas para su planteo y resolución.* Sardá, Guadalajara, 1936, p. 5.
[203] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p.9.
[204] Ibídem, p. 11.
[205] Ibídem, p. 12.

> Al concepto de extensión oponemos el de intensión; porque creemos que [...] ese esfuerzo mental para encontrar otros recursos, para compararlos [...] para subrayar las reflexiones que sugieren, [...] es una excelente gimnasia intelectual que, por ser a costa de nuestra propia experiencia, es por ello más educadora[206].

Eyaralar considera que el ideal de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria sería que consistiera en una serie de ejercicios y problemas, para hacerla *activa* y *placentera*, y por ende *inventiva*. Reconoce la necesidad de una parte expositiva, pero «preparada, seguida y afianzada por los ejercicios y problemas»[207]. Es más, despojada de ese carácter inventivo, la actividad de resolución de problemas pierde su efecto educativo[208].

Además, «los problemas sirven, también, para *examen*: en este aspecto son insustituibles, para manifestar, tanto los conocimientos adquiridos, como la capacidad de discurrir, aplicándolos a situaciones concretas»[209].

Margarita Comas recomienda que toda la enseñanza elemental se base en los problemas, para comprobar y aplicar lo aprendido, para adquirir práctica, pero también para descubrir nuevas verdades: «sirviendo unas veces para descubrimiento de nuevas verdades; otras, para comprobación e ilustración de las ya sabidas; en ocasiones para adquirir práctica...»[210]. Y se muestra partidaria de que el programa escolar se estructure de forma que cada verdad responda a un problema práctico.

Se aprecia cómo a la resolución de ejercicios y problemas se le asignan diversas funciones; son varios los autores que piensan que estructurar la enseñanza alrededor de la resolución de problemas permite promover, expresado en la terminología de la TAD, los diferentes *momentos* de la práctica didáctica[211], incluidos los más directamente relacionados con las *actividades de estudio e investigación*. De esta manera los problemas y ejercicios contribuyen a ciertas funciones, las que clásicamente se les atribuyen, *sistematización,*

[206] Ibídem, pp. 7-8.
[207] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 376.
[208] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., pp. 102-103.
[209] Ibídem, p. 55. La cursiva es nuestra.
[210] Comas Camps, *Cómo se enseña... (1932)*, op. cit., p. 15.
[211] Descritos en p. 13.

evaluación y *trabajo de la técnica* (esta última sobre todo en el caso de los ejercicios), pero también motivar el *primer encuentro* con una organización matemática, la *exploración* de tareas y la *emergencia de las técnicas* e incluso la construcción del *bloque tecnológico-teórico*:

> El concepto de las operaciones aritméticas ha de obtenerse por la resolución de un problema concreto. [...] También los procedimientos operativos se hacen inteligibles presentándolos, siempre que sea posible, como problemas intuitivos. [...] Gracias a los problemas, el alumno encuentra una justificación al aprendizaje del cálculo[212].

Del mismo modo la obra sobre los problemas de los inspectores franceses J. Gal y A. Marijon, traducida por Josefina Pascual[213], aconseja reducir los contenidos de Matemáticas en las Normales (francesas) y completarlos con problemas,

> de los cuales, unos serán aplicación directa de los principios aprendidos en clase, aplicación que fijará en los espíritus el sentido y el uso de los conocimientos esenciales adquiridos, y otros facilitarán investigaciones menos inmediatas, harán llamamiento al ingenio y a las facultades inventivas[214].

La preocupación, por parte de Sáiz Salvat, por los aspectos *estéticos* en lo relacionado con los problemas –dedica a ello todo un capítulo–, o la de Eyaralar por los valores morales y sociales que pueden poner de manifiesto los problemas, es otra señal de la influencia de las nuevas ideas pedagógicas.

8.3.2. El planteamiento de los problemas

Cada uno de los autores suele enumerar las condiciones que ha de satisfacer el enunciado de un problema.

[212] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., pp. 8-9.

[213] Gal, J. y Marijon, A.: *Los problemas resueltos por el método intuitivo. Tablas, Gráficas, Fórmulas.* Traducido por M.ª Josefa Pascual. Imprenta Santa Teresa, Sanlúcar de Barrameda, 1934 .

Traducción de la edición original francesa: Gal, J. y Marijon, A.: *Les Problèmes résolus par la méthode naïve, barèmes, graphiques, formules.* F. Nathan, París, 1929.

[214] Ibídem, p. 149.

Respecto al planteamiento de los problemas, Charentón proporciona estas pautas:

- 1.ª Familiaridad con las cuestiones [...]
- 2.ª Sencillez del enunciado [...] Brevedad y claridad.
- 3.ª Datos exactos, esto es, que los valores numéricos no sean arbitrarios, sino tomados de la realidad[215].

Pide además graduar la ordenación de los problemas.

En el caso de Sáiz Salvat los problemas han de satisfacer propiedades como[216]:

- Interés
- Exigencia de esfuerzo personal
- Orden
- Claridad

Estas dos últimas características en aras de favorecer la 'estética' matemática. Y sugiere proponer problemas de geografía, geología, astronomía, etc.

Paunero pide[217]:

- Cuestiones de uso diario
- Realidad
- Sencillez
- Graduación.

Eyaralar, por su parte, pide que los problemas sean[218]:

a) Comprensibles
b) Interesantes
c) Reales
d) Graduados
e) Seriados

[215] Charentón, *Metodología...*, op. cit., pp. 13-14.
[216] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar... Didáctica*, op. cit., pp. 119-121.
[217] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., pp. 142-144.
[218] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., pp. 375-377.

Observamos cómo se repiten algunos aspectos, en particular la exigencia de que los problemas resulten interesantes al alumno y que se extraigan de la experiencia de éste.

Eyaralar analiza las cualidades que ha de tener un problema y para ello considera tres elementos: el interés, la intuición y el realismo. De la intuición nos ocuparemos al hablar de la representación gráfica de los problemas. Comentaremos cada uno de los otros, incorporando y comparando las sugerencias de otros autores.

8.3.2.1. Cualidades que generan el interés por los problemas. El realismo

Eyaralar considera la cualidad principal de los problemas que respondan al **interés** del alumno; es más, estima que el interés que genere un problema ha de ser intrínseco, para que pueda desencadenar la 'invención' que supone el proceso de resolverlo.

Charentón insiste en elegir los problemas a partir de las cuestiones que brinda la realidad y presentarlos como un episodio natural en las relaciones sociales. Sáiz Salvat recomienda

> que se tenga en cuenta el carácter de los pueblos donde radica la escuela para proponer los problemas apropiados para aquél [sic]; de cuestiones agrícolas en los rurales, industriales en las grandes ciudades, ictiológicos en los pueblos costeros o mixtos en las poblaciones marítimo-agrícolas[219].

Para Paunero los intereses del niño en cada edad deben guiar la selección y la elaboración de problemas en la escuela. Al igual que en otras cuestiones, en esto también recoge el parecer de Eyaralar, respecto a que los contextos para plantear los problemas sean, en este orden, el propio niño, la clase y la escuela, la casa... Eyaralar llega, pasando por los medios de comunicación, al interés por «el aspecto cuantitativo de la vida»[220] que abarcaría no solo temas de actualidad, sino aquéllos referentes a las diversas disciplinas. Precisa que en realidad para lograr el interés del niño, a pesar de la importancia de elegir

[219] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 176.
[220] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 375.

problemas tomados de la realidad, el aspecto 'utilitario' no es imprescindible, ya que el problema puede ser interesante por otros motivos: demandar la actividad física del niño, como ocurre con los ejemplos surgidos a partir de juegos o del trabajo manual; haber sido inventados por los propios niños; presentarse como acertijos. Precisamente juzga éstos últimos como los más educativos, porque no se abordan por un interés práctico, aunque advierte que tampoco conviene que sean excesivamente artificiosos. Entre los *problemas recreativos*, que incluye en el grupo de los 'curiosos', cita –para el caso de la geometría– los de componer y descomponer figuras, sobre todo si se hallan resultados más o menos sorprendentes o inesperados. Asimismo, considera que el reto que supone para el alumno una colección de problemas secuenciados en orden de dificultad creciente permite considerar estos problemas en la categoría anterior.

Estas cualidades no son excluyentes, y de hecho menciona los *juegos* que requieren trazar figuras geométricas sobre el terreno, o el trazado de paralelas en la pared para dibujar un friso. Igualmente, al tratar del interés en los problemas de geometría revela cómo los 'problemas sobre el terreno', además de contribuir al interés por la actividad física que suponen, implican cambios en los procedimientos de resolución. Como ejemplo cita proporcionar las figuras en cartulina gruesa o los cuerpos geométricos en madera, para proponer los problemas a partir de este material, de manera que sean los alumnos los que midan y, sobre todo, los que decidan qué elementos hay que medir. Del mismo modo, los problemas de determinar distancias a un punto inaccesible, alturas por la sombra, etc., que requieren salir al exterior a efectuar ciertas operaciones.

Otra cualidad que se menciona como requisito a la hora de plantear un problema matemático es el **realismo**.

Luis Paunero opone la realidad en los problemas a la abstracción excesiva, que debe evitarse, y Sáiz Salvat señala también que la matemática ha de ir unida a la realidad para ser útil, por lo que se debe intentar que los problemas contengan datos ciertos, utilizando para ello estadísticas oficiales, por ejemplo.

En cuanto al 'realismo' en los problemas, mientras que para Detaille «los problemas contendrán datos exactos conformes a la realidad y susceptibles de ser tratados por el cálculo mental, con la mayor frecuencia posible»[221], Charentón dice esto mismo, pero enseguida añade una matización a la concordancia entre la realidad y los datos de un enunciado: «sin que se llegue a una exageración en la escrupulosidad de los mismos»[222], es decir, datos 'realistas', más que exactamente 'reales'.

También Margarita Comas critica a quienes identifican 'real' con 'útil' –y como consecuencia se centran en los problemas de aritmética comercial– y a quienes reducen el mundo del niño a lo que resulta tangible para éste. En lugar de ello, propone utilizar cuentos infantiles y en general apelar a la imaginación del niño a la hora de contextualizar los problemas.

Lo que piensa Eyaralar al respecto, y recoge en su libro de *Metodología*, es que los problemas han de ser reales, en el sentido de presentarse igual que en la vida real, y por ello no solo han de elaborarse a partir de cuestiones reales y con datos reales, sino que va mucho más allá que sus contemporáneos cuando afirma que los datos que figuren en el enunciado deberían ser aquellos de los que se dispondría en una situación real y la forma del enunciado también habría de ser la misma. Incluso la manera de resolver los problemas debe corresponder a la habitual fuera de la escuela. Tres años después, en su libro dedicado a los problemas, amplía esta cuestión e insiste en que el realismo se extiende a todos los aspectos de los problemas. Afirma que no hace falta que los datos sean auténticos, pero sí han de ser plausibles, o sea, realistas: por ejemplo, en el caso de datos referidos a precios o a fenómenos físicos. Y han de venir presentados como lo harían en la realidad (catálogos si se trata de precios de artículos, tarifas de compañías de suministros); hay que tener en cuenta que en la vida a veces hemos de elegir, entre los datos disponibles, cuáles nos sirven para responder a la cuestión que se nos plantea. Tampoco tiene sentido proponer enunciados en los que las unidades de medida usadas no fuesen las que se utilizan en esos contextos habitualmente.

En la parte del libro dedicada a los problemas de aritmética, recuerda que a veces en un problema real los datos son indeterminados (rollos de

[221] Detaille, *La Metodología...*, op. cit., p. 268.
[222] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 14.

material de distinta anchura y diferentes precios) y, en función de los que elijamos, hemos de considerar diferentes soluciones. Pero cuando, al hablar de los problemas de geometría, aconseja huir de algunos problemas con datos indeterminados se refiere a problemas que habrían de resolverse en un caso general, y pone el ejemplo de la construcción de un triángulo a partir de sus lados, sin proporcionar medidas concretas, lo que efectivamente no se plantea de ese modo en la vida real.

Para no caer en un 'falso realismo', artificioso, hay que prestar atención tanto a los enunciados de los problemas como a los medios y a los procedimientos para resolverlos. Como guía, incluye una relación de lo que llama «problemas impropios», tanto aritméticos como geométricos, a modo de ejemplo, con observaciones para advertir lo alejados que están de la manera en la que se nos suelen presentar los problemas en la vida real. Estos son algunos ejemplos:

> Por la venta de 3/9 de cierto elixir se han cobrado 5/7 de pta. ¿A cómo sale el litro?
>
> (Nadie vende de ese modo)[223].

> Un individuo tiene un capital colocado en un Banco al 4 por 100 durante 5 años y 4 meses, y recoge por intereses 23.000 ptas. ¿Cuál era su capital?
>
> (No se trata en la realidad de un simple cálculo de interés simple, ya que la práctica corriente es la de añadir los intereses al capital al finalizar cada año, y así el problema es harto más complicado)[224].

> Un campo de forma de trapecio ha dado 540 kilogramos de avena a razón de 15 Qm. por Ha. Sus bases miden 120 y 90 m. Calcular su altura. (Nunca sería éste el procedimiento real para determinarla)[225].

> Un montón de tierra tiene 4 m. de diámetro y 2 m. de altura; hallar su volumen. (Los datos reales son la generatriz y la inclinación que toman las tierras)[226].

[223] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 57.
[224] Ibídem, p. 58.
[225] Ibídem, p. 121.
[226] Ibídem, p. 121.

Todos los autores –o al menos aquellos que manifiestan inquietudes didácticas– conceden mucha importancia al realismo, pero no precisan este requisito como lo hace Eyaralar. En general se limitan a recomendar que el contexto, en particular los datos, procedan de la vida cotidiana o del juego; no suelen mencionar la forma del enunciado –por ejemplo qué datos se proporcionan y cuál es la incógnita del problema– ni tampoco la resolución.

Para Eyaralar, la resolución también debe tener en cuenta las condiciones reales del enunciado. Pone ejemplos interesantes, en los que hay que determinar la cantidad de un material necesario para cubrir una superficie dada, cuando el material con el que se recubre viene habitualmente en piezas de dimensiones determinadas. En este caso, no basta calcular la medida de la superficie a cubrir, sino que hemos de pensar cómo se dispone el material sobre ella, incluso si hay una forma óptima de hacerlo, y calcular en función de ello el material necesario, del que puede ser que sobre una porción que no se utilizaría en una situación verdaderamente real.

En otro capítulo reconoce que a veces se proponen problemas nada realistas o triviales, revestidos de un aspecto práctico que es falso, pero con la intención de que sirvan de pretexto a la introducción o al empleo de ciertas propiedades o resultados matemáticos. Uno de los ejemplos que cita, planteado para poner de manifiesto la equivalencia algebraica $(a+1)^2 - a^2 = 2a+1$, es el problema «Un selvicultor [sic] planta sus árboles en marco real, formando un cuadrado, y nota, que para poner cierto número de árboles por lado le sobran 15, pero para poner uno más le faltan 116, ¿cuántos árboles tenía?»[227], que tilda de carente de realidad, ya que un silvicultor lo primero que debe conocer es el número de árboles que posee.

La justificación que subyace a estos elementos de la praxis didáctica es el convencimiento de que «la Escuela ha de preparar para la vida»[228], de forma que el alumno no se sienta defraudado cuando deje la escuela y haya de enfrentarse a la realidad. Como siempre, se percibe claramente la influencia de los principios de la Escuela Nueva.

[227]Ibídem, pp. 35-36. En lugar de 116 debería decir 16.
[228]Ibídem, p. 93.

8.3.2.2. La invención de problemas

La invención de los problemas es considerada una cuestión importante por algunos de los autores. Eyaralar le dedica dos capítulos de su libro *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría*, uno sobre los problemas de aritmética y otro sobre los de geometría. Tanto él como Charentón aconsejan que esta labor no recaiga solo en el profesor: «¿no se advierte la interesante colaboración que los mismos alumnos pueden prestar, poniendo a contribución su experiencia y su actividad imaginativa?»[229]; por ello Charentón recomienda que el profesor, usando su buen juicio y de acuerdo con los alumnos, haga una labor reflexiva de depuración de los problemas inventados por los niños.

A facilitar y dar valor a esta labor de invención contribuye la recomendación –hecha por casi todos los autores– de disponer de datos reales sobre cuestiones de actualidad o en general interesantes. Precisamente Eyaralar propone que los alumnos se encarguen de esta labor de recogida de datos como parte de la realización de lo que llama *problemas de investigación* (cita como ejemplo averiguar el número de corderos sacrificados en el Matadero Municipal y su peso, con el fin de determinar el peso medio de los corderos y el consumo de carne por habitante)[230].

Estos dos profesores, Charentón y Eyaralar, exponen una lista de pautas para inventar problemas. El primero la incluye en el capítulo dedicado a la clasificación de los problemas. Sugiere varios recursos sobre su enunciado para conseguir despertar el interés de los alumnos y desarrollar el pensamiento lógico, en definitiva, para que los problemas no sean «una cosa rígida e inerte que no habla al espíritu del alumno»[231] y para favorecer la investigación en contra de la actuación mecánica:

> I. Movilización de los datos. Consiste en que el alumno plantee con los datos del problema nuevos problemas, intercambiando el papel de datos e incógnitas.
>
> II. Determinación de la pregunta, o plantear una situación sin interrogante, para que el alumno complete el enunciado averiguando la

[229] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 18.
[230] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., pp. 24-25.
[231] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 29.

pregunta[232].

III. Omisión de un dato, para que el alumno determine con qué otro dato podría completarse el enunciado para poder resolver el problema.

IV. Supresión de datos superfluos. El alumno ha de detectar que datos son innecesarios.

V. Ordenación del problema. Proporcionar un enunciado desorganizado para que se reconstruya de una manera clara y lógica.

VI. Construcción de un problema a partir de las operaciones que lo resuelven[233].

La tercera, la cuarta y la quinta, más que técnicas para inducir la invención de problemas, estarían relacionadas con la resolución o, como propone el mismo autor, con la clasificación de los problemas.

Eyaralar por su parte, propone también varias *técnicas didácticas* para inventar nuevos problemas a partir de uno dado, algunas coincidentes con las que acabamos de enumerar. En el caso de los problemas aritméticos:

- Invención por *cambio de datos*, consistente en modificar 'dentro de lo verosímil' los datos de un problema resuelto.

- Invención por *inversión*, intercambiando datos e incógnitas. Subraya la importancia de que el niño se habitúe a expresarlos correctamente. La importancia que concede a relacionar unos problemas con otros y a comprender las relaciones que los ligan –el problema inverso sirve, entre otras cosas, para comprobar el directo– es tal que aconseja representar esquemáticamente las relaciones entre estos posibles problemas. Por ejemplo, para el problema: *«Un juguete comprado por 10 ptas., lo revende un niño ganando 2 ptas., ¿por cuánto lo vendió?»*[234], propone una tabla que hemos recogido en la figura 8.10 (p. 591)[235].

  El otro ejemplo que figura en relación a los problemas inversos supone trabajar con una fórmula, la que relaciona capital, interés, rédito y

[232]En el ejemplo que pone, la solución correcta es la que hace necesarios todos los datos del enunciado para responder.

[233]Charentón, *Metodología...*, op. cit., pp. 23-28.

[234]Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 25.

[235]Ibídem, p. 26.

c	g	v=c−g
10	2	?
10	?	12
?	2	12

Figura 8.10: Eyaralar. Tabla de resolución de un problema

tiempo, intercambiando datos e incógnitas, es decir, manipulando la expresión algebraica para obtener otras equivalentes.

- Invención por *indeterminación de la incógnita*. Consiste en inventar enunciados a partir de algunos datos que se proporcionan (coste del m^3 de agua en una ciudad, veces que respiramos en un minuto, etc.).
- Invención a base de *una expresión matemática*. Aquí diferencia entre 'expresiones simples', en las que solo interviene una de las cuatro operaciones aritméticas básicas, y 'expresiones compuestas', en las que se combinan varias simples.

La invención de estos problemas sirve para relacionar las operaciones con las acciones o los tipos de problemas que normalmente van asociados a ellas, por ejemplo, la unión de conjuntos o la suma de cantidades, y la multiplicación a problemas que responden al esquema

$$\textit{valor correspondiente a una cantidad} =$$
$$= \textit{valor correspondiente a la unidad x número de unidades}$$[236]

Es de destacar el tratamiento que hace de estos problemas, así como de los de dividir, ya que asigna el nombre de *coeficiente* al valor que corresponde a una unidad, lo que supone la consideración de todos estos problemas multiplicativos como problemas de proporcionalidad[237]. Pone ejemplos de magnitudes comerciales (tanto por uno, gasto total, renta...) y físicas (espacio, densidad, coeficiente de dilatación lineal...)[238].

[236] Ibídem, p. 28.

[237] Hemos comentado cuestiones sobre proporcionalidad en el apartado 4.2.3, pp. 306 y sig.

[238] Ver p. 308.

Pero advierte de que cuando el problema no lo inventa el maestro, sino que se pretende que lo inventen los alumnos, es mejor no darles el esquema abstracto (general), sino uno concreto, por ejemplo, *«sueldo = jornal x días»*[239].

Igualmente interesante es el tratamiento que hace de las expresiones compuestas, para las que también aconseja, en el caso de inventar el problema los alumnos, darles la aplicación de la expresión a un caso concreto; y algo muy interesante, obtener (deducir) una nueva expresión –general– a partir de varias previas:

De las expresiones

Ganancia = venta – coste

y venta = precio x cantidad

sale

Ganancia = precio de venta x cantidad – coste o sea más brevemente

G = (p x q) – c

Y a partir de ello un niño podría inventar un problema como éste: *«Averiguar la ganancia de un comerciante que adquiere 15 docenas de huevos por 27,50 ptas., y los vende a 3 ptas. docena»*[240].

Denomina a la operación mental que consiste en elaborar un enunciado a partir de una fórmula «vestir el muñeco»[241], sugerente expresión que utiliza en varias ocasiones, y que es un índice de la importancia que concedía Eyaralar a este tipo de actividad por parte de los alumnos y de cómo sus obras son un reflejo de su experiencia en el aula de la Escuela Normal.

Cita otras tres técnicas: invención a base de *expresiones implícitas*, invención por *complicación sucesiva* e invención a base de *ecuaciones algebraicas*, que corresponden a la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones de primer grado, bien por técnicas aritméticas, lo que supone cierto 'artificio', o bien conociendo la solución general, producto de un tratamiento algebraico (ejemplo, problemas en los que se trata de conocer dos cantidades a partir de su suma y su diferencia, etc.). Pero los problemas alge-

[239]Ibídem, p. 29.

[240]Ibídem, p. 31.

[241]Ibídem, p. 31. Declara haber copiado la expresión a otro profesor de Barcelona.

braicos y el Álgebra en general ha sido objeto de otro capítulo (4.2, pp. 282 y sig.) y no nos detenemos a comentarlo aquí.

Algunas de las técnicas descritas coinciden efectivamente con las propuestas por Charentón. Sin embargo Eyaralar, a diferencia de otros autores, dedica en la segunda mitad de su libro a los problemas de geometría, con pautas para su invención.

Para los problemas que llama 'numéricos' –esto es, problemas geométricos de medida–, insiste de nuevo en el interés de recopilar datos curiosos, esta vez sobre medidas de ciertas magnitudes (altura de edificios, capacidad de depósitos...) que puedan ser usados en los problemas de investigación; liga pues la *invención* de problemas a la *investigación*. Considera que:

> Más aún que en Aritmética, dependen los problemas numéricos de las fórmulas obtenidas, y cómo [sic] allí pueden inventarse problemas dando valores particulares a los datos, o deduciendo de las fórmulas nuevas expresiones que sirven de base a nuevos problemas, *«vistiendo adecuadamente al muñeco»*[242].

Merece la pena detenernos en este comentario. Lo que se sugiere es construir una fórmula, fórmula que no es sino lo que llamamos un *modelo algebraico* del problema, y *utilizar el modelo* o fórmula para resolver otros problemas en los que varíen los datos concretos; también, «deducir de las fórmulas nuevas expresiones que sirven de base a nuevos problemas», es decir, el modelo elaborado debe permitir *proponer y resolver nuevos problemas*. Este uso de las fórmulas (del álgebra) para modelizar situaciones-problema concretos, construir una solución general aplicable a problemas similares y manipular el modelo matemático (la fórmula o expresión algebraica) para *obtener nueva información* (plantear problemas nuevos), no es sino lo que caracteriza a la actividad de *«modelización matemática»*, tal y como se entiende en la actualidad.

Pero los problemas geométricos que Eyaralar considera más interesantes para los niños son los que conllevan la construcción de figuras, sea variando los datos de una construcción previa, sea eligiendo los datos para construir

[242] Ibídem, p. 95.

una figura igual a otra dada o, en una fase posterior, dando al alumno la libertad de decidir qué datos precisa para construir una figura imaginada.

Eyaralar observa que la invención de problemas, en este caso, variando o inventando los datos, supone a veces llegar a deducir alguna *condición sobre los datos* -medida de magnitudes en la figura que se pretende construir- para la existencia de dicha figura (por ejemplo, que en un triángulo rectángulo la altura no puede ser mayor que la mitad de la hipotenusa). Incluso señala que se pueden descubrir muchas propiedades de este modo. Reconoce pues que proponer a los alumnos la invención de problemas, en el caso de los problemas de construcción, es una técnica didáctica que sirve a la *función de descubrimiento* de nuevas propiedades o relaciones.

Como ejemplo de invención de problemas gráficos, menciona también los de determinación de la posición de elementos geométricos, como los problemas de lugares geométricos, que se estudian en otro apartado.

Por último, el trabajo manual –recortado y ensamblado de figuras– y el dibujo los considera fuentes valiosas para la invención de problemas geométricos por su interés intrínseco y porque en ellos coexisten características de los dos tipos de problemas geométricos, los gráficos y los numéricos, la geometría y la medida de magnitudes geométricas. A estos problemas los llama «mixtos» por ser la consideración de una figura obtenida gráficamente la que da lugar a un problema de medida. El papel de la figura es importante, en tanto que suscita atención sobre la clase de relaciones observables.

8.3.2.3. Clasificación de los problemas

La clasificación que hacen diferentes autores de los problemas es distinta según qué criterio consideren y también según la finalidad de dicha clasificación, por no hablar de la teoría didáctica o de las ideas pedagógicas que guían a cada uno de ellos. Así, la clasificación que hace Xiberta de los problemas no tiene más finalidad que la de organizar un libro[243], compuesto en su mayor parte por problemas típicos resueltos, en capítulos. Por ejemplo, dedica el capítulo VI a problemas sobre cambios de unidad, el siguiente a problemas de aritmética mercantil, otro a problemas de trigonometría, etc.,

[243] Xiberta Roqueta, *Matemáticas...*, op. cit.

y también hay capítulos que consisten en colecciones de problemas resueltos por uno u otro método: reductivo, sintético, algebraico, gráfico. Rey Pastor y Puig Adam también tratan en su *Metodología*[244] de los métodos matemáticos de resolución, pero en este caso, su libro no pretende ser un mero compendio de problemas resueltos acompañando a una exposición de los métodos de razonamiento propios de la matemática, por lo que no incluyen capítulos conteniendo solo colecciones de problemas resueltos, sino que todos los problemas aparecen ejemplificando la exposición, y en ocasiones con comentarios u observaciones que van más allá de recordar una fórmula o una proposición necesaria para resolver los problemas que figuran a continuación.

Otros autores se centran en la diferencia entre *problema* y *ejercicio* y, si acaso, proponen algún tipo de clasificación relacionada con el momento en el que se plantea cada uno de ellos. Tan solo Eyaralar presenta varias clasificaciones, según diferentes criterios; nos centramos en ellas e iremos señalando otras aportaciones en aspectos concretos.

Según Eyaralar los problemas pueden clasificarse atendiendo a diferentes descriptores[245]:

- Según la *finalidad metodológica* los problemas pueden ser teóricos, si tratan de obtener propiedades generales, o prácticos, si se refieren a situaciones concretas. Esta clasificación en realidad distingue los problemas que consideramos *intramatemáticos* (aquellos en los que el contexto es estrictamente matemático) de los que actualmente se tiende a denominar, de forma genérica, *contextualizados*.

  Consideramos interesante esta distribución, precisamente porque confiere a tareas de búsqueda de relaciones, formulación de propiedades generales, demostrativas, etc., la categoría de problemas.

  Aunque el propio Eyaralar, consciente de lo fina que es la línea que separa unos de otros, considera por ello una categoría intermedia de problemas, a los que llama 'anfibios', que parecen prácticos pero que en realidad se proponen con el fin de aplicar una propiedad: «Un tablero de ajedrez tiene 8 casillas por lado. ¿Cuántos cuadritos hemos de agregar

[244] Rey Pastor y Puig Adam, *Metodología y Didáctica...*, op, cit.
[245] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., pp. 35-40.

para que resulte un cuadrado de 9 casillas?»[246] En este caso la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos, que el autor considera un sencillo problema intuitivo.

- Por la *manera de resolverlos* (en el caso de los aritméticos) los clasifica en *racionales* y de *artificio*; éstos últimos son los que precisan recurrir a algún artificio o truco aritmético.
- Según el *medio empleado para resolverlos* (los problemas de geometría) pueden ser *gráficos* o *numéricos*.
- Por el *procedimiento que predomine en la resolución* (lo menciona en los problemas de geometría): de lugares geométricos, algebraicos...
- Por la *teoría a la que se refieran* (lo menciona en los problemas de geometría): problemas de semejanza, de máximos y mínimos...
- Por su *finalidad didáctica* los problemas se clasifican en: previos o *preparatorios*; ordinarios o *de aplicación*; de *recapitulación y de repaso; especiales* (no son consecuencia inmediata de reglas y exigen un procedimiento especial o un método de importancia). En aritmética incluye la clase de problemas *generales*, como un tipo específico (problemas de interés, de regla de tres...)

Los problemas *previos* –que Eyaralar considera parte de la 'lección' teórica– preparan la comprensión de una definición o de una propiedad. Los de *aplicación* siguen a la explicación con el objetivo de afianzarla, incluso ampliarla. Los de *recapitulación* se proponen tras varias lecciones para relacionar los conocimientos adquiridos por separado y tienen más presencia en los grados más avanzados. Los problemas *especiales*, que incluyen los relativos a un *centro de interés*, están relacionados con los métodos algebraicos y –en geometría– con los lugares geométricos, los problemas sobre el terreno, etc.

Sáiz Salvat[247] recomienda sistematizar los problemas y los ejercicios en grupos homogéneos. Dentro de cada grupo distingue: los que son de *aplicación directa* de lo estudiado o fortificación de conceptos, a continuación de

[246] Ibídem, p. 35.

[247] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 175.

una definición, por ejemplo; los de *discriminación*, o que demanden alguna participación personal; los de *recapitulación o de repaso*, que abarcan varias cuestiones; y los de *generalización*.

Paunero[248], cuya clasificación se reduce a diferenciar entre *problemas* y *ejercicios*, considera que éstos forman parte de la lección teórica como aplicación inmediata de la lección, a modo de ejemplo de los principios o reglas que se están estudiando, como *explicación*. Igualmente, opina que se han de repetir para fijar el concepto aprendido. En cambio, los problemas no pueden ser considerados como tales si no implican un proceso de análisis y síntesis.

Observamos algunos puntos comunes cuando se atiende al criterio del fin didáctico. A los problemas previos, que solo Eyaralar menciona, este autor les atribuye una función que podemos denominar, con la terminología actual, de *descubrimiento*: van asociados a la *definición* de conceptos y a la *validación* de propiedades:

> Es regla general de Didáctica que toda *cuestión* nueva debe presentarse al alumno como tal. Es decir, cómo [sic] una pregunta que se le hace, cómo [sic] un problema que tiene que resolver. En el estudio *analítico* de las formas, cabe perfectamente seguir esta regla, tanto para la *definición* de las formas, como para el establecimiento de sus propiedades[249].

Para los problemas o ejercicios de aplicación todos coinciden en la función llamémosla *explicativa* –Paunero incluso utiliza este término–, y a los de recapitulación o de repaso atribuyen una función de *sistematización* de lo aprendido. Los problemas de 'discriminación', y los que Eyaralar llama 'especiales', tienen mucho que ver con los momentos del *trabajo de la organización matemática* y de la *construcción del bloque tecnológico-teórico*[250].

Otros tipos de clasificaciones usuales de los problemas son sin embargo criticadas por algunos autores. Así, a Charentón la «necesidad de luchar y reaccionar contra la rutina y el formalismo»[251] le lleva a criticar la clasifica-

[248] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 142.
[249] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 82.
[250] Los momentos se describen en pp. 13 y sig.
[251] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 19.

ción habitual en los manuales escolares, según la *naturaleza de los números involucrados*:

> No encontramos, en efecto, razón alguna, pedagógica, ni lógica, ni matemática, ni práctica que justifique una clasificación de problemas en: Problemas de sumar enteros, de dividir decimales, de restar complejos, de multiplicar quebrados, etc., etc.
>
> No. Los problemas no son de sumar enteros ni de restar decimales. Los problemas versan sobre cuestiones concretas y prácticas que todos los días la vida nos ofrece[252].

Señala que la ordenación gradual de los problemas, debe permitir que «permaneciendo idéntica o análoga la armadura del problema, las relaciones fundamentales entre sus diversas partes puedan distinguirse con facilidad, a pesar de las complicaciones que, paso a paso, vayamos introduciendo»[253]. Como ejemplo, propone una lista de problemas que llevan al siguiente principio: *«Ganancia = Precio de venta – Precio de compra o Coste»*[254].

> Es claro que en aquellos problemas a que antes aludíamos, y que responden a necesidades prácticas de la vida, entrarán decimales o complejos; pero esto resulta tan circunstancial, que no puede en modo alguno ser suficiente para denominar a una cierta categoría de problemas. Lo otro, sí; el problema será siempre de compra o venta, cualquiera que sea la naturaleza de los datos[255].

Una opinión diferente es la expresada por Eyaralar:

> La clasificación de los problemas por los datos que en ellos intervienen (muy corriente en libros extranjeros y aun en alguno español), no nos parece útil. Que un problema sea de *salarios*, de *compraventa*, de *gastos inútiles* o de *economía*, no tiene trascendencia ninguna para el pensamiento matemático, ni aplicación inmediata a su utilización por el profesor.
>
> Creemos conveniente clasificar los problemas por las relaciones matemáticas que utilizan[256].

[252] Ibídem, pp. 19-20.
[253] Ibídem, p. 15.
[254] Ibídem, p. 17.
[255] Ibídem, p. 20.
[256] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 36.

Aunque de todas formas, Charentón también tiene en cuenta el tipo anterior de clasificación cuando diferencia entre *problemas* y *ejercicios de aplicación*, que «impone que al tratar de la división con decimales, por ejemplo, su estudio se organice alrededor de problemas y ejercicios diversos, cuya resolución exige cálculos sobre aquellos números»[257].

En otro libro, traducido en aquellos años, se critica la clasificación de problemas por el tema –el contexto– del enunciado:

> Uno de mis amigos enseñando a un escolar un tanto aturdido, le dictó el siguiente problema: «Un comerciante de vinos...» al oir [sic] estas primeras palabras, el pequeño gritó poco menos que despavorido: «¡No! Oh no! [sic] Yo no he llegado todavía a los problemas de los comerciantes de vinos»[258].

En cuanto a la resolución de *problemas-tipo*, es recomendada por Eyaralar, que aconseja dedicar sesiones especiales a la invención y resolución de problemas, en las que los alumnos resuelvan problemas de manera cada vez más autónoma, sobre todo para los problemas de recapitulación y para los especiales.

Charentón critica que se piense que degenerará en rutina el tratar los problemas en tipos determinados cuya resolución el niño mecanizará de forma rutinaria, en contra del interés educativo y del razonamiento. Para ello insiste en la diferencia entre la resolución de problemas y otros aprendizajes:

> Sentemos, en primer lugar, que es una cuestión de hábito, de repetición y de mecanismo la que nos permite, con cualquiera de los procedimientos antiguos o moderno, leer bien, escribir bien y hacer bien las operaciones aritméticas. Y si eso se logra en esas disciplinas es por *la escasa variedad de combinaciones que permite detener ciertos clichés visuales o mnemotécnicos, que a fuerza de repetirse facilitan el aprendizaje y cultivo de la lectura, de la escritura y del cálculo operatorio.*
>
> Pero en los problemas, su número ilimitado no permite abordarlos todos en la escuela primaria; [...] Lo fundamental es darle una dirección, un sentido racional (que luego degenerará en hábito) para que él

[257] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 20.
[258] Gal y Marijon, *Los problemas resueltos...*, op. cit., p. 90.

> prosiga sus investigaciones en la forma y medida que sus necesidades lo requieran[259].

Defiende que la clasificación en problemas-tipo propicia el establecimiento de analogías entre los problemas:

> Además, permite mostrar a la clase la generalidad del procedimiento de resolución y la analogía profunda que existe entre cuestiones al parecer sin puntos de contacto. Y esa *generalización*, que es también simplificación y ordenación, da confianza al alumno al *sistematizar sus conocimientos*[260].

También Sáiz Salvat aconseja «sistematizar los problemas en grupos homogéneos»[261], aunque en su caso no queda bastante claro el criterio para hacer dichos grupos.

Otra vez se pone de manifiesto, por parte de Charentón y de Eyaralar, la función de *sistematización*, esta vez favorecida por la técnica de planificar sesiones para resolver problemas de un mismo tipo.

Charentón propone llevar a cabo en clase una auténtica «discusión matemática que libera al pensamiento de todo formalismo y estructura las facultades lógicas»[262]. Reconoce que la introducción del álgebra y de las funciones permite unificar los problemas y también los métodos de resolución, pero a la vez lamenta que la mayoría de los alumnos no cursarán sino los primeros grados de la escuela primaria, donde no es posible llegar al grado de abstracción que suponen las técnicas algebraicas[263].

La agrupación en problemas-tipo no es la única que encontramos. Eyaralar comenta dos *dispositivos didácticos* relacionados con la resolución de series de problemas: los *concursos de problemas*[264], individuales o colectivos, y las series de problemas sobre un mismo asunto, que relaciona con el *método de proyectos*[265]. De este último recordemos la serie de 14 problemas que tratan

[259] Charentón, *Metodología...*, op. cit., pp. 21-22.
[260] Ibídem, p. 30. La cursiva es nuestra.
[261] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 15.
[262] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 31.
[263] Ibídem, pp. 32-33. Ver la cita en p. 311.
[264] Ver p. 489.
[265] Ver p. 445.

sobre la producción de trigo[266]. En geometría, hemos comentado la propuesta de estudiar las figuras mediante una colección secuenciada de problemas que constituyan un *centro de interés*, concretamente, el del «estudio geométrico de un vaso de agua»[267].

8.3.2.4. La gradación de los problemas

Para los problemas aritméticos Eyaralar recomienda que en el primer grado contengan solo magnitudes y relaciones que puedan hacerse fácilmente intuitivas por la acción o la imagen, y dejar las magnitudes más abstractas para el tercer grado; propone graduarlos de manera que al principio intervengan número sencillos, de modo que la complejidad numérica no dificulte la comprensión de otros aspectos del problema.

También Charentón, al igual que Detaille, propone «preparar gradualmente la ordenación de los problemas de modo que partiendo de una cuestión sencilla, resoluble mentalmente o por medios materiales, lleguemos a una discreta complejidad»[268]. Esto es lo que hace en el Apéndice del libro, al recoger una colección de problemas clasificados por tipos: dentro de cada tipo, comienza por varios problemas para resolver calculando mentalmente, y después pasa a los que han de resolverse por cálculo escrito.

Eyaralar, respecto a la graduación de los problemas de geometría, opina –como Paunero refiriéndose a los de aritmética– que los problemas se deben graduar considerando que las operaciones inversas son más difíciles que las directas; por eso recomienda dejar incluso para un segundo año dentro del programa problemas como, por ejemplo, el cálculo de una longitud conocida la superficie o el volumen.

Para los primeros grados sugiere proponer problemas en los que se usen figuras recortadas, regla e instrumentos de dibujo, el *disco EYA*..., es decir, apelar a los *sentidos* en el primer grado y a la *imaginación* en el tercero, gradualmente: «La conveniencia de "vestir al muñeco" subsiste en todos los grados, pero sucesivamente atenuada»[269].

[266] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., pp. 76-77. Los hemos mencionado en la p. 446.
[267] Ibídem, p. 120. Nos hemos referido a este ejemplo en la p. 446.
[268] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 14.
[269] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, p. 101.

Sin embargo, advierte de la necesidad de graduar 'con finura' la serie de problemas que debe proponerse para afianzar el conocimiento de una figura o de una propiedad, y pone dos ejemplos, uno numérico y otro gráfico, de series de problemas ordenados para calcular ángulos en un triángulo y para construir un triángulo isósceles, respectivamente. Reconoce la necesidad de construir una serie graduada de problemas como medio para llegar a abordar uno concreto que entrañe especial dificultad para el alumno.

8.3.3. La resolución de los problemas

Los esquemas para la resolución de un problema, aunque no sean idénticos, comparten algunas fases o momentos diferenciados, en ocasiones con distinta denominación. En general, se destaca un proceso de *análisis* y otro de *síntesis*, también llamado *solución*. Coinciden asimismo en otros aspectos, como en atribuir un papel destacado a las representaciones gráficas o a la comprobación de lo hecho.

Paunero señala cuatro partes diferenciadas en el estudio y la resolución de un problema (que insiste en que hay que hacer notar al alumno): *construcción* del problema; *análisis* del problema; *resolución* del problema; *control* del mismo[270].

Charentón propone aplicar a la resolución de problemas las fases de cualquier lección: *intuición, análisis* y *síntesis*[271]. La fase de intuición, dedicada a que el alumno comprenda el problema, es lo que Eyaralar incluye en el epígrafe dedicado a la comprensión del enunciado.

También Eyaralar habla de análisis y síntesis en el caso de los problemas aritméticos; para los geométricos hace algunas matizaciones. El esquema que propone en su *Metodología* comprende las fases de *análisis, síntesis, comprobación, construcción gráfica.*

En cambio Sáiz Salvat describe los métodos sintético y analítico como dos maneras de resolver un problema, no como partes de un esquema estructurado. El esquema con las fases generales de resolución de un problema está incluido en un capítulo titulado *«Empleo de las matemáticas para desarro-*

[270] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 144.
[271] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 33.

llar el sentimiento estético»[272]. Es el siguiente: *resolución*, o razonamiento del problema; *construcción* gráfica, una representación geométrica a escala; *comprobación*, por un procedimiento diferente al empleado en la resolución; *discusión*, para averiguar si el problema tiene una o varias soluciones, esto es, si es «determinado» o «indeterminado», respectivamente, o incluso «imposible»[273]. Para el último grado o para los alumnos que han sido iniciados en el álgebra, añade la fase de *generalización*.

Además, en los libros de *Metodología* dedicados íntegramente a la metodología de la propia ciencia matemática, o en aquellos que contienen al menos una parte dedicada a ella, se describen varios métodos matemáticos de demostración y de resolución de problemas, a veces ligados a ciertas clases de problemas, como los de proporcionalidad o los relativos a lugares geométricos. En particular, explican cómo las técnicas algebraicas –ecuaciones– y funcionales –representación de funciones en gráficos cartesianos– se revelan útiles para resolver problemas, sobre todo cuando la resolución aritmética requiere de cierto artificio.

En aquellos cuya orientación es más didáctica, como el de Eyaralar, se describen también, como métodos de resolución de problemas, los consistentes en cambiar del *marco* aritmético al geométrico o en resolver un problema mediante una representación gráfica. Trataremos este tipo de representación en la resolución de problemas en el apartado 8.3.3.2 (p. 605).

El interés de otros aspectos, como la comprensión de los enunciados o la resolución de algunas clases específicas de problemas, merece que los tratemos aparte[274], aunque no todos los autores estudiados les dediquen la misma atención.

8.3.3.1. La comprensión de los enunciados

Varios autores hacen aclaraciones sobre cómo ayudar a los alumnos a interpretar los enunciados de los problemas, aunque solo Eyaralar dedica un epígrafe a esta cuestión.

[272] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., Cap. III, pp. 114-123.

[273] Cuando la solución numérica obtenida no tenga sentido en el contexto del enunciado.

[274] Los problemas de lugares geométricos, los lúdicos, etc., se tratan en otros capítulos de esta Memoria.

Paunero, por ejemplo, recomienda al maestro que, además de preparar el problema, intervenga para aclarar el enunciado y ayudar a los alumnos a vislumbrar las posibles maneras de llegar a la solución del mismo. La intervención que propone prepara, o incluso incluye, parte de la fase de análisis, es decir, del proceso de resolución propiamente dicho.

Eyaralar manifiesta que si el problema ha sido inventado por los alumnos o procede de una situación real para la clase, la comprensión del enunciado está garantizada de antemano. Cuando no es así, proporciona indicaciones al profesor para lograr que el alumno llegue a «*sentir* el enunciado del problema como si se hubiese vivido»[275]: asegurarse de que se entiende el vocabulario del enunciado; diferenciar datos e incógnitas, así como las relaciones que los ligan; unificar las unidades cuando se trata de datos homogéneos; dibujar un croquis o representar esquemáticamente algunas relaciones; intentar hallar un resultado aproximado de la incógnita; imaginar el problema para tratar de encontrar las relaciones existentes en él.

En el caso de la geometría proporciona orientaciones para la comprensión del enunciado cuando se trata de un problema gráfico. Advierte de la dificultad de los alumnos para relacionar los datos del enunciado con la figura y propone, para facilitar esta tarea, que el profesor actúe siguiendo tres fases consecutivas: resolver él mismo un problema a la vista de los alumnos, que se limitarán a repetirlo con otros datos; dar un croquis de la figura y marcar numérica o simbólicamente los datos y las incógnitas; dejar que el croquis lo realicen los alumnos y limitarse a revisarlo.

Es diferente de lo que propone Detaille, citando a Flament:

> El estilo del problema será el lenguaje matemático: sobrio, pero suficiente; preciso, claro y correcto; *es preciso que la pregunta salte a la vista*, [...]
>
> En los primeros años de la resolución de problemas, *la pregunta debe estar enteramente al fin o al principio del enunciado*, escrita de tal manera que se pueda adoptar así para la respuesta y, en caso necesario, *comprendiendo el término que inspirará la operación que haya de efectuarse*[276].

[275] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 41.

[276] Flament: Ecole primaire, 1901. Citado por: Detaille, *La Metodología...*, op. cit., p.

Estas sugerencias 'facilitadoras', consistentes en 'evitar el error' dando pistas al alumno para 'conducirlo' hacia la respuesta correcta, no son compartidas por Charentón, traductor del libro (recordemos lo que propone en el apartado sobre la invención de problemas, y que hemos recogido en la p. 589) y contrastan con las que formula Eyaralar dirigidas a facilitar, no ya la obtención de la respuesta correcta del alumno, sino la comprensión del enunciado y de las relaciones presentes en el problema.

En el siguiente apartado profundizaremos en la importancia que dispensan estos autores a la representación gráfica de los problemas para desarrollar la intuición y su relevancia para comprender un problema y resolverlo, pero, sobre todo, como ayuda para la generalización y como medio de favorecer el razonamiento matemático.

Las observaciones que hace Sáiz Salvat relativas a los enunciados son más bien de tipo formal. Recomienda cuidar la disposición de los problemas aritméticos, encerrando el enunciado de modo que los datos vayan recuadrados, en color o subrayados. Luego la resolución, separada e identificada, con la incógnita y las operaciones para llegar a ella; finalmente las fórmulas o resultados finales en rectángulos.

8.3.3.2. La intuición y la representación gráfica

La mayoría de los autores que se preocupan por dar a la enseñanza un carácter más intuitivo, aluden precisamente a la intuición en el proceso de resolución de un problema. Y para favorecerla mencionan las representaciones gráficas, más o menos esquematizadas, con diferente papel en dicho proceso: «Es completamente distinto resolver un problema gráficamente y emplear la representación gráfica como elemento auxiliar para simplificar la comprensión o resolución de un problema aritmético»[277]. Según Paunero, antes del proceso analítico que supone enlazar los elementos que componen la resolución de un problema, está su comprensión, que conlleva siempre un proceso de *intuición*, a partir del enunciado, que un gráfico puede favorecer, «pero se tratará de otra cuestión bien distinta si llevamos, no el procedimiento gráfico como auxiliar de la solución aritmética, sino como un verdadero método de

268. La cursiva es nuestra.

[277] Paunero Ruiz, *Ensayo...*, op. cit., p. 146.

resolución de problemas»[278], para lo que apela a la representación geométrica de las relaciones aritméticas y a la solución de los problemas aritméticos mediante la gráfica de una función.

Quienes han dedicado toda una obra enteramente al planteamiento y la resolución de problemas tratan extensamente, junto a otros recursos, la cuestión de las representaciones gráficas y su función para dar una orientación más intuitiva, más cerca de las ideas pedagógicas de la época, a este proceso. Nos referimos a Charentón y a Eyaralar, cuyas propuestas se analizan a continuación.

La intuición y la resolución de problemas: Propuesta de Charentón

Para Charentón[279] la fase de intuición es fundamental, puesto que considera que la mayor parte de los alumnos que fracasan en la resolución de un problema es por no comprenderlo, porque *«no lo ven»*[280] . Para ayudarlos a entender el anunciado, propone su *dramatización* por los propios niños[281], y según la índole del problema, la interpretación gráfica:

> Hacer que los alumnos comprendan el problema, que lo interpreten debidamente, es lo primero que debe procurarse. Para ello, cuenta el maestro con tres recursos: el comentario, la dramatización y la visualización. A la discreción de aquél dejamos la oportunidad de aplicarlos[282].

Pero además, «este esquema gráfico, no sólo hace visible el problema, sino que indica el modo de resolverlo»[283]. Vemos expresada aquí la doble función,

[278]Ibídem, op. cit., p. 147.

[279]La propuesta de Charentón ha sido estudiada en: Sánchez Jiménez, Encarna: «La resolución de problemas: aportaciones de Aurelio Rodríguez Charentón». En: Pablo Celada (Ed.), *Arte y oficio de enseñar. Dos siglos de perspectiva histórica*, tomo II, pp. 507–516. SEPHE. Universidad de Valladolid, El Burgo de Osma (Soria), 2011.

[280]Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 33.

[281]La importancia que tiene la dramatización en el aprendizaje matemático ha sido estudiada en: Saá Rojo, María Dolores: *Las matemáticas de los cuentos y las canciones*. EOS, Madrid, 2002.

[282]Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 37.

[283]Ibídem, p. 35.

representativa e *instrumental*, de la representación gráfica, que es un medio para comprender la situación problemática, a la vez que un instrumento para resolverla, tal como se recoge en investigaciones actuales[284]. En este sentido, la representación gráfica se puede situar entre las fases primera (intuición) y segunda (análisis).

En el capítulo V, dedicado a los gráficos, distingue dos tipos de representaciones gráficas, según se consideren como procedimiento o como método:

> Como procedimiento es un recurso para visualizar el problema, para desarticularlo e interpretar mejor las relaciones que se desprenden del enunciado; traducción material que va guiando al espíritu en el camino de sus deducciones y le ofrece, generosa, los medios para encontrar la solución.
>
> Como método [...] no es ya como antes, una orientación, un plan director; es toda una construcción de la solución»[285].

Como método, está ligado a la representación gráfica de funciones y lo tratamos –como ya hemos comentado– en el capítulo dedicado al Álgebra (pp. 297 y sig.).

La representación gráfica como procedimiento sería un auxiliar para comprender el problema, por lo que le atribuye un carácter «personal y circunstancial»[286], sin normas rígidas. En cualquier caso proporciona unas pautas generales:

> Los datos se representan por rectas de longitudes tales, que guarden relación con los valores numéricos que representan[287].
>
> El punto de origen de las rectas debe ser concordante; esto es, todas han de partir de una misma vertical imaginaria.
>
> Una de las rectas se tomará como base para el trazado de las restantes, aumentando o disminuyendo la longitud de éstas según las condiciones del enunciado.

[284] Font, Vicenç; Díaz Godino, Juan y D'Amore, Bruno: «An onto-semiotic approach to representations in mathematics education». *For the learning of mathematics*, 2007, **27(2)**, pp. 2–7.

[285] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 47.

[286] Ibídem, p. 48.

[287] Sin embargo esto no siempre es posible, ya que en algunos problemas supondría conocer de antemano la solución.

Deben trazarse aquellas construcciones auxiliares que permitan fijar con más claridad las relaciones entre los elementos del problema[288].

Para el problema: *«Con 14 pesetas se ha pagado a dos obreros. Sabiendo que uno gana los 3/4 del jornal del otro, determinar lo que corresponde a cada uno»*[289], propone una representación que satisface estas indicaciones (Figura 8.11, p. 608).

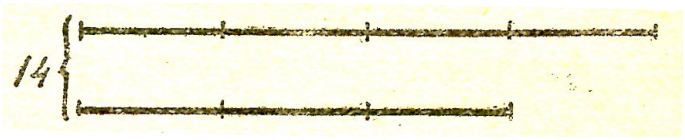


Figura 8.11: Charentón. Representación gráfica de un problema (1)

En su libro, Charentón pone también varios ejemplos en los que hace sobre una sola recta las construcciones auxiliares para hacer el croquis, y ejemplos en los que a partir de un mismo gráfico se podrían resolver problemas parecidos, por ejemplo, de tantos por ciento, de interés o de descuentos. Otras veces se proponen problemas en los que la representación gráfica no es una línea, sino una representación basada en áreas de rectángulos, donde la proporcionalidad del esquema no es ya tan importante[290] (Figura 8.12, p. 608).

«Se quiere mezclar 40 Kgs. de azúcar de 1,75 pesetas el Kg. con 20 Kgs. de otra clase, a 2,50 pesetas el Kg. ¿A cómo deberá venderse el Kg. de la mezcla?»

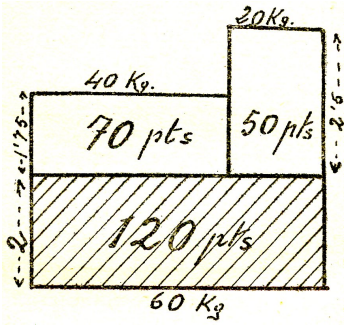


Figura 8.12: Charentón. Representación gráfica de un problema (2)

En todo caso, dado el carácter que atribuye a la representación gráfica, sugiere que no se siga una norma rígida:

[288]Ibídem, p. 48.
[289]Ibídem, p. 50.
[290]Ibídem, p. 57.

> Esta representación gráfica tiene un carácter subjetivo que depende de varios factores; con ella, lo que se pretende es hacer visible el problema para abordar la solución. Todos los recursos que al maestro se le ocurran pueden ser buenos con tal de que proporcionen la claridad que se busca; [...] Esta flexibilidad gráfica que dota al esquema de un cierto animismo, es lo que impide dictar una norma única[291].

Otra razón por la que recomienda representar gráficamente los problemas, es poner de manifiesto la analogía entre un problema y otros de estructura similar. Es consciente de la utilidad de la representación como recurso para la generalización, o sea, para resolver otros problemas similares. Como expresa Ortiz, «un diagrama posee importantes características intuitivas. Primero, ofrece una representación global, sinóptica de una estructura o un proceso y ello contribuye a la globalidad de su comprensión»[292].

No obstante, Charentón es consciente y así lo declara expresamente, de que las técnicas algebraicas unificarían estos problemas, aunque aquí lo que interesa es, por una parte, comprender el problema y su resolución y, por otra, resolverlos por técnicas exclusivamente aritméticas.

Por último, en el caso de los problemas de geometría, reconoce indispensable el gráfico «para encontrar las relaciones que puedan establecerse y sugerir el procedimiento para su resolución»[293]. Ahora es la estructura del problema la que determina la representación. Pero la finalidad que atribuye a la representación gráfica va más allá de ayudar a resolver un problema, o dotar al alumno de una técnica o método de resolverlo: «téngase en cuenta que un gráfico bien hecho, además de facilitar la solución, es una prueba de que se ha razonado conveniente y exactamente»[294].

[291] Ibídem, p. 54.

[292] Ortiz de Haro, Juan Jesús: *La probabilidad en los libros de texto*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, 2001, p. 237.

[293] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 58.

[294] Ibídem, p. 60.

La intuición y la resolución de problemas: Propuesta de Eyaralar[295]

En su obra *Didáctica de los problemas de aritmética y geometría*, Eyaralar distingue tres tipos de intuición: *real* (asociada a objetos), *figurada* (asociada a dibujos) y *representativa* (representación geométrica de cantidades).

La intuición real se refiere a situaciones extraídas de la realidad misma o a las que se presentan como tales al alumno; frecuentemente el autor las asocia con la manipulación de materiales físicos. Concedía gran importancia a la utilización de materiales concretos, y recogió y reelaboró muchos que podían utilizarse en la enseñanza de las matemáticas[296].

La intuición figurada se consigue por medio de imágenes, tales como láminas o dibujos que reflejan los objetos que intervienen en el problema y, a veces, las relaciones entre las magnitudes que intervienen; en estos casos lo habitual es que la representación gráfica sea un dibujo.

Por último, la intuición representativa, en la que *«se representan las cantidades por rectas, y aún mejor, por bandas, de longitud proporcional a las correspondientes cantidades»*[297]. En este último caso estamos ante una representación 'más matemática', en el sentido de más esquemática, más centrada en las relaciones de tipo matemático que en los objetos concretos.

No obstante, en sus obras incluye representaciones que no se encuadran claramente en esta clasificación, o más bien, que pueden ser incluidas en más de un apartado de acuerdo con los contextos en los que las sitúa Eyaralar[298].

Por ejemplo, para este problema: *«Un paquete tiene 30 cm. de largo, 20 cm. de ancho y 15 cm. de alto, ¿cuál es la manera de atarlo que exige menos bramante? (Póngase 10 cm. para el nudo)»*[299], aparece el siguiente dibujo:

Una interpretación ingenua podría hacer pensar que se trata de un dibujo del objeto que aparece en el problema (intuición figurada) cuyo objetivo

[295]La propuesta de Eyaralar ha sido estudiada en: Carrillo Gallego y Sánchez Jiménez, *Enseñanza intuitiva...*, op. cit.

[296]Véase apartado 7.2.4, pp. 467 y sig.

[297]Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 17.

[298]Eyaralar recomienda, incluso, «dibujar una escena sin que exprese relación matemática alguna», pues «dibujar un croquis o establecer gráficamente algunas relaciones [...] fija y aclara las ideas, sostiene la atención y hace agradable el trabajo». Ibídem, p. 41.

[299]Ibídem, p. 17.

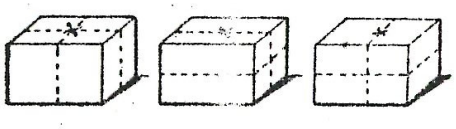


Figura 8.13: Eyaralar. Problema del paquete

es ayudar a entender el enunciado; pero es mucho más que eso. En este problema, la percepción espacial en primera instancia podría confundir a los niños, y una mirada detallada del dibujo permite observar que de cualquiera de las formas, el hilo pasará por las seis caras, concretamente por una de las paralelas medias en cuatro de ellas y por las dos paralelas medias en las dos caras opuestas restantes, y la clave está en observar que puesto que las caras no son cuadradas, la longitud de las dos paralelas medias es diferente y elegir la solución óptima.

En muchas ocasiones, la representación gráfica que aparece ligada a una situación o problema es una transcripción bastante directa de las manipulaciones físicas que se pueden realizar con materiales concretos para entender o resolver la situación. Por ejemplo, asociada al problema[300] *«Un vaso cuesta cuatro piezas pequeñas (20 ctm.) ¿Cuánto cuestan 3 vasos?»*, propone representar tanto los datos como la relación que los liga con el coste tal como se recoge en la figura 8.14 (p. 611).

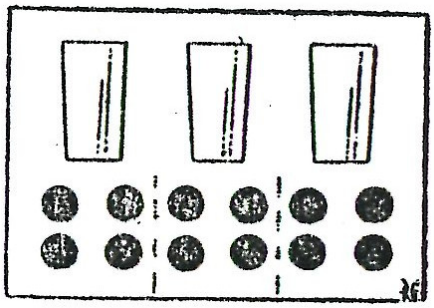


Figura 8.14: Eyaralar. Problema de los vasos

De hecho, una función que Eyaralar atribuye a la representación gráfica es la de evocar –o sustituir– las acciones con los materiales físicos. Un ejemplo

[300]Ibídem, pp. 16-17.

muy esclarecedor de ello lo encontramos en las dos versiones de una misma situación problemática que aparecen en su *Didáctica de los problemas de aritmética y geometría*: «Se entrega una cuerda a un grupo de niños y se les propone dividirla en tres partes, de modo que la mayor tenga 20 cm. más que la inmediata, y ésta 20 cm. más que la menor»[301] (figura 8.15, p. 612).

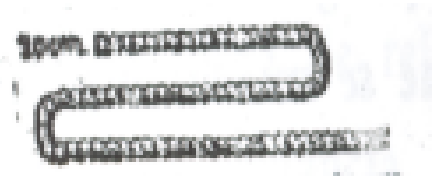


Figura 8.15: Eyaralar. Resolución de un problema doblando una cuerda

En este caso la figura induce el uso de material concreto[302]. Propone después un problema muy parecido, pero acompañado de una ilustración de características diferentes: «Dividir una cuerda de 180 cm. en tres partes, tales, que la mayor tenga 10 cm. más que la mediana, y ésta, 10 cm. más que la menor»[303].

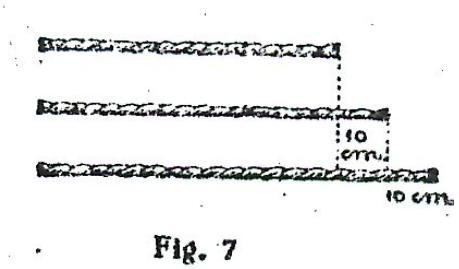


Figura 8.16: Eyaralar. Resolución de un problema

Observemos que en este caso no se refleja una manipulación sobre el material, sino que se trata de un dibujo ilustrativo (figura 8.16, p. 612) que se encuadraría en lo que Eyaralar llama 'intuición figurada'. No es del tipo

[301] Ibídem, p. 13.

[302] Una situación similar la podemos encontrar en Nelson, *Aritmética inventiva*, op. cit., p. 45, donde se sugiere usar la cinta de costurera para resolver algún problema sobre sumas y restas.

[303] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 17.

correspondiente a la 'intuición representativa', pues no se puede pedir que las dimensiones de las cuerdas dibujadas se correspondan con la solución del problema; dibujar la cuerda dividida en tres tramos proporcionales a las longitudes que representan supone, de hecho, conocer la solución del problema.

No siempre la diferencia entre representaciones que apelan a uno u otro tipo de intuición se perfila tan clara. Encontramos ejemplos en los que los dibujos representan un objeto material y se asocian por tanto, a la intuición figurada, y a la vez cumplen la condición impuesta a las representaciones matemáticas, como en el caso siguiente: *«El tablero del ajedrez es un cuadrado que tiene 8 casillas por cada lado. ¿Cuántas casillas más tendría si tuviese una más por cada lado?»*[304] (figura 8.17, p. 613).

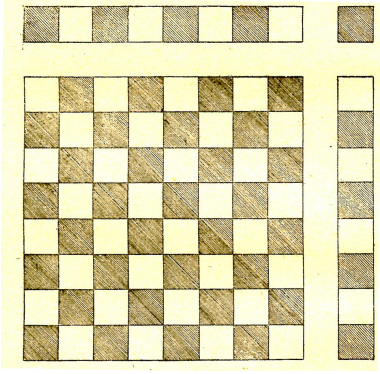


Figura 8.17: Eyaralar. Sucesión numérica con tablero de ajedrez

Aquí se toma como ejemplo el tablero de ajedrez para 'construir un modelo', en este caso, de la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos. La cuadrícula es la imagen de un tablero de ajedrez real y al mismo tiempo se respetan las proporciones, con lo que estamos ante una representación geométrica de una propiedad aritmética[305].

En el caso de los problemas de **Geometría**, la intuición está muy relacionada con la utilización de materiales (instrumentos de dibujo, materiales con

[304] Eyaralar Almazán, *Aritmética Intuitiva*, op. cit., p. 109. (También en Eyaralar Almazán, *Nuevo Tratado de Aritmética*, op. cit., p. 112).

[305] En realidad es un problema teórico, el de hallar la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos, propuesto como un problema práctico. Por ello no es de extrañar que la representación gráfica responda a una intuición figurada y a la vez representativa, en la terminología de Eyaralar.

los que reproducir figuras o elementos de ellas, figuras o cuerpos elaborados con material...), que ya hemos tratado en el capítulo anterior, y también de otros recursos gráficos, como los *croquis a escala*, susceptibles de satisfacer dos funciones, servir a la intuición y determinar gráficamente elementos del problema o incluso la solución mediante su medida en el plano (funciones *representativa* e *instrumental* de la representación gráfica), y las *proyecciones* de una figura, la planta y el alzado. En el libro que estudiamos pone varios ejemplos de ello.

8.3.3.3. El método de análisis-síntesis

Los dos autores anteriores proporcionan un esquema estructurado para trabajar la resolución de problemas en las clases de matemáticas, en parte inspirado en un patrón clásico, pero con interesantes indicaciones didácticas. El esquema de Análisis-Síntesis propuesto es en efecto un patrón clásico[306], que proporciona un procedimiento de resolución constructivo. En él se admite que la solución del problema existe y se puede obtener, y a partir de ella vamos derivando de manera sucesiva otras incógnitas, asumiendo que son también posibles de obtener; si llegamos por este proceso a algo conocido y obtenible –es decir, un dato–, en ese caso el valor de la incógnita se podrá obtener mediante un proceso inverso, paso a paso, a partir de los datos; este proceso inverso al análisis es lo que se llama síntesis[307].

El método de análisis-síntesis: Propuesta de Charentón

Charentón expresa con sencillez en qué consiste el *análisis*: «Analizar un problema es, pues, descomponerlo en una serie de relaciones o problemas primarios y sencillos que permitan calcular la respuesta»[308]; y la *síntesis*, a la que también denomina *solución*: «encontrar el valor de la incógnita

[306]Realmente los objetos a los que se puede aplicar este patrón clásico no son forzosamente cantidades de una cierta magnitud, sino que pueden ser figuras, proposiciones o cualquier otro objeto matemático.

[307]El esquema de Análisis-Síntesis ha sido estudiado por Josep Gascón: Gascón Pérez, Josep: «Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1993, **13(3)**, pp. 295–332.

[308]Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 37.

por una marcha inversa a la que hemos seguido, es decir, empezando por la última relación hasta llegar a la primera, sustituyendo los valores que se vayan encontrando en sus respectivos lugares»[309].

El esquema de resolución que describe queda pues, estructurado en cuatro partes: *datos, análisis, solución* y *operaciones.*

Hay que tener en cuenta el contexto histórico, pues se trata de una época en la que el estudio del álgebra no estaba generalizado, pues no era un contenido de la escuela primaria, y de ahí la importancia de dotar a los alumnos de técnicas aritméticas para la resolución de los problemas, por más que éstas se nos figuren costosas desde la perspectiva actual. De hecho hace una advertencia importante acerca de la aparente facilidad a la hora de aplicar este método: «El análisis puede intentarse partiendo de varias relaciones iniciales, todas ellas exactas; pero no todos los desarrollos analíticos que de éstas se derivan son admisibles»[310] y proporciona varios ejemplos en los que se pone esto último de manifiesto[311].

Charentón propone, además de la disposición clásica, lineal, para hacer el análisis del problema, otra más esquemática, en forma de árbol:

> *«Un obrero trabaja 23 días cada mes. Gasta 174 pesetas al trimestre, lo que le permite ahorrar 339 pesetas al año. ¿Cuál es su jornal diario?»*[312] (figura 8.18, p. 616).

Al hablar de la intuición hemos considerado las representaciones gráficas como una ayuda para la resolución de problemas, con un carácter, por tanto, de modelos heurísticos, una estructura soporte de las relaciones que a la vez permite representar los elementos del problema. El esquema que vemos aquí no es un dibujo, sino un diagrama que ha de servir de ayuda para construir de forma estructurada el esquema analítico que lleve a la solución del problema. En el capítulo III proporciona también un esquema analítico

[309] Ibídem, p. 43.

[310] Ibídem, p. 40.

[311] También Eyaralar hace una observación similar. Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 43.

[312] Charentón, *Metodología...*, op. cit., p. 44. Las palabras «Síntesis o» que aparecen a la izquierda de «SOLUCIÓN» fueron añadidas por algunos de los anteriores propietarios del libro.

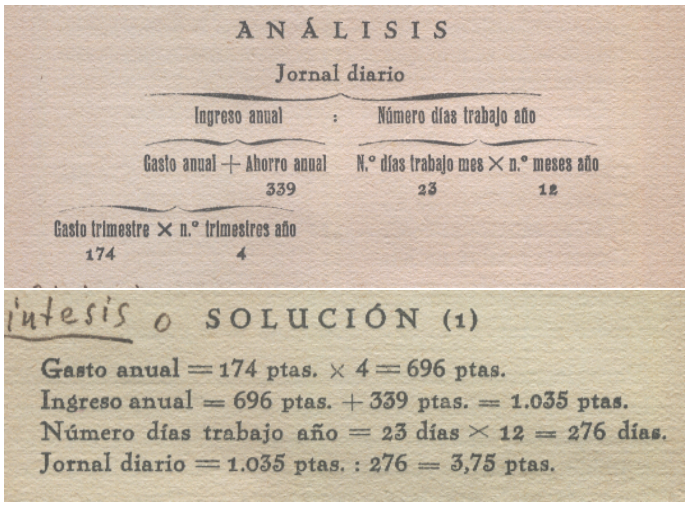


Figura 8.18: Charentón. Método de análisis-síntesis

que ayuda a construir un enunciado a partir de las operaciones que resuelven el problema[313].

El método de análisis-síntesis: Propuesta de Eyaralar

Los textos de otros profesores de Escuelas Normales contemporáneos también recogen esta técnica matemática, entre ellos la *Metodología* de José María Eyaralar, que propone un esquema de resolución de problemas estructurado en fases similares.

Sin embargo, mientras que Charentón defiende este método que, aunque laborioso, considera educativo, Eyaralar no es partidario de seguir rígidamente el esquema de análisis-síntesis. Lo considera más bien un buen método para que el alumno refleje todo el trabajo realizado, el razonamiento seguido, y también para *comunicar* todo este proceso:

> Se ha de procurar la exposición clara, metódica y completa de las operaciones que es preciso hacer para obtener el resultado, de manera que puedan fácilmente seguirse por otra persona.
>
> Todas las operaciones deben justificarse. Para ello es conveniente seguir durante algún tiempo el *método analítico-sintético*, hasta que la síntesis o exposición pueda hacerse fácilmente[314].

[313] Ibídem, pp. 28-29.

[314] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 16.

Posteriormente insiste en ello. En su obra de resolución de problemas de 1936, en el apartado dedicado al análisis del problema, explica en qué consiste dicho análisis y pone un ejemplo, pero a continuación hace una observación, en el sentido de que a los alumnos les resulta penoso ese esfuerzo metódico, que además considera inútil. Lo ejemplifica con un problema propuesto en el examen para la obtención del Certificado de Estudios Primarios en Francia. Propone pues no ajustarse a dicho esquema y hallar la solución directamente «reservando la solución analítica para problemas y lecciones especiales, como ejercicio metódico de inteligencia, y en aquellos casos en que falla el procedimiento de tantear las relaciones; y la aplicaríamos solamente desde el cuarto año escolar en adelante»[315]. Observa, igual que Charentón, que cualquier proceso analítico no permite hallar la solución y a veces hay que comenzar de nuevo el análisis.

Lo que sí le reconoce al análisis es la facultad de proporcionar de forma ordenada, y con una exposición clara, la solución del problema: «la claridad de la exposición que la *solución* proporciona, y que compensa el esfuerzo hecho en el análisis»[316]. Aunque, en todo caso, considera más *real* y de hecho aconseja exponer la solución expresando a un lado las relaciones y resultados que se vayan obteniendo, de manera justificada, y al otro lado las operaciones con la comprobación de los cálculos, y finalmente destacar la respuesta.

Sáiz Salvat no se muestra tampoco partidario del esquema clásico:

> A las fases *resolución* llaman algunos autores *síntesis o planteo* y la hacen preceder de otra llamada *análisis* o razonamiento en la que anotan todas las relaciones parciales que llevan a la síntesis. Es una orientación que puede admirarse aunque nos inclinamos a la que hemos seguido nosotros por ser más *breve y sencilla* que son cualidades que llevan a la elegancia matemática cuando las acompaña la *claridad* de expresión[317].

La mayoría de los autores que escriben trabajos sobre la resolución de problemas se refieren a problemas aritméticos, y a esa clase pertenecen todos

[315] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 43.
[316] Ibídem, p. 44.
[317] Sáiz Salvat, *Arte de Estudiar...*, op. cit., p. 118.

los ejemplos que ponen (salvo quizá algún problema de medida, que se resuelve utilizando las fórmulas habituales, por métodos aritméticos). Paunero se refiere a esta situación, señalando que en las escuelas españolas solo se hacen problemas de aritmética y en geometría se proponen si acaso ejercicios o problemas de medida (aritmético-geométricos). También Eyaralar insiste en la necesidad de dar más presencia en todos los niveles de enseñanza, en particular en la enseñanza primaria, a los problemas de geometría, que son más variados que los de aritmética y menos abstractos, por poder presentar los datos e incógnitas más visibles gracias a las figuras. A los problemas planteados en geometría que tratan de cuestiones de medida los califica de aritméticos.

Considera que el estudio de las formas y de su extensión se realiza de modo analítico, que en este caso consiste en descomponer las formas en otras más simples, para hacer después la síntesis, con la construcción de la forma. Este proceso equivale a una serie de problemas sucesivos, en los que se comienza por el estudio de los cuerpos en el espacio para pasar luego al estudio de sus componentes en el plano y volver a completar su estudio en el espacio.

Para los problemas geométricos, salvo para algunos tipos de problemas especiales, como los relativos a *lugares geométricos*, considera innecesario todo esquema de resolución general; en este caso el análisis se reduce a estudiar en el croquis la relación entre datos e incógnitas y la síntesis al ajuste metódico de los datos en la construcción posible. Para escribir la solución basta casi siempre con detallar de forma esquemática y ordenada las operaciones efectuadas. Esto puede verse beneficiado por un dibujo en que los datos y las incógnitas se expresen adecuadamente, siguiendo los convenios habituales para ello (grosor de los trazos, letras mayúsculas o minúsculas, datos numéricos que representen la medida de ciertos elementos, etc.). Como en este ejemplo de construcción: *«Trapecio isósceles: b = 4 cm.; b' = 2 cm.; h = 2 cm.»*[318] cuya resolución escribe así[319]:

> *Observación:* si suponemos la altura trazada por el punto medio de una base, pasará también por el punto medio de la otra.

[318] Hace referencia a las figuras que hay a continuación (figura 8.19, p. 619), la primera es el *croquis* y la segunda la *figura reducida*.

[319] Eyaralar Almazán, *Didáctica de los problemas...*, op. cit., p. 112.

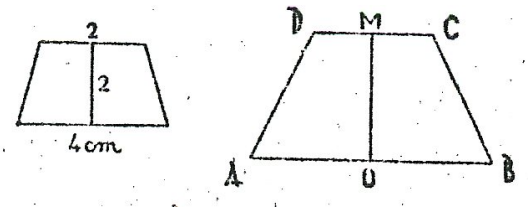


Figura 8.19: Eyaralar. Resolución de un problema geométrico

Construcción: a) Dos perpendiculares indefinidas.
b) OA = OB = 2 cm., OM = 2 cm.
c) Por M una paralela a AB.
d) MC = MD = 1 cm.
e) Unir D con A, y B con C.

Por último, estudia como problemas *especiales* los *lugares geométricos*, los problemas *sobre el terreno*, algunos problemas derivados del poliedro denominado *prismatoide* y las series de problemas alrededor de un *centro de interés*, a los que nos hemos referido en capítulos anteriores.

8.3.3.4. La comprobación de la solución

Los esquemas, más o menos sistematizados, que se proponen para comprender y resolver un problema en general acaban incluyendo la *comprobación* de los resultados o de la solución, o en todo caso se insiste en la conveniencia de esta comprobación al acabar el proceso.

Hemos comentado que Sáiz Salvat, por ejemplo, incluye la 'comprobación' explícitamente a continuación de la *construcción gráfica* y Eyaralar lo hace antes de ésta en su *Metodología*. En el libro de 1936 viene incluida como parte del epígrafe dedicado a la solución y hace algunas observaciones sobre la comprobación del problema en otros epígrafes.

Además de declarar la importancia de comprobar las soluciones, propone formas de hacerlo: hacer el problema por otro procedimiento, para los problemas sencillos (aunque reconoce que esto no es siempre posible); rehacer el problema tomando ahora como dato la incógnita calculada y plantear el problema inverso; o bien, y en esto es en lo que más insiste, calcular una solución aproximada, para contrastarla con la obtenida, ya que a veces resolver

de nuevo el problema, eligiendo una incógnita diferente, puede ser artificioso y tan complicado como el problema en sí.

Lo que realmente considera interesante es calcular una solución aproximada 'a priori', ya que permitirá conocer después si la solución obtenida es razonable o no pero, sobre todo, orienta sobre cómo resolver el problema, ya que habremos tenido que hacernos idea de las relaciones entre las magnitudes que intervienen.

> Así, por ejemplo, si se nos pide *averiguar la capacidad de un depósito cilíndrico* de 4,60 m de radio y 8,5 m de altura. Sustituiremos el círculo por un cuadrado de 9 m de lado y obtendremos como volumen aproximado $9^2 x 8,50 = 81 x 8,50 \sim 688 m^{3}$[320]. Una cantidad que difiera considerablemente de esa no puede ser solución[321].

Para el caso de los problemas de geometría, expresar el valor numérico de los datos en un croquis a escala permite comprobar la solución midiendo realmente en el croquis. Además de ayudar a interiorizar el tamaño de las magnitudes, ahora este procedimiento de resolver problemas lo presenta también como un modo de demostrar, de forma *pragmática*, que la solución obtenida de otra forma es correcta.

[320] El signo de equivalencia no es ese sino el que él inventó y que hemos recogido en la figura 3.22, p. 212.

[321] Eyaralar Almazán, *Metodología...*, op. cit., p. 379.

Síntesis y reflexiones finales

Llegados al final de esta investigación presentamos unas reflexiones finales destacando algunos aspectos, la mayoría comentados en las distintas partes del trabajo, aunque también los hay que suponen una reflexión nueva –apenas apuntada antes– sobre el sentido de nuestro estudio. No nos proponemos hacer una síntesis de lo escrito hasta ahora, sino más bien, hacer balance desde una perspectiva reposada del análisis que hemos llevado a cabo.

Pero antes nos referiremos a decisiones, adelantadas en el primer capítulo, que queremos explicar apoyándonos en la perspectiva que da el trabajo realizado.

El periodo elegido para nuestra investigación –poco más de dos décadas– no es muy extenso, pero sí intenso. Nos hemos centrado, prácticamente, en la década que precede a la II República y en el periodo republicano. La Junta para Ampliación de Estudios y la Escuela Superior del Magisterio se crean a finales de la primera década del siglo XX; la primera promoción de profesores de Escuela Normal que habían estudiado en este último centro acaba en 1912 y el plan Bergamín para las Escuelas Normales, que estará vigente hasta 1931, es de 1914. No obstante, las principales aportaciones de los profesores protagonistas de este estudio se producen en los años veinte del pasado siglo. Las revistas profesionales más relevantes que estudiamos son la *Revista de Pedagogía*, órgano de la Escuela Nueva, comienza a editarse en 1922 y continúa hasta 1936, y la *Revista de Escuelas Normales* –que contiene la mayor parte de las aportaciones de los profesores normalistas a la educación matemática– y se publica de 1923 hasta 1936 (en 1922 se denominaba *Boletín de Escuelas Normales*).

La estructura de la memoria realizada responde al deseo de analizar cuál fue realmente la contribución de un grupo de profesores de Escuela Normal

a la renovación en la enseñanza de la matemática y a la formación inicial, matemática y didáctica, de los maestros, *en tanto que aportación de un colectivo de personas y no solo como suma de aportaciones individuales*. No nos ha interesado solo 'describir' de forma sucesiva las diferentes propuestas, sino más bien identificar aspectos comunes en ellas, así como las diferencias, que lo mismo podían provenir de su diferente formación que de las influencias recibidas; en definitiva, de la epistemología de cada uno de los protagonistas. También busca poner de manifiesto la influencia, sobre las prácticas matemáticas propuestas, de la ideología pedagógica y de los modelos epistemológicos de las matemáticas existentes en aquel momento en la institución de formación de maestros.

Por ello, el principal criterio para determinar la representatividad de los libros de matemáticas y de metodología de la matemática no está determinado, tal y como aclaramos en el capítulo 1 al comentar las fuentes de la investigación, por el número de ediciones o por su difusión. Somos conscientes de que las propuestas más renovadoras, en cada época, son asumidas al principio por una minoría de docentes y de que la mayor o menor difusión de unas obras u otras depende de factores diversos.

La primera de las cuestiones que se formulan en el capítulo 1 es asimismo la *cuestión general* a la que se ha propuesto responder esta Memoria:

Q_1 **¿Qué aportaciones realizaron los profesores de Escuelas Normales al proceso de innovación educativa, en lo que se refiere a la formación matemático-didáctica de los maestros?**

La respuesta requiere a su vez respuestas a cuestiones relacionadas:

Q_2 **¿Qué características tuvieron sus propuestas innovadoras en matemáticas? ¿Algunas de esas características son específicas de las matemáticas?**

Q_3 **¿Qué propuestas realizaron para la innovación en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria?**

Las propuestas renovadoras en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la formación de los maestros y en la escuela primaria guardan relación con las nuevas corrientes pedagógicas que se estaban desarrollando en el primer tercio del siglo XX, en particular en España. La relevancia que se concede a la *intuición*, hace que se busquen métodos activos, que se conceda importancia a los métodos experimentales, a la acción, a la relación de las matemáticas con la vida cotidiana, etc. El modelo pedagógico de la Escuela Nueva es el marco en el que se originan las nuevas propuestas sobre la enseñanza de la matemática.

El niño pasa a ser el centro del interés y para hacer la enseñanza grata, activa –uno de los principios de la Institución Libre de Enseñanza–, se ponen en marcha nuevos métodos y nuevos dispositivos, algunos no exclusivos de la matemática, que hemos analizado viendo cómo los adaptaron los profesores normalistas a sus propuestas de enseñanza. Entre los dispositivos y métodos introducidos estaban, por un lado, los métodos de la Escuela Nueva (Decroly, Mackinder, método de proyectos...), la mayoría importados de fuera de nuestro país y conocidos a través de las traducciones de libros extranjeros, en principio, y luego de obras escritas en España.

Muchos de los protagonistas de las reformas habían conocido instituciones educativas en otros países, pensionados por la Junta para Ampliación de Estudios, y habían difundido los métodos y las ideas que vieron poner en práctica. En general, asumieron los principios de la Escuela Nueva de una forma crítica, adaptándolos a las características de las matemáticas. Una cultura compartida, basada en las ideas pedagógicas de la 'nueva educación', en los estudios realizados en la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio, en la perspectiva adquirida al tener la oportunidad de observar otros sistemas de enseñanza y en las propuestas plasmadas en obras extranjeras, delimitan la relación institucional con la matemática; esto es, el sentido que tiene ésta en cada institución, la de formación de maestros o la escuela primaria.

La importancia concedida a la intuición se observa en los tipos de tareas y en las técnicas que figuran en los libros sobre Aritmética y Geometría, pero también en los de Metodología de la Matemática, en donde se exponen las *técnicas didácticas* pero también las *tecnologías didácticas* subyacentes.

Razones epistemológicas llevan a no promover la intuición a expensas del razonamiento, sino justamente lo contrario. Hallamos signos de ello en la Aritmética: relación entre las operaciones aritméticas y sus inversas; iniciación a las operaciones a la vez que se introducen los números, partiendo de las situaciones que modelizan; utilización de las representaciones gráficas con un doble sentido, instrumental pero también representativo; uso de los símbolos no solo como medio de abreviar la escritura, sino como instrumento para la generalización, que permite modelizar no ya problemas aislados, sino tipos de problemas..., son solo algunos ejemplos.

Una muestra de la importancia que se concede a una enseñanza razonada de la matemática la tenemos en los dispositivos para el cálculo, que son la mayoría de las veces dispositivos para el razonamiento, con un adecuado manejo de las *variables didácticas*. Es el caso de los dispositivos (juegos, materiales, y otros) para automatizar las combinaciones numéricas básicas y poner en juego a la vez las propiedades de las operaciones. El llamado 'cálculo rápido', o cálculo que podía ser escrito pero sin emplear los algoritmos tradicionales, formaba parte a veces de una técnica didáctica consistente en generalizar resultados particulares para obtener reglas de cálculo rápido.

El análisis de la enseñanza de los algoritmos nos ha permitido observar la influencia de la *institución* –para la formación de maestros o la escuela primaria– en la función asignada al estudio de las técnicas de cálculo. Comparando las propuestas para ambos niveles, vemos que en la institución Escuela Normal el estatus de las técnicas de cálculo no es el de un instrumento práctico para el cálculo, sino el de un objeto de aprendizaje; se analizan y se comparan las técnicas con criterios de aplicabilidad, economía, etc.; el objetivo se desplaza y lo que interesa es poner de manifiesto o hacer intervenir las propiedades de las operaciones. El análisis de técnicas matemáticas de cálculo no algorítmico, es una *técnica didáctica* que tiene a su vez, respecto al sistema de numeración y a las operaciones, una *función tecnológica*. Este análisis matemático tiene a su vez una finalidad didáctica: la reflexión sobre la planificación de la enseñanza de los algoritmos en la escuela primaria.

La influencia de los principios de la Escuela Nueva en la Geometría se refleja en las propuestas de una enseñanza integrada de la geometría y la

aritmética, incluso con otras materias, como la geografía, por ejemplo. Los profesores que representan la renovación metodológica critican la enseñanza geométrica clásica, que reduce los problemas de geometría a los de cálculo de medidas de área o de volumen con fórmulas, lo que en la práctica supone reducirlos a cálculos. En el tratamiento que hacen de las áreas se pueden distinguir varios *'momentos'* del estudio, incluido el de ampliar las técnicas a nuevos problemas. Nuevamente, al igual que ocurría con la aritmética, se utiliza la técnica didáctica de proporcionar a los alumnos conocimientos matemáticos (volumen del 'prismatoide', ver p. 562) que, respecto al cálculo de ciertos volúmenes, tienen una función tecnológica.

Frente a una geometría estática, quienes representan las propuestas más renovadoras pero, sobre todo, más reflexivas, son partidarios de una orientación más acorde con las nuevas tendencias en Matemáticas, que se traducen en unas propuestas más dinámicas, en las que el movimiento es un elemento esencial. En este sentido, la obra de Eyaralar, de 1924, al igual que el libro que escriben cuatro años más tarde Rey Pastor y Puig Adam, son ejemplos de cómo el uso de los movimientos (isometrías) permite otro tipo de validaciones y promueve otros razonamientos.

La relación con la vida o la educación del sentido estético son otros de los principios que guían el tratamiento de la geometría, sin olvidar la acción. Frente a una geometría deductiva, abogan por los métodos experimentales. Pero se perciben diferencias entre unos y otros autores, en parte debidas a sus diferentes concepciones de la geometría y en parte por la institución a la que se dirigen con sus planteamientos: escuela primaria, escuela secundaria o formación de maestros. Ha resultado interesante comparar las propuestas con relación al dibujo geométrico.

Hemos comparado el papel de las construcciones clásicas con regla y compás en una propuesta más formalista, y en otras con un planteamiento más intuitivo de la enseñanza de las matemáticas, y cómo se utilizaban en estas últimas diversos instrumentos de dibujo para plantear y resolver problemas, más allá de las restricciones impuestas por la geometría deductiva clásica. Igual que ocurre, en general, con el uso de materiales manipulativos, los instrumentos disponibles o permitidos van asociados a las técnicas utilizables, las cuales determinan el tipo de validación posible; los instrumentos de dibujo, como los materiales, actúan así como *variables didácticas*, que impiden o

dificultan el uso de ciertas técnicas matemáticas, a la vez que favorecen otras, determinando de este modo el conocimiento matemático que interviene o que es necesario poner en juego.

En cuanto al Álgebra, no obstante el modelo epistemológico del álgebra dominante en aquel momento, las ideas de la Escuela Nueva se traducen en cambios de matiz en cuanto a la relación con la aritmética y en un planteamiento de los problemas –por ejemplo, los de proporcionalidad– más cercano a las funciones, en contra de un tratamiento del álgebra centrado exclusivamente en las técnicas algebraicas y en el planteamiento y la resolución de ecuaciones.

El interés por una matemática en la que la intuición esté al servicio del razonamiento afecta a la función de las definiciones y las validaciones y a los procesos de definir y demostrar. Se compromete al alumno o a la clase en la tarea de definir, lo que conlleva que las definiciones tienen durante un cierto tiempo carácter de provisionalidad y no comparten los atributos de minimalidad y economía de las definiciones matemáticas. La técnica didáctica consiste en ir completando las definiciones, afinándolas, mediante preguntas o contraejemplos que muestren la insuficiencia de las definiciones previas, a la vez que no solo se observan las propiedades, sino que se hacen intervenir en la definición con carácter de necesidad. No se confunde intuición con falta de precisión y se tiene en cuenta la institución; así, mientras en el nivel de primaria predominan las funciones de designación y de comunicación, con alumnos normalistas la definición ha de servir a la función de prueba y de sistematización; se establece así una dialéctica entre definición y propiedades y se enfatiza el aspecto operativo de la definición en una prueba.

El recurso a la intuición afecta igualmente a las técnicas de validación; las demostraciones intuitivas, 'no matemáticas', sirven a las funciones explicativa y de descubrimiento, tanto o más importantes en ese momento que la de verificación. Estos profesores tienen clara la diferencia entre una enseñanza *racional*, que defienden, y una enseñanza *formal*, así como que el rigor es relativo a una institución (también a una época). Conscientes de los riesgos de las técnicas no rigurosas (ejemplos genéricos, pruebas pragmáticas...) proponen estas técnicas en la formación de maestros, unas veces por la no disponibilidad, por parte de los alumnos, de los conocimientos que requeriría

una prueba matemática, y otras por razones didácticas, cuando la función de explicación prima sobre la de verificación. Un ejemplo lo encontramos en el uso de materiales concretos como recurso para la validación, elemento que no solo afecta a la posibilidad de experimentar o verificar propiedades, o poner a prueba la validez de algunas técnicas, sino igualmente a los elementos tecnológico-teóricos que se movilizan.

En la resolución de problemas intervienen las ramas de la matemática, los recursos y los procesos mencionados, por lo que es un indicador para determinar la influencia de los principios de la Escuela Nueva, la reelaboración que se hizo desde la matemática de esos principios y la epistemología de la matemática que la apoyaba. El rechazo del formalismo innecesario y la rutina, así como la apuesta declarada por que los problemas –como la escuela– preparen para la vida, guía en este caso la praxis didáctica. La diferencia con las propuestas más clásicas la marca también la importancia concedida a la 'invención' de problemas, que estos autores asocian a la 'investigación'; en particular, se consideran problemas: las tareas demostrativas; la búsqueda de relaciones y la formulación de leyes generales a partir de la experimentación o la comprobación de casos particulares; los problemas asociados a la definición de conceptos. Al mismo tiempo, se emplean dispositivos relacionados con la resolución de series de problemas, incluso abogan por dispositivos, como los concursos de problemas o el método de proyectos, con la finalidad de hacer la enseñanza placentera y alentar el interés de los alumnos.

Para la resolución se fomenta el procedimiento gráfico, que a la vez cumple la función de servir de instrumento auxiliar para favorecer la intuición, y el 'cambio de marco' (ver p. 304, pie de página 189). Asimismo, es importante destacar que en las propuestas formuladas respecto a la resolución de problemas se observa la presencia –en mayor o menor medida– de todos los *momentos didácticos*, incluidos el de la exploración de tareas y emergencia de técnicas y el de la construcción del bloque tecnológico-teórico.

Otra de las cuestiones planteadas al comienzo de este trabajo se refiere a los instrumentos metodológicos empleados:

Q_4 **¿Qué análisis de los procesos de estudio matemático, desarrollados en el pasado, permite la aplicación de las herramientas de la TAD? ¿Cómo influyen las fuentes de que se dispone?**

Las teorías de investigación actuales en Didáctica de la Matemática –junto con las de Historia de la Educación– proporcionan herramientas para investigar sobre la historia de las disciplinas, en este caso la nuestra. Concretamente, la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) ha resultado útil para estudiar las organizaciones matemáticas y también las organizaciones didácticas en las propuestas renovadoras para la formación matemática y didáctica de los futuros maestros, en un cierto momento histórico.

Situamos nuestro análisis en un intervalo temporal pasado, pero los instrumentos con los que lo analizamos son actuales, como también lo son los interrogantes que nos planteamos. Éstos van íntimamente ligados al marco teórico desde el que se realiza el estudio, pues es precisamente dicho marco el que, no solamente nos ayuda a hallar las respuestas, sino que nos sugiere las preguntas. Nos fijamos en planteamientos y propuestas de ayer, pero esto no tendría sentido si con ello no podemos responder a las cuestiones que nos inquietan hoy. Ignorar las ideas, las corrientes de pensamiento, las costumbres del pasado, haría ilegítimas las conclusiones a las que llegáramos; ignorar los intereses, las cuestiones que preocupan en el presente, las haría estériles.

En efecto, hemos estudiado aspectos de la enseñanza de la aritmética, la geometría y el álgebra en la formación de maestros –y para ello también nos hemos ocupado de las propuestas para la enseñanza primaria, íntimamente relacionadas con las anteriores–. La noción de *praxeología* ha hecho posible un análisis que no se limita a la mera descripción de los contenidos, métodos y actividades y a la relación entre ellos. Se ha procurado determinar si existían y cuáles eran las razones de ser de los conocimientos, hemos intentado identificar los tipos de tareas propuestas, diferenciar las distintas técnicas -cuando las había- para realizar un tipo de tareas, las propiedades a las que van ligadas, y la función de las tecnologías de las técnicas. Al mismo tiempo hemos ido estableciendo relaciones entre las praxeologías matemáticas y las praxeologías didácticas correspondientes. El marco teórico elegido ha resultado una herramienta potente para analizar, en el capítulo 8, los *procesos* de definición, validación y resolución de problemas, análisis que complementa el realizado sobre la enseñanza de las diferentes asignaturas de matemáticas, y que permite conocer aspectos de las propuestas de enseñanza y de la epistemología subyacente que de otro modo no se harían tan evidentes.

Analizar una praxeología didáctica es analizar la manera en la que están o no presentes los diferentes 'momentos' del estudio. Ello ha permitido explicar el tratamiento que recibían algunas técnicas en las propuestas para la escuela primaria o la Escuela Normal. Mientras en aquélla el acento puede estar en las tareas a partir de las cuales construir las técnicas, en la formación de maestros, conocidas las técnicas, lo que importa es la reflexión tecnológico-teórica sobre ellas, que informe sobre las propiedades involucradas, y permita compararlas según su pertinencia en cada contexto o problema, los límites de uso...

Las técnicas y las tecnologías didácticas se traducen en *dispositivos* acompañados de *gestos*. Aunque no solo en ellos, en los capítulos 6 y 7 analizamos varios dispositivos; las herramientas de la TAD nos han permitido aportar algunos elementos de respuesta a cuestiones como estas: ¿Cómo se gestionan algunos dispositivos, materiales o de otra naturaleza (juego, método de proyectos, prácticas de la asignatura Metodología de la Matemática, etc.)? ¿Qué técnicas se reconocen/identifican? ¿Cuál es la *economía didáctica* del dispositivo?

Hemos Usado las herramientas de la TAD para analizar el dispositivo 'lección' en la Escuela Normal y en la escuela primaria, así como los dispositivos asociados. Aun tratándose de una investigación histórica, y como tal no podemos pretender que los dispositivos de enseñanza se hubiesen diseñado respondiendo a marcos teóricos que se han desarrollado posteriormente, estos marcos, no obstante, se han revelado útiles para nuestro análisis. Así, la teoría de los *momentos didácticos* nos ha permitido una mejor descripción de la estructura y de los elementos asociados a la lección, al reconocer elementos de estos 'momentos' en las fases del dispositivo y en los *gestos* que llevan asociadas. En particular tratamos de identificar qué tecnologías didácticas están en la base de las técnicas didácticas observadas –una técnica a su vez permite realizar un cierto tipo de tareas didácticas– y cómo contribuyen los dispositivos analizados a hacerlas posible. Hemos descrito qué *funciones* cumplía cada uno de estos dispositivos y gestos, identificando cuáles son las tareas que estas técnicas permitían abordar. En el caso de la asignatura Metodología de la Matemática, el marco teórico que proporciona la TAD nos ha permitido analizar las prácticas de dicha asignatura, extrayendo las *cuestiones* a las que se propone responder el dispositivo descrito sobre todo por

Eyaralar, articuladas en torno a cómo organizar dichas prácticas para articularlas con la teoría, en el caso de los alumnos normalistas, y qué dispositivos de formación permiten conseguirlo.

En el capítulo siguiente nuevamente el marco teórico que proporciona la TAD nos ha permitido estudiar dispositivos para el estudio de las matemáticas, sobre todo en la escuela primaria. Para ello, hemos adoptado –como en el resto de este trabajo– un punto de vista *'ecológico'*, que se caracteriza por considerar, junto a los problemas específicos del estudio de una organización matemática, los aspectos más genéricos de la organización del estudio, las elecciones didácticas, a veces inconscientes, hechas en niveles menos específicos, como el nivel pedagógico o incluso político.

Así lo hemos hecho con dispositivos de formación como, por ejemplo, el *método de proyectos*, una propuesta metodológica que, en consonancia con las ideas de la Escuela Nueva, proponía cambios en la gestión del aula y el desarrollo del currículo, método que, durante la Segunda República, repercutió en la formación inicial de los maestros.

Hemos recogido las críticas realizadas al método de proyectos, relacionadas con la manera de concebir la *función de la escuela* en la sociedad, y también con la manera en la que se interpretan sus principios, así como algunas realizaciones y la necesidad de verdaderos ensayos, teniendo en cuenta las condiciones 'ecológicas' que acompañan su puesta en práctica.

La noción de *recorrido de estudio e investigación* (REI) la hemos tomado como referente para analizar el proceso de estudio asociado al método de proyectos y determinar los cambios reales que supone este método para la enseñanza de las matemáticas. Con ello hemos mostrado un ejemplo de lo que sucede cuando las innovaciones en el modelo pedagógico y en el modelo docente no van acompañadas de cambios en el modelo epistemológico de las matemáticas. La consecuencia es que las innovaciones pedagógicas en los ambientes renovadores a veces no tienen mucha relación con verdaderas innovaciones en matemáticas, se intentan superar las restricciones del modelo clásico anterior, pero se trata de un modelo pedagógico generalista, que no cuestiona –ni modifica– el modelo epistemológico de las matemáticas.

La utilización de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en un estudio de historia de la educación matemática está muy condicionada por las fuentes primarias disponibles, que están determinadas de antemano. No pueden ampliarse generando experiencias docentes diseñadas ex profeso ni tampoco diseñar medios de recabar información directa de los protagonistas, profesores o alumnos, tal como se hace en muchas investigaciones relacionadas con la didáctica de las matemáticas. A pesar de esas limitaciones, la TAD ha mostrado ser una herramienta útil para el análisis de las praxeologías matemáticas y didácticas presentes en otros momentos históricos.

Hemos utilizado fuentes impresas (se describen en el primer capítulo), entre ellas artículos en revistas profesionales –en las que los autores intentan explicitar sus ideas y planteamientos– y libros. Los libros no tienen la frescura, la emoción de los testimonios, pero también, por esta misma razón, permiten un análisis más objetivo de lo que efectivamente se podía hacer y lo que no, más allá de las intenciones declaradas (en las que se tienden a generalizar las experiencias particulares) de legisladores, expertos e incluso los mismos profesores. El propio Eyaralar, refiriéndose a la geometría que observó que se enseñaba en las escuelas primarias superiores francesas, reconoce:

> Nos encontramos con un texto que es muy superior al trabajo de clase, no obstante ser el profesor uno de los autores, evidenciando la dificultad de adaptar la teoría a la práctica, bien por hábitos propios, bien por no chocar con el medio, debiendo adaptarse a los métodos de los futuros examinadores[1].

El hecho de que nos hayamos planteado el análisis de aspectos que van más allá de 'describir' la matemática tratada, muestra que a veces lo que se hacía contradice no solo lo que dicen las leyes, programas o incluso las opiniones de los expertos de la época, sino incluso lo que el propio autor pretende hacer. Esto se observa en alguna ocasión contrastando las obras de metodología con los libros escritos para los maestros o los alumnos de la escuela primaria.

[1] Eyaralar Almazán, José María: «La enseñanza de las Matemáticas en las escuelas francesas». En: *Anales de la JAE*, tomo XIX, pp. 1–96, 1924. Cita en p. 55.

La respuesta a la cuestión anterior conlleva responder a la última que nos planteábamos de partida:

Q_5 ¿Qué relación se detecta entre el modelo pedagógico, el epistemológico y el docente de las matemáticas?

La investigación realizada pone de manifiesto la influencia de la ideología pedagógica y del modelo epistemológico de las matemáticas dominantes en aquel momento en la institución de formación de maestros, sobre las prácticas matemáticas propuestas.

En los capítulos precedentes hay ejemplos de cómo la epistemología de cada profesor se refleja en su propuesta para aprender matemáticas. Así, en la geometría de Manuel Xiberta, cuya concepción de la matemática es más euclidianista[2] y apenas se dejó influir por la nueva pedagogía, no intervienen los movimientos, como lo hacen en la de Eyaralar o en la de Rey Pastor y Puig Adam; del mismo modo hallamos otro ejemplo en el capítulo 4, en el que vemos que el primero de los profesores citados no vincula la proporcionalidad y el álgebra a las funciones, como sí hacen, por ejemplo, Charentón y Eyaralar.

Esas mismas concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje, se van a reflejar igualmente en las propuestas para la formación de los futuros maestros en la metodología de las matemáticas; dichas propuestas están en consonancia con el modelo epistemológico de las matemáticas y con el modelo pedagógico predominante –en este modelo se dejaban sentir las ideas del movimiento de la Escuela Nueva– para los profesores que representaban entonces la renovación pedagógica.

Se confirma la dependencia entre los modelos epistemológicos de las matemáticas y los modelos didácticos. Efectivamente, el modelo epistemológico de las matemáticas que predomina en una institución, ya sea la escuela primaria o la institución de la formación de maestros, la Escuela Normal, condiciona las matemáticas que se imparten en ella.

Estos rasgos de la epistemología de la matemática y de la pedagogía dominantes en cada caso, se ponen de manifiesto en los libros de metodología

[2]Gascón Pérez, Josep: «Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 2001, **4**, pp. 129–159.

de las matemáticas publicados a partir de 1930, en un periodo de madurez de las ideas y propuestas que se estaban gestando en los años previos. Un ejemplo lo tenemos en los contenidos que primaban en estas obras: unos autores insisten casi exclusivamente en la metodología de la propia ciencia matemática, mientras otros consideran parte fundamental la metodología didáctica.

En este sentido, creemos que la investigación llevada a cabo nos permite afirmar que el modelo didáctico que compartían los renovadores de la enseñanza de la matemática durante el periodo histórico estudiado no era un modelo didáctico espontáneo. Habían heredado los presupuestos de la Escuela Nueva pero además, aunque se trataba de teorías pertenecientes al *nivel pedagógico* –en el sentido de los niveles de codeterminación establecidos por Yves Chevallard– estos autores no los adoptaron de una manera acrítica, sino que, en general, los adaptaron precisamente considerando las características de las matemáticas (carácter abstracto, organización jerárquica, etc.) y sus diferencias con otras disciplinas, en particular, las ciencias experimentales. Las distintas *funciones* que desempeñan los materiales manipulativos y los juegos, que hemos identificado y clasificado en este trabajo, constituyen un indicio de ello. No obstante, también hay que señalar que observamos algunos rasgos distintivos en la manera o en el grado en que estos profesores normalistas adaptaron a la matemática las nuevas ideas pedagógicas imperantes en los círculos renovadores.

El ejemplo de Margarita Comas es significativo: en sus libros de metodología de las matemáticas se percibe cómo intenta trasladar las orientaciones para la enseñanza de las ciencias experimentales a las matemáticas, con una perspicacia que demuestra su gran inteligencia. Aunque un análisis más profundo de ellos, desde la didáctica de la matemática, pone en evidencia –no obstante sus aportaciones y su indudable contribución a la metodología de las matemáticas– la necesidad de un mayor cuestionamiento del contenido matemático, que tenga en cuenta las características particulares de las matemáticas –abstracción, generalidad, gradación, etc.–. Ello hace que escriba libros que contienen algunas orientaciones generales sobre la enseñanza de las matemáticas pero, sobre todo, ejemplos en los que la metodología cambia sustancialmente según se consideren los grados más bajos de la escuela

primaria o los siguientes. En estos libros faltan partes esenciales de lo que se consideraba que debía incluir la formación inicial en metodología de la matemática, en particular, las cuestiones relativas a la metodología de la propia matemática. En cambio contienen, sobre todo, colecciones de ejemplos (de actividades, de materiales...) muy interesantes, pero que no son suficientes para construir una planificación.

En los libros de Paunero, Sáiz Salvat y Eyaralar se percibe más claramente que van destinados a maestros en formación, es decir, a la formación inicial, e intentan presentar, desde los ejemplos y las orientaciones de carácter práctico, una formación teórica –en el sentido de *básica*–; de ellos es superior en cuanto a su estructura y contenidos el de Eyaralar.

Otro ejemplo de la influencia de los modelos pedagógico y epistemológico nos lo proporciona el análisis realizado del método de proyectos. Este método propicia un cambio en la pedagogía dominante en aquel momento. No obstante, a las preguntas de si existe un *cuestionamiento pedagógico* suficientemente ligado a los contenidos (en particular matemáticos) concretos, lo que parece haber es un nuevo modelo pedagógico de referencia, pero no observamos de la misma forma un nuevo modelo epistemológico de referencia de las matemáticas. Sin embargo, ambos constituyen dos componentes esenciales de la ecología escolar. Hemos identificado rasgos de la la epistemología subyacente, que coinciden con algunos de los atributos pertenecientes a lo que se ha llamado 'aplicacionismo' (ver p. 444). Uno de los rasgos de los proyectos, al parecer derivados de una pedagogía de tipo generalista, como la que parece inspirarlos, es que no se suele tener en cuenta que existen ciertas restricciones a la hora de organizar el estudio de la matemática derivadas de la propia naturaleza de esta ciencia. Aunque en general los profesores más innovadores reconocen las virtudes del método, hay otros, como Eyaralar, a quien las consideraciones respecto a la naturaleza de las matemáticas le hacen ser más crítico.

Un factor que hemos hallado que interviene, por supuesto en la calidad, pero igualmente en la orientación de las obras de metodología, es la diferente formación matemática de sus respectivos autores. En los apartados dedicados a la definición y a la validación se señalan algunas evidencias de falta de finura

matemática en Paunero (ver p. 553) y Sáiz Salvat (ver p. 551; Margarita Comas y Charentón no tratan este tema en sus obras), pero sobre todo en Xiberta (en este caso recogemos igualmente ejemplos en el apartado dedicado al Álgebra, p. 292, y el que dedicamos a la validación, p. 538 y p. 551), quien además, comenta cuestiones matemáticas nada triviales sin ser consciente de su falta de formación para ello. Ejemplos como los comentados en este trabajo muestran cómo el dominio de los conocimientos matemáticos, aunque no determine necesariamente el modelo epistemológico de las matemáticas, es imprescindible para una reflexión epistemológica consciente y no ingenua.

Lo anterior se refleja antes y en la actualidad, por ejemplo, a la hora de considerar la relación entre el rigor matemático y la intuición. Lo que revelan los libros es que formalismo no implica rigor matemático, ni la ausencia de formalismo implica necesariamente que una obra sea intuitiva. Más bien al contrario, una obra solo puede ser verdaderamente intuitiva si está hecha con rigor –aunque huya del formalismo excesivo para el nivel al que va dirigida–, si el contenido matemático que contiene o que interviene ha sido objeto de una verdadera reflexión desde la epistemología y la didáctica de la matemática. La comparación entre los libros de Xiberta y de Eyaralar es la mejor muestra de ello. Este último, además de ser licenciado en Química –también lo eran Paunero y Comas– y haber estudiado, como Comas, Sáiz, Xiberta y otros, en la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio, había preparado y aprobado las oposiciones a catedrático de matemáticas de bachillerato; además había estudiado las obras de algunos matemáticos como Émile Borel o Hermann Schubert, entre otros (ver p. 115).

Suele ocurrir que en el transcurso de una investigación, conforme van quedando respondidas, aunque sea parcialmente, las cuestiones iniciales planteadas, vayan aflorando otros interrogantes o simplemente se hallen indicios de respuesta a asuntos que, aunque latentes, no se habían planteado de manera explícita a priori. En nuestro caso, conforme avanzaba el análisis emprendido y crecía, no solo la información disponible, sino también la perspectiva sobre el tema de trabajo, nos íbamos planteando y hallando elementos de respuesta a otras cuestiones relacionadas con las que estudiamos:

Q_6 **¿Qué relación guardan las propuestas realizadas durante la llamada Edad de Plata, en el campo de la enseñanza de la matemática, con el origen de la Didáctica de la Matemática como disciplina?**

Q_7 **¿Qué condiciones institucionales y pertenecientes, en general, a distintos niveles de codeterminación didáctica contribuyeron y de qué modo?**

El profesor Antonio Viñao recuerda que la memoria de los profesores como tales raramente excede de su propia disciplina –incluso de su nivel educativo– y de su propia memoria profesional; en general, se suele confundir 'memoria' con 'historia'[3]. Incluso si nos centramos en una disciplina concreta rara vez se relaciona su historia con la de la profesión docente y la de las 'culturas escolares'[4].

Sin embargo, para un profesor de Didáctica de la Matemática, comprender las etapas anteriores por las que ha pasado su profesión hasta tener una disciplina configurada como se encuentra hoy, las contribuciones y las discusiones sobre los diferentes aspectos relacionados con lo que es –o debe o puede ser– un área disciplinar y los elementos necesarios para serlo, las propuestas para superar las restricciones que se presentan, etc., proporciona un conocimiento que, más allá de satisfacer la curiosidad o resultar anecdótico, es interesante porque aporta perspectiva y con ello una visión más lúcida de la situación actual y, a la vez, de las posibilidades futuras.

Solo una mirada con perspectiva nos puede ayudar a entender algunos logros y limitaciones, las pasadas y –es lo interesante– quizá las presentes, y aportar una imagen más realista de nuestra profesión. Entender cómo hemos llegado al punto en el que nos encontramos hoy, quiénes contribuyeron y

[3] Viñao Frago, Antonio: «Historia de las disciplinas, profesionalización docente y formación de profesores: el caso español». *Pro-Posiçoes*, 2012, **23(3 (69))**, pp. 103–118.

[4] Según Dominique Julia: «Conjunto de normas que definen los saberes a enseñar y los comportamientos a inculcar, y un conjunto de prácticas que permiten la transmisión y asimilación de dichos saberes y la incorporación de estos conocimientos», modos de pensar y obrar ampliamente difundidos y adoptados incluso en otros ámbitos de nuestra sociedad. En: Viñao Frago, Antonio: «La historia de las disciplinas escolares». *Historia de la Educación*, 2006, **25**, pp. 243–269, cita en p. 253.

cómo, no es solo una cuestión de respeto, de reconocimiento a aquellos con los que compartimos inquietudes que quizá no tuviéramos en otro caso. La principal razón para mirar al pasado es que es necesario entenderlo para interpretar el presente y construir el futuro.

En el caso de la Didáctica de la Matemática, hemos hallado suficientes indicios para sostener que en el periodo histórico que estudiamos, sobre todo durante la Segunda República, se va desarrollando un proceso de disciplinarización de esta materia que, si bien no llega a culminar en aquel momento en la creación de una disciplina como tal –ya que eso se produce bastante después–, sí que da lugar al germen de una disciplina o, dicho de otro modo, una «protodisciplina».

Para justificar esta afirmación hemos de indicar cuáles son los rasgos fundamentales que permiten considerar a una disciplina como tal. Siguiendo a Viñao[5], una disciplina puede considerarse un organismo vivo y como tal nace, se desarrolla, evoluciona y se relaciona con otras disciplinas. El acta fundacional de una disciplina está constituida por la escolarización y academización de un saber, para transformarlo en objeto de enseñanza, sistematizado y secuenciado en un programa escrito, preferiblemente un manual o libro de texto.

El elemento que caracteriza una disciplina entre el resto es el *'código disciplinar'*, al que nos hemos referido al comienzo de este trabajo (p. 3).

Si bien las reflexiones acerca de la enseñanza de la matemática –su importancia en la formación de maestros, su contenido, etc.– eran frecuentes en las revistas profesionales durante los años anteriores, e incluso la preocupación por aspectos que llegado el momento habrían de formar parte del 'código disciplinar' de esta materia, es en el periodo republicano –o en los meses anteriores, cuando podía anticiparse un cambio político importante– cuando se pueden identificar con claridad elementos constitutivos de dicho código disciplinar.

Cierto que las instituciones creadas en los años anteriores, en especial la Junta para Ampliación de Estudios y la Escuela Superior del Magisterio, y la difusión de las ideas del movimiento de la Escuela Nueva, iban aportando elementos y contribuyendo a la creación de un campo disciplinar, pero también

[5] Viñao Frago, *Historia... profesionalización...*, op. cit.

es cierto que se trataba sobre todo de cambios pedagógicos que afectaban en general al conjunto de las materias, aunque paralelamente crecieran el interés y las aportaciones a la enseñanza de las asignaturas específicas. Por otra parte, y como comentaremos, el papel de estas instituciones en la configuración de una metodología especifica no es el mismo para la didáctica de las matemáticas que para la de algunas otras materias. Ni siquiera la situación de las disciplinas de referencia era la misma, baste comparar el caso de la Geografía, en vías de constitución, con el de las Matemáticas, una disciplina asentada y con mayor tradición.

En efecto, en el capítulo quinto de esta tesis nos hemos ocupado de la introducción de la asignatura Metodología de la Matemática en el plan de estudios para las Escuelas Normales, introducción que se hace de manera oficial, por vía legislativa. Se decreta la creación de las metodologías específicas con el estatus de asignaturas, que forma parte, sustituyendo a las disciplinas curriculares correspondientes, del plan profesional. El Decreto de 29 de septiembre de 1931 establece los bloques de asignaturas, el peso que tendrá cada una en el plan de estudios llamado profesional, y la secuenciación; es decir, determina su lugar en la estructura de dicho plan de estudios.

Sin embargo, la administración renuncia a imponer lo que hoy se nos antoja un elemento esencial del código disciplinar: el contenido de las asignaturas. Consciente de que se trata de materias nuevas, de las que no se cuenta con una tradición previa, y de la amplitud de los cambios propuestos, prefiere reunir a los profesores normalistas –a una selección de ellos– para que, junto con expertos de la Universidad y también justamente de las instituciones de las que partía la renovación didáctica, los Centros de Estudios y Laboratorios de la JAE, el Instituto-Escuela y la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio, elaboraran las directrices generales («Cuestionarios») de cada Metodología a partir de las cuales cada profesor debía confeccionar su programa concreto. La naturaleza de asignatura no consolidada –aunque respondiera a la petición y al deseo de la profesión– se manifiesta incluso en el carácter provisional que otorgó la administración a los cuestionarios.

Los objetos de saber no son explicitados institucionalmente. Existen algunos elementos de respuesta a la cuestión del currículo de dicha asignatura, no todos procedentes de la matemática o de la didáctica de la matemática

–también en geografía y física y química hay coincidencias– pero la construcción del cuestionario da lugar a un intercambio de ideas, de propuestas, de conocimientos y de planteamientos epistemológicos, matemáticos y didácticos.

Ello motivó que, a diferencia de lo que puede ocurrir en una disciplina más consolidada –tampoco habían existido cuestionarios oficiales para las asignaturas de matemáticas del plan anterior–, la segunda componente del código disciplinar, el discurso sobre el papel de la asignatura y, más concretamente, sobre la orientación que debía tener – discurso iniciado en los años anteriores– cobrará tanta relevancia como el contenido mismo. Abundan las opiniones escritas sobre qué ha de constituir una *Metodología de la Matemática* y las consideraciones sobre los diferentes elementos de las propuestas que se formulan. En ocasiones esas consideraciones van en el sentido de delimitar cada metodología específica y diferenciarla de la metodología general (apartado 5.2.1, p. 330 y sig.), lo que sin duda se consideraba necesario para dotar a las *Metodologías* –en particular a la metodología de la matemática– de entidad como asignaturas.

El cambio que supuso el Plan del 31 implicaba romper en gran medida con un extenso trabajo anterior de elaboración de las disciplinas que integraban el plan de estudios de quienes se preparaban para ser maestros. Esto explica que el conjunto de las personas que formulan propuestas y escriben libros para la nueva asignatura sea, a pesar de su importancia, minoritario. Por otro lado, la ausencia de presiones institucionales sobre los programas de ciertas materias favorece la discusión y también, tal como ocurre paralelamente en la escuela primaria para aplicar un dispositivo didáctico como el método de proyectos, favorecía los ensayos. El que los profesores no dispusieran de un programa oficial, ni de una *cultura escolar* previa para la asignatura de Metodología de la Matemática, ni siquiera en principio de textos, que hubieron de ir elaborando, son factores que pueden romper la inercia y favorecer la introducción de modificaciones en su actividad docente en las Normales (cuando hay un mínimo de inquietud y convicción: el caso de Xiberta es un ejemplo de lo contrario).

Merece la pena destacar la conciencia desarrollada en el grupo de profesores cuya aportación ha sido el objeto de nuestro estudio, acerca del estado

'protodiscipliario' en el que se hallaba la didáctica de la matemática. Eyaralar ya se expresaba en 1923 de este modo: «en el primer periodo de nuestro progreso en metodología en que nos encontramos...»[6]. Diez años más tarde, criticando la tendencia a hacer de la metodología un conjunto de 'recetas' para el maestro, Sáiz Salvat considera que de las tres fases que constituyen la evolución didáctica de una nación, *indiferencia, información* y *creación didáctica*, España debía estar en la segunda[7].

La reflexión compartida en las publicaciones de la época sobre el contenido de la metodología de la matemática va configurando un programa que, aunque en ese momento no es único, hemos visto que tenía un núcleo común, y sobre todo, una conciencia de la necesidad de acuerdo general sobre los temas que comprende para la configuración de un auténtico campo disciplinar. Sáiz Salvat lo considera un requisito para «el adelanto de una *didáctica nacional*, que debe estar formada por las didácticas personales»[8]. En este sentido los manuales, siguiendo a Claire Margolinas y Floriane Wozniak[9], actúan también potencialmente como útiles de desarrollo profesional.

El saber –en este caso didáctico– institucionalizado en libros de texto para una asignatura, con un corpus común de conocimientos es lo que aleja a la didáctica de la matemática de la consideración de 'arte', en contraposición a la de 'ciencia', y se opone a una concepción de la enseñanza 'gremial', que se transmite de una generación a otra por imitación[10]. No interesa la experiencia particular, sino la de la *profesión*. La organización de las prácticas, y en particular las de la asignatura de metodología de la matemática, mo-

[6] Eyaralar Almazán, José María: «Cómo se enseña la Aritmética y la Geometria, por Margarita Comas». *Revista de Escuelas Normales*, 1923, **6**, p. 175.

[7] Citado en p. 343.

[8] Sáiz Salvat, Felipe: «De la organización didáctica». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **94**, pp. 4–6. Cita en p. 5.

[9] Margolinas, Claire y Wozniak, Floriane: «Usage des manuels dans le travail de l'enseignant: l'enseignement des mathématiques à l'école primaire». *Revue des sciences de l'éducation*, 2009, **35(2)**, pp. 59–82. `http://id.erudit.org/iderudit/038729ar`.

[10] Precisamente Margarita Comas, cuya obra de metodología no se ajusta al Cuestionario, ya que suprime algunos contenidos considerados en él, aunque reivindica el carácter de ciencia para la enseñanza, considera que predomina el carácter de 'arte'. Comas Camps, Margarita: *Metodología de la Aritmética y la Geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1932, p. 5.

tiva una reflexión en ese sentido, que lleva a valorar sus aspectos teóricos. Reproducimos la siguiente cita (en p. 399 del apartado 6.3) de Eyaralar:

> Ello hubiera constituido un estímulo a la imitación, sin valoración adecuada y probablemente nociva, desprovisto como está el alumno de los principios indispensables para juzgar lo que ve hacer. Sugestión por sugestión, *preferimos el amplio cuadro de la enseñanza mundial tal como lo presenta nuestra clase teórica*, al estrecho marco de una escuelita provinciana[11].

Otros autores como Paunero o Sáiz Salvat insisten en el carácter científico que ha de tener la metodología de la matemática, y en la necesidad de que las prácticas se articulen en torno a los conocimientos teóricos y no a la inversa, y afirman que un ejemplo no permite conocer las características de un método. En general, se manifiestan contra lo que llaman 'practicismo', como opuesto al carácter científico al que ha de aspirar la metodología de la matemática.

La observación de las componentes del código disciplinar no completa el estudio sobre el origen o el estado de una disciplina. Las disciplinas son un producto social e histórico, ligadas a la delimitación de un campo académico cuyo control guarda relación con el proceso de profesionalización docente[12]. Nos preguntamos, pues, por cuestiones como la formación de los profesores o el asociacionismo profesional.

En el capítulo segundo nos hemos ocupado del sistema educativo, en lo que concierne a la formación de los maestros (acabamos de comentar lo que supuso el plan profesional para el surgimiento, aunque sea en estado embrionario, de la didáctica de la matemática), y del papel de dos instituciones básicas –junto con las Escuelas Normales– relacionadas con la formación el Magisterio, la Junta para Ampliación de Estudios y la Escuela Superior del Magisterio. En el apartado 2.7 hemos apuntado ya que, en el caso de la enseñanza de la matemática, la Escuela Superior del Magisterio no ha desempeñado el mismo papel que se afirma que ha tenido en otras disciplinas,

[11] Eyaralar Almazán, José María: «Las Prácticas de Enseñanza». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **96**, pp. 74–76, p. 74. La cursiva es nuestra.

[12] Viñao Frago, *Historia... profesionalización...*, op. cit.

como las Ciencias Naturales[13] o la Geografía e Historia[14]. Las construcciones teóricas que podemos relacionar con el origen de la disciplina no proceden –directamente al menos– de esta institución.

La Escuela de Estudios Superiores del Magisterio es la responsable de la formación inicial de los profesores normalistas, y la mayoría de los que representan el movimiento de renovación pedagógica en matemáticas había estudiado en dicho centro. En un artículo publicado en 1926 Eyaralar critica la falta de formación recibida en este centro en el que, según afirma, las asignaturas de matemáticas se impartían con una orientación universitaria, sin atender a aspectos didácticos (ver p. 141). Las condiciones de ingreso suponían un alumnado adulto –cabe suponer que maduro–, motivado y con un cierto nivel de conocimientos matemáticos. Pero los profesores eran profesores de universidad, sin que tengamos constancia, ni indicios, de su preocupación por las cuestiones didácticas. Las obras de metodología fueron escritas por alumnos de ese centro, no por sus profesores, luego ¿dónde adquirieron su formación metodológica?

En la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio debieron obtener, eso sí, formación matemática[15], ya que el currículo de los profesores avala su preparación matemática; además, estos profesores normalistas parecen conocer cuestiones históricas, citan a matemáticos de renombre..., aunque parte de la formación 'cultural' en matemáticas bien pudiera ser producto de lecturas posteriores. Considerando los años en los que estos profesores normalistas realizaron sus estudios en dicha Escuela y algunos libros de matemáticas escritos por profesores del centro, no hay indicios de que la orientación de las asignaturas de matemáticas contemplase aspectos didácticos.

[13]Bernal Martínez, José Mariano: *Renovación Pedagógica y Enseñanza de las Ciencias. Medio siglo de propuestas y experiencias escolares (1882-1936)*. Biblioteca Nueva, Madrid, 2001.

[14]Mainer Baqué, Juan: *La forja de un campo profesional: pedagogía y didáctica de las Ciencias Sociales en España (1900-1970)*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2009.

[15]Hemos visto que era insuficiente en algunos casos, especialmente en cuestiones relativas a la metodología de la propia ciencia matemática, aunque, en general, y salvo el caso de Manuel Xiberta, que se atreve a explorar terrenos matemáticos que no domina, su formación puede considerarse, si no óptima, sí aceptable en aquel momento y desde luego muy superior a la que se exigía a los profesores de Escuela Normal antes de la creación de este centro.

Sí parece en cambio que tuvieron oportunidad de adquirir, además de formación matemática, conocimientos sobre la Escuela Nueva y los métodos intuitivos y experimentales a través de otras asignaturas, de las actividades culturales y complementarias que organizaba el Centro, en las que participaban, y de las relaciones entre la Escuela y otras instituciones. Ello debió generar inquietudes pedagógicas también en lo referente a las matemáticas, que les llevaron a buscar formación a través de obras de otros autores (tratándose de esta materia, sin la formación matemática suficiente no es posible estudiar –ni consultar– los libros de matemáticas que citan) y de las pensiones concedidas a la mayoría de ellos por la JAE para aprender en el extranjero. Además, ya se dedicaban en algún caso a la docencia en Normales o en otras instituciones pero, sobre todo, eran personas brillantes e intelectualmente inquietas.

En la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio conocieron las corrientes renovadoras de la Escuela Nueva, y las vieron aplicar, al menos, a las ciencias experimentales y a las ciencias sociales. En estas disciplinas hay trabajos que estudian la influencia de los profesores de la Escuela Superior del Magisterio y de instituciones relacionadas con ella[16]. En los años siguientes algunos tuvieron la oportunidad de observar cómo se llevaban a la práctica los principios de la Escuela Nueva en el extranjero, por las becas de la JAE. Estos viajes al extranjero proporcionaban sobre todo la posibilidad de aumentar la perspectiva sobre los nuevos métodos más modernos y más intuitivos, pero también sobre la propia disciplina.

A partir de lo anterior, debieron hacer una relectura de los principios e ideas de la Escuela Nueva, para adaptarlos a las matemáticas desde el conocimiento que tenían de su uso en otras disciplinas. Quizá por esto, porque fue una reelaboración personal a partir de lo que se venía haciendo en otras asignaturas, continuamente insisten en la importancia de tener en cuenta las características de las matemáticas. Luis de Hoyos, en el prólogo al libro traducido por Josefina Pascual, destaca la labor reformadora de las personas que habían estudiado en ese centro, pero también se refiere a la relación entre los estudios pedagógicos en general y los relativos a las didácticas específicas:

[16]Bernal Martínez; **?**, Bernal Martínez; **?**.
Mainer Baqué, Mainer Baqué, op. cit.

> A esa generación de alumnos de la Escuela Superior del Magisterio pertenece la traductora, Sra. Pascual que como tantos compañeros y muchos condiscípulos transformaron las Escuelas Normales en dos sentidos igualmente necesarios: su adaptación a la cultura actual y su profundidad y especialización en sentido concreto, científico o literario que rellenan las puras formas a veces vacuas y barbaristas de la mera Pedagogía no profesada por quien al hondo saber une el sentido del cordial sentir creando así los verdaderos maestros del tipo de aquel Don Francisco Giner, que en nuestra memoria perdura y de don Manuel Cossío que sigue adoctrinándonos[17].

Otro aspecto de la historia de las disciplinas se refiere a las interacciones entre los miembros del grupo. La Escuela Superior del Magisterio también fomentó el asociacionismo, de los profesores de Escuela Normal por un lado, pero también de los de cada disciplina, que pudieron conocerse –aunque no hubiera una asociación como tal de profesores de matemáticas de Escuelas Normales– y así interesarse cada uno por las obras del resto. Tenían conciencia de ser un grupo, de provenir del mismo centro (ver apartado 2.6.2, pp. 143 y sig.). Entre los miembros de la directiva de la Asociación del Profesorado Numerario de Escuelas Normales es frecuente ver nombres de antiguos alumnos. Lo mismo que entre quienes firman artículos o trabajos en las revistas profesionales, sobre todo en la *Revista de Escuelas Normales*[18].

[17]Hoyos Sáinz, Luis de. Prólogo. En: Gal, J. y Marijon, A.: *Los problemas resueltos por el método intuitivo. Tablas, Gráficas, Fórmulas*. Traducido por M.ª Josefa Pascual. Imprenta Santa Teresa, Sanlúcar de Barrameda, 1934 . Traducción de la edición original francesa: Gal, J. y Marijon, A.: *Les Problèmes résolus par la méthode naïve, barèmes, graphiques, formules*. F. Nathan, París, 1929.

[18]De las seis personas que pusieron en marcha la revista en 1923, al menos cuatro habían estudiado en la Escuela Superior del Magisterio: Daniel Carretero, Visitación Puertas, Modesto Bargalló, Miguel Bargalló.

Díez Torre, Alejandro Ramón; Pozo Andrés, María del Mar del y Segura Redondo, Manuel: «La "Revista de Escuelas Normales" una publicación de regeneración normalista nacida en Guadalajara (1923-1936)». *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 1988, **1**, pp. 9–30.

Molero Pintado, Antonio y Pozo Andrés, María del Mar del (Eds.): *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio(1909-1932): Un precedente histórico en la Formación Universitaria del Profesorado Español*. Departamento de Educación de la Universidad

Las reformas legislativas, la reunión propiciada en 1932 desde la Dirección General de Primera Enseñanza, las publicaciones y, en particular, los libros de Metodología de la Matemática... son elementos que apoyan una verdadera *comunidad científica* que se estaba creando o que algunos empezaban a vislumbrar o a demandar, aun siendo conscientes de la necesidad de un cambio de mentalidad:

> Creemos un deber ocuparnos de esta cuestión, como de todas aquéllas de trascendencia profesional en que la experiencia particular puede ser útil a todos, rompiendo así ese hacer de nuevo a que tan propenso es el autodidactismo español. Por él, cada uno de nosotros se siente Zeus alumbrado de Minervas, *sin preocuparse de mejorar lo anteriormente logrado, tarea más modesta, pero casi siempre más útil*, La excepción del compañero Landrove, mejorando, en virtud de su experiencia, las de los cursillos, confirma la regla. A ello contribuye también el que cada cual suele guardar para sí, o todo lo más para la tertulia del café, sus experiencias, y así no hay en el ambiente estímulos ni sugerencias que aprovechar[19].

Por último, un elemento característico de una disciplina científica es la investigación. En la actualidad la Didáctica de la Matemática ha desarrollado sus propias teorías y, sin olvidar las relaciones con otras disciplinas más generales, dispone de herramientas de investigación propias (como las que se emplean en esta tesis). En el primer tercio del siglo XX, sería absurdo pretender que una 'protodisciplina' o disciplina que apenas ha iniciado el proceso de constitución, disponga de herramientas de investigación, ni siquiera que la investigación sea una componente destacada. No obstante, ya se menciona esta faceta. Eyaralar rechaza que la investigación sea algo reservado solo a los profesores universitarios, y que el profesor de secundaria tenga que limitarse a «rumiar la ciencia ya hecha sin otro fin que hacerla más fácilmente digerible»[20].

de Alcalá de Henares, Madrid, 1989.

[19] Eyaralar Almazán, José María: «Los Cursillos de Selección». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **101**, pp. 38–41, cita en p. 38. La cursiva es nuestra.

[20] Eyaralar Almazán, José María: «La investigación. Los números pitagóricos». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **17-18**, pp. 226–228, cita en p. 226.

Si Pedro Chico, Sáiz Salvat, Bargalló... defienden la especificidad de las metodologías específicas frente a la pedagogía general, intentando acotar así un campo profesional, el testimonio de Eyaralar pone de manifiesto cómo algunos representantes de aquellos primeros profesores que trabajaban por crear una disciplina con entidad de tal, comprendían el papel de la investigación –la que era posible en ese momento–: «El profesor de Escuela Normal tiene a su cargo un doble campo de investigación: uno de ellos es la metodología de su asignatura [cita como ejemplo la Memoria presentada a la JAE]; es otro campo, el de la investigación directa»[21].

Anteriormente ya hemos comentado (p. 262) que reclamaba la necesidad de estudios de tipo experimental, muy cercanos a la investigación, para tomar decisiones didácticas.

Tratándose de una tesis de Historia de la Educación Matemática, realizada en el espacio común de dos áreas, la Historia de la Educación y la Didáctica de la Matemática, la siguiente cuestión, que no hacíamos explícita al inicio del trabajo, ahora se nos aparece relevante, no únicamente de cara a cerrar esta investigación sino, sobre todo, para futuros trabajos:

Q_8 **¿Qué puede aportar la investigación en Didáctica de la Matemática –en didácticas específicas– a la Historia de la educación? ¿Y a la inversa?**

La Historia de la educación matemática es, pues, un campo interdisciplinar en el que confluyen la Historia de la Educación y la Didáctica de la Matemática, que necesita al menos de la colaboración de los investigadores en ambas áreas. En efecto, hace falta completar el análisis histórico con uno desde la epistemología de las disciplinas, para conocer verdaderamente y para comprender en qué consistía la educación en un ámbito específico. A la vez, y desde el campo de la Didáctica de la Matemática, el análisis *ecológico* precisa considerar aspectos relativos a la historia de la educación, como las ideas o los movimientos pedagógicos más generales que se están difundiendo

[21] Ibídem. En el terreno de las matemáticas elementales, pone un ejemplo –propiedades de las ternas pitagóricas– temas que no son de su invención, salvo la agrupación, las demostraciones y alguna de las propiedades

en un periodo determinado, las condiciones políticas, la legislación, incluso las condiciones sociales. Todo ello –que incluirá a su vez perspectivas psicológicas, sociológicas, y de la propia epistemología e historia de la matemática como ciencia– conforma el marco en el que hemos de situar nuestro análisis didáctico.

En este sentido, hemos mostrado hasta qué punto era necesario tener en cuenta el movimiento educativo de la Escuela Nueva, los cambios en la legislación educativa, y las instituciones que posibilitaban o explicaban lo existente y establecían los límites y las razones de lo posible. El análisis de las influencias y de las restricciones provenientes de niveles más altos en la jerarquía de los niveles de codeterminación didáctica descritos por Chevallard es un componente clave en una investigación realizada en el marco de la TAD, máxime en una investigación histórica en didáctica de la matemática.

Un ejemplo lo tenemos en el material didáctico –no textual– al que hemos dedicado el apartado 7.2. El análisis epistemológico, que incluye aspectos de la historia de la disciplina matemática, ayuda a interpretar las propuestas de uso de materiales, incluso lo que puede parecer más claro, como el dibujo geométrico (construcciones con regla y compás, apartado 4.1.5, pp. 265 y sig.). Conocer sin más los materiales no da una información completa del patrimonio material. No se trata de hacer un inventario; la investigación histórica pretende interpretar lo sucedido y comprender las razones, otra cosa no tendría sentido. El material no es el fin, sino más bien un 'medio' para conocer la historia de las disciplinas, en cuanto a qué y cómo se enseñaba, y esto a su vez está ligado al contexto (leyes, instituciones, etc.) en el que se producen las reformas educativas.

El análisis de textos nos proporciona otro ejemplo. Se suele confundir –o limitar– el análisis de la historia de las disciplinas con el correspondiente al de los libros de texto, aspecto ineludible en ese estudio, pero no suficiente, cuyo sentido se halla en el interior de la historia de las disciplinas, considerando el proceso de disciplinarización de cada materia[22]. Realizamos un análisis

[22] Viñao Frago, Antonio: «La historia de las disciplinas escolares en España: una revisión con especial atención a la educación secundaria». En: Leoncio López-Ocón; Santiago Aragón y Mario Pedrazuela (Eds.), *Aulas con memoria. Ciencia, educación y patrimonio en los Institutos históricos de Madrid (1837-1936)*, pp. 265–277. CEIMES, CSIC y Comu-

riguroso de los libros desde la Didáctica de la Matemática, más concretamente en el marco del Programa Epistemológico de investigación, utilizando para ello las herramientas de la teoría antropológica; pero ese análisis sería incompleto si no consideráramos, entre otros aspectos, la formación de sus autores o el contexto pedagógico e institucional en el que se escriben. Por eso, en el análisis de los textos confluyen de manera relacionada la historia de la educación y la didáctica de la matemática, incluyendo las disciplinas relacionadas con ambas: la historia de un país o de una sociedad, que nos informa del contexto político, social, educativo; la legislación, la psicología, la matemática y su propio desarrollo.

La 'ecología' de los saberes determina las condiciones de su existencia. En particular, el análisis ecológico ha permitido aportar elementos de respuesta a la cuestión de qué restricciones existían en los años anteriores y durante la Segunda República en España o, al revés, dejan de existir para que se puedan proponer esas metodologías.

En una publicación reciente comenta Antonio Nóvoa[23] que la historia de la educación no es el pasado, no es algo que ya no existe y que no regresará, sino más bien la continuidad que se prolonga hasta nuestros días y aún más allá; investigar científicamente épocas anteriores es probablemente el mejor modo de ubicar los problemas del presente, y esta posibilidad que nos proporciona la investigación histórica es su mayor contribución.

Este trabajo se suma a otros anteriores que, desde la Historia de la Educación o desde la Didáctica de la Matemática, contribuyen igualmente a rescatar la memoria de quienes se interesaron por las mismas cuestiones en las que estamos interesados, pero no solo eso, sino que hemos querido determinar qué aportaciones hicieron realmente en el campo específico de la Didáctica de la Matemática y cuál era el alcance de tales aportaciones; es decir, qué suponían –y podían haber supuesto– para el nacimiento y desarrollo de la Didáctica de la Matemática como área disciplinar.

nidad de Madrid, Madrid, 2012.

[23] Nóvoa, Antonio: «Carta a un joven historiador de la educación». *Historia y Memoria de la Educación*, 2015, **1**, pp. 23–58.

Por otra parte, la investigación desarrollada permite descubrir lo que deben las técnicas y tecnologías didácticas presentes en un determinado momento, a otras anteriores. De hecho, para Yves Chevallard una praxeología didáctica no puede asociarse a una única época.

> Il n'existe pas par exemple d'organisation didactique qu'on pourrait dire d'époque, de part en part datée, ou, à l'autre extrême, entièrement moderne en chacun de ses composants. Les activités de développement doivent prendre en compte cette nécessité d'un «métissage historique» de toute production possible: toute «novation» est partiellement conservatrice, en ce qu'elle réutilise –de manière parfois inédit– des matériaux anciens, que l'on pourrait autrement juger «obsolètes»[24].

En efecto, muchas de las técnicas didácticas –y también matemáticas– de aquellos momentos, innovadoras entonces, se han vuelto a introducir o 'reinventar' décadas después, en otros contextos, y a considerarse de nuevo 'innovadoras': «la solution d'hier, fût-elle aujourd'hui oubliée, sera demain peut-être partiellement reprise, dans une combinaison nouvelle, novatrice»[25].

No podemos sino lamentar que durante la época siguiente se despreciaran propuestas como las que hemos comentado, y que hasta hace unas décadas no se hayan empezado a considerar y a valorar maneras de entender la enseñanza de la matemática, deudoras de estos trabajos e inquietudes anteriores.

[24] «No existe por ejemplo una organización didáctica que se pueda decir que es de una época, totalmente fechada, o, en el otro extremo, completamente moderna en cada una de sus componentes. Las actividades de desarrollo deben tomar en cuenta la necesidad de un 'mestizaje histórico' de toda producción posible; toda «innovación» es parcialmente conservadora, dado que reutiliza –de manera a veces inédita– los materiales antiguos que de otra manera se podrían tildar de 'obsoletos'». Chevallard, Yves: «L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1999, **19(2)**, pp. 221–266, cita en p. 42. La traducción es nuestra.

[25] «La solución de ayer, que ha sido hoy olvidada, será mañana quizá parcialmente retomada, en una combinación nueva, innovadora». Ibídem. La traducción es nuestra.

Líneas de investigación abiertas

En este trabajo se ha partido de unas ciertas cuestiones e incluso han ido surgiendo otras conforme avanzaba la investigación. Acabamos de referirnos a ellas. Aunque en algunos momentos ha habido que ir seleccionando aquellas cuestiones, temas, tópicos que estaban más directamente relacionados con el propósito de la tesis y a la vez, tomar la decisión de no ocuparnos de otros, por la necesidad de acotar la investigación que, de otro modo, sería imposible concluir.

Pero eso no significa que hayamos desistido de investigar las cuestiones a las que nos referimos, todo lo contrario. Presentar este trabajo nos dará el tiempo y la oportunidad de continuar por el camino iniciado y ampliar los temas de estudio. El marco metodológico bajo el que se ha llevado a cabo lo hecho hasta aquí y las herramientas puestas a prueba para una investigación de este tipo, han de permitir igualmente ampliar el estudio y emprender otros nuevos que den respuesta a las inquietudes generadas.

Lo más inmediato sería pensar en contenidos matemáticos presentes en las obras que estudiamos y que no hemos seleccionado especialmente para nuestro análisis: decimales y fracciones, medida, ciertas cuestiones geométricas, etc., temas que en sí ya merecen un estudio específico, similar al efectuado para la numeración o para el dibujo geométrico, por ejemplo.

Una línea de investigación que nos interesa es estudiar ciertos dispositivos didácticos, como los cuadernos escolares o los catálogos de material didáctico de la época que consideramos; estudio que comprende, entre otros aspectos, la comparación con los materiales descritos en la tesis y la difusión de dichos materiales en las publicaciones que hemos manejado, no solo para una aproximación sino para realizar un estudio sistemático. Éstas son además líneas de investigación del Centro de Estudios de la Memoria Educativa (CEME), al que pertenece la autora de la tesis, líneas en las que ya se trabaja en la Universidad de Murcia, y a las que podemos contribuir en lo relacionado con el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Esto a su vez guarda relación con el siguiente problema de investigación.

No era un objetivo de esta tesis estudiar el impacto de las propuestas renovadoras en las escuelas primarias, hasta qué punto se conocían, se asumían

pero, sobre todo, de qué manera, qué transformación pudieron haber sufrido las ideas sobre la enseñanza de la matemática y cuál era el sentido que tenían las propuestas concretas que se hacían desde las Normales, el nivel al que iban dirigidas en última instancia. Esta línea de investigación supondría analizar los libros para la escuela primaria, los cuadernos, los materiales existentes, los testimonios de los maestros, etc.

Decíamos que la investigación era sobre el tiempo pasado, pero desde el presente. Ambos intereses se unen precisamente porque nos proponemos comparar las organizaciones didácticas analizadas, a través de los dispositivos asociados –el método de proyectos o las prácticas, entre otras– con los planteamientos y las realizaciones de esos mismos dispositivos en la actualidad.

Por último, cuestiones que no han aparecido formuladas explícitamente como tales hasta las páginas finales de este trabajo, aquellas que se refieren a la Didáctica de la Matemática como disciplina, sobre las que ya hemos podido obtener algunas primeras conclusiones, serán objeto de ampliación en el tiempo considerado, y una de las primeras líneas de investigación en la que deseamos profundizar.

Fuentes primarias utilizadas

«Expediente de Aurelio Rodríguez Charentón. JAE/125-302». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de David Bayón Carretero. JAE/17-195». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de Enrique Vidal Abascal. JAE/149-220». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de Federico Landrove Moiño. JAE/83-55». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de Florencio de la Torre Castillo. JAE / 142-115». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE.

«Expediente de Félix Martí Alpera, JAE/160-229 y JAE/97-177». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de Gabriel Galán Ruiz. JAE/58-17». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de Josefa Pérez Solsona. JAE / 114-360». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE.

«Expediente de José Gabriel Álvarez Ude. JAE/8-363». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de José María Eyaralar, JAE/49-170». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de Margarita Comas Camps. JAE/37-589». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de Pedro Puig Adam. JAE/118-601». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de Teófilo Martín Escobar. JAE / 93-215». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE.

«Expediente de Visitación Puertas Latorre. JAE/118-593». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Expediente de Ángel Ledesma Martín. JAE/84-116». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE.

«Ante la campaña contra las Escuelas Normales». *Revista de Pedagogía*, 1835, **159**, pp. 136–138.

«Exposición Universal de 1867. Carta VII». *Anales de Primera Enseñanza*, 1867, **IX**, pp. 421–430.

«Estatutos de la Institución Libre de Enseñanza». *BILE*, 1877, **1(11)**, pp. 61–63.

«Homenaje a Zorrilla. Celebrado en la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio el 1.º de abril de 1917». *La Escuela Moderna*, 1917, **308**, pp. 201–203.

«Para los licenciados en Ciencias o en Letras». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Expediente JAE 161/245 (Instituto-Escuela de 2.ª Enseñanza). Documento 258, p. 92/554, 1923.

«La preparación de los maestros en España». *Revista de Pedagogía*, 1926, **56**, pp. 368–371.

«La Reorganización de la Junta de Ampliación de Estudios». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **36**, p. 234.

«Real Decreto de 23 de agosto de 1926». *Gaceta de Madrid*, 1926, **240**, pp. 1237–1239.

«Preámbulo al Decreto de 29 de septiembre de 1931». *Gaceta de Madrid*, 1931, **273**, pp. 2091–2094.

«La escuela de hoy y la escuela de mañana». *Revista de Pedagogía*, 1932, **131**, pp. 520–521.

«Notas del mes. La preparación del magisterio». *Revista de Pedagogía*, 1932, **131**, pp. 521–522.

«Preámbulo al Decreto de 27 de enero de 1932». *Gaceta de Madrid*, 1932, **29**, pp. 732–733.

«Decreto de Nombramiento de Federico Landrove Moiño, Director General de Primera Enseñanza». *Gaceta de Madrid*, 1933, **132**, p. 1092.

«El Método de Proyectos en la Enseñanza». *La Escuela Moderna*, 1933-1934, **505, 507, 510, 512, 514, 515, 517**, pp. 470–477, 562–569, 124–134, 230–240, 315–324, 366–378, 469–478.

«La preparación del Magisterio, amenazada». *Revista de Pedagogía*, 1934, **151**, pp. 328–329.

«Reglamento de Escuelas Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **102 (suplemento)**, pp. 1–19.

«Asamblea de la Asociación Nacional del Profesorado Numerario de Escuelas Normales». *Revista de Pedagogía*, 1935, **157**, pp. 36–38.

«A nuestros lectores». *Gaceta Selecta. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15(1) (suplemento)**, pp. 58–67. Originalmente publicado en la Revista de la Sociedad Matemática Española, Tomo V, n.º 41, octubre de 1915.

«Revista Matemática Hispano-Americana. Portada». *Gaceta Selecta. Antología de las revistas publicadas por la RSME en sus cien primeros años. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15 (suplemento)**, p. 72. Originalmente publicado en la Revista Matemática Hispano-Americana. Portada. Serie 1.ª, Tomo II, (1920).

Agudo, Marcelo: «Enseñemos eficazmente». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **95**, pp. 34–35.

Alonso Martínez, Luisa: «Modificaciones necesarias al Reglamento en cuanto al modo de calificar a los alumnos». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **101**, pp. 62–63.

Álvarez Díaz, E.: *El ejercicio de los problemas*. Instituto Samper, Madrid, 1936.

Bargalló Ardevol, Modesto: «La enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas francesas, por José M.ª Eyaralar». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **27**, pp. 260–261.

——: «La segunda llamada». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **91**, p. 16.

——: «Las metodologías del profesional». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **88**, pp. 106–108.

Bayón, David y Ledesma, Ángel: *El método de proyectos*. Imp. de la rev. Escuelas de España, 1934.

Bullón, Francisco: «La Geometría en mi escuela». *Revista de Pedagogía*, 1934, **152**, pp. 353–357.

Carbonell, María: *Temas de Pedagogía*. Imp. Hijos de F. Vives Mora, Valencia, 1920.

Carretero Riosalido, Daniel: «Una lección de Álgebra». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **20**, pp. 315–316.

——: «Una lección de Aritmética. Multiplicación de enteros». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **27**, p. 252.

Castellá Lloveras, Luis G.: «Ideas y consideraciones generales sobre la enseñanza en Francia». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. C/101 R.12.122.660, 1925.

Charentón, Aurelio Rodríguez: *Lecciones de cálculo. Grado elemental. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual*. Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?.

——: *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual*. Estudio de Juan Ortiz, Madrid. 193?.

——: *Las ciencias en la escuela: libro de lectura y de iniciación al estudio de la física, química e historia natural*. Estudio de Juan Ortiz, Madrid, 4.ª edición, 1926.

——: *Metodología de los problemas. Enseñanza razonada de los problemas de Aritmética y Geometría en la Escuela Primaria*. Editorial Instituto Samper, Madrid, 1930.

——: «Carta al Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Archivo JAE. Expediente JAE / 125-302, pp. 1-3, 1932.

Chico Rello, Pedro: «Una clase de Geografía V». *Revista de Escuelas Normales*, 1927, **41**, pp. 18–19.

——: «Grupo de Geografía. Impresión y deducciones». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **91**, pp. 6–10.

——: *Metodología de la Geografía*. Reus, Madrid, 1934.

Comas Camps, Margarita: «La enseñanza de las Matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1922, **6**, pp. 215–220.

——: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1923.

——: «Cómo se enseña la aritmética y la geometría». *Revista de Pedagogía*, 1923, **16**, pp. 142–147.

——: «El Cuestionario de las oposiciones a escuelas. Matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1925, **45**, pp. 406–409.

——: *Aritmética*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1928.

——: *El método Mackinder*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1930.

——: *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 5.ª edición, 1932.

——: *Metodología de la Aritmética y la Geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1932.

——: «Algunas contribuciones modernas a la Metodología de las Matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1934, **150**, pp. 241–247.

——: *El método de proyectos en las escuelas urbanas*. Losada, Buenos Aires, 6.ª edición, 1963. La edición original es: Madrid, Publicaciones de la Revista de Pedagogía, 1931.

Cossío, Manuel Bartolomé: *El maestro, la escuela y el material de enseñanza y otros escritos*. Biblioteca Nueva, Madrid, 2007. Edición de Eugenio Otero Urtaza.

Crantz, P.: *Aritmética y Álgebra*. Traducido por F. Lorente de Nó. Labor, Barcelona, 3.ª edición, 1932.

Detaille, L.: *La Metodología en acción*. Juan Ortiz, Madrid, 1933. Traducción de A. R. Charentón.

Dirección General de Enseñanza Primaria: «Circular dirigida a los directores de las Escuelas Normales del Magisterio primario». *Gaceta de Madrid*, 1932, **302**, pp. 631–632.

Durell: *General Arithmetics for Schools. Part II*. G. Bell and sons, LTD, London, 24.ª edición, 1957.

Estalella Graes, Josep: *Ciencia recreativa, enigmas y problemas, observaciones y experimentos, trabajos de habilidad y paciencia*. Gustavo Gili, Barcelona, 1918.

Eyaralar Almazán, José María: *Disco 'EYA' para el trazado de polígonos regulares y sus aplicaciones en la Escuela Primaria*. Miguel A. Salvatella, Barcelona.

——: «Escuela Normal de Maestros. Programa de Aritmética y Geometría. Curso de 1922 a 1923». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Trabajos. R 121 842.

——: «Escuela Normal de Maestros. Programa de Álgebra. Curso de 1922 a 1923». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Trabajos. R 121 841.

——: «Carta al Excmo. Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Residencia de Estudiantes. Archivo JAE. Expediente JAE / 49-170, pp. 1-2, 1914.

——: «Carta al Excmo. Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Residencia de Estudiantes. Archivo JAE. Expediente JAE / 49-170, pp. 3-5, 1919.

——: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Residencia de Estudiantes. Archivo JAE. Expediente de José María Eyaralar, JAE / 49-170, pp. 6-7, 1921.

——: «Carta al Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Archivo JAE. Expediente JAE / 49-170, pp. 8-9, 1922.

——: «Nota de los trabajos presentados por los alumnos de Matemáticas para la futura exposición. Escuela Normal de Barcelona». Expediente JAE / 49-170, pp. 10-11, 1922.

——: *Nuevo Tratado de Aritmética*. Reus, Madrid, 1922.

——: «Cómo se enseña la Aritmética y la Geometria, por Margarita Comas». *Revista de Escuelas Normales*, 1923, **6**, p. 175.

——: «El Cuestionario de matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1923, **7**, pp. 221–222.

——: «La enseñanza de las Matemáticas en las escuelas francesas». En: *Anales de la JAE*, tomo XIX, pp. 1–96, 1924.

——: «La investigación. Los números pitagóricos». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **17-18**, pp. 226–228.

——: «Lo profesional en la enseñanza de las matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **14**, pp. 115–116.

——: «Adopción de nuevos signos en Aritmética». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **24**, pp. 130–131.

——: *Conferencia sobre Aritmética Objetiva, dada en el Museo del Pedagógico Provincial de Baleares, el 10 de mayo de 1925*. Imp. de Guasp, Palma de Mallorca, 1925.

——: «El problema de los móviles en la Escuela Normal». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **27 y 30**, pp. 249–250 y 330–331.

——: «Enseñanza de la Geometría. El recortado de figuras». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **22**, pp. 52–53.

——: «El aparato «Arquímedes». Para la obtención de las áreas y los volúmenes de los cuerpos redondos». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **36**, pp. 210–212.

——: «La educación intelectual y la enseñanza de las matemáticas». *Revista de Pedagogía*, 1926, **49**, pp. 7–13.

——: «Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **34**, pp. 122–123.

——: «Una clase de Matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1927, **41, 44 y 45**, pp. 11–12, 143–145 y 181–183.

——: «El cálculo mental». *Revista de Escuelas Normales*, 1928, **50**, pp. 18–19.

——: «La explicación de los volúmenes». *Revista de Escuelas Normales*, 1928, **53 y 56**, pp. 137–138 y 202–203.

——: «Los conceptos fundamentales de la Geometría». *Revista de Escuelas Normales*, 1930, **75**, pp. 223–227.

——: *Aritmética Intuitiva*. Reus, Madrid, 1932.

——: «Curiosidades Matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **87**, pp. 90–92.

——: «Cursillo de información metodológica. Grupo de Matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **91**, pp. 4–5.

——: «Las Prácticas de Enseñanza». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **96**, pp. 74–76.

——: *Metodología de la Matemática*. Reus, Madrid, 1933.

——: «Los Cursillos de Selección». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **101**, pp. 38–41.

——: «Opiniones». *Revista de Escuelas Normales*, 1934, **102**, pp. 80–81.

——: «Carta al Excmo. Sr. Presidente de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas». Residencia de Estudiantes. Archivo JAE. Expediente JAE / 49-170, pp. 20-24, 1936.

——: *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría. Normas para su planteo y resolución*. Sardá, Guadalajara, 1936.

——: *Nociones de Aritmética y Geometría. Primer curso*. Sardá, Guadalajara, 1936.

Eyaralar Almazán, José María y Cebrián, Francisco: *Nuevo Tratado de Geometría*. Reus, Madrid, 1924.

Fuster, Julio: «La aritmética en el sentido de la acción». *Revista de Pedagogía*, 1930, **100**, pp. 211–216.

Gal, J. y Marijon, A.: *Les Problèmes résolus par la méthode naïve, barèmes, graphiques, formules*. F. Nathan, París, 1929.

——: *Los problemas resueltos por el método intuitivo. Tablas, Gráficas, Fórmulas*. Traducido por M.ª Josefa Pascual. Imprenta Santa Teresa, Sanlúcar de Barrameda, 1934.

Galán, G.: *Nociones y ejercicios de Matemáticas*. Lib. de Suc. de Hernando, Madrid, 1920.

García, Juan Francisco; Hernanz, Norberto y Bayón, David: *Programas escolares graduados. LETRAS Y CIENCIAS. Con instrucciones didácticas para su desarrollo*. Yagües, Madrid, 1932.

García Sánchez, Melchor: «Procedimientos de enseñanza». *La Escuela Moderna*, 1904, **155**, p. 89.

Gil Muñiz, Antonio: «Bases para la reforma de las Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1931, **81-82**, pp. 113–120.

Giner de los Ríos, Francisco: «Discurso de apertura del curso 1880-81 en la Institución Libre de Enseñanza», 1880. `http://www.tiempodehistoria.com/opinion/recordando-el-discurso-de-apertura-del-curso-1880-81...` Consultado el 10-10-2015.

González Linacero, Manuel: *Inventando Geometría*. Imp. y Lib. Religiosa de Jesús López, León, 1927.

Gutiérrez del Arroyo, Luis: «La enseñanza de la Aritmética y del Cálculo Mental». En: *Libro-Guía del maestro*, pp. 381–402. Espasa-Calpe, Madrid, 1936.

Hilbert, David: *The Foundations of Geometry*. Traducido por E.J. Townsend. The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1950.

Holzmüller, G.: *Tratado metódico de matemáticas elementales. Tomo primero*. Traducido por E. Latzina. Labor, Barcelona, 3.ª edición, 1936.

Junta Directiva: «Al margen de lo legislado. Formación del Magisterio primario». *Revista de Escuelas Normales*, 1931, **84**, pp. 37–38.

——: «La reunión de Directores de las Escuelas Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **87**, p. 81.

Junta Directiva de la Asociación del Profesorado de Escuelas Normales: «La Escuela de Estudios Superiores del Magisterio». *Boletín de Escuelas Normales*, 1922, **2**, pp. 1–2.

Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas: «Memoria correspondiente á los años 1908 y 1909». Establecimiento tipográfico de los hijos de M. Tell, 1910.

——: «Memoria correspondiente á los años 1910 y 1911». Madrid, 1912.

——: «Memoria correspondiente á los años 1912 y 1913». Madrid, 1914.

——: «Memoria correspondiente á los años 1914 y 1915». Madrid, 1916.

——: «Memoria correspondiente á los años 1918 y 1919». Madrid, 1920.

——: «Memoria correspondiente á los años 1920 y 1921». Madrid, 1922.

——: «Memoria correspondiente á los años 1922-3 y 1923-4». Madrid, 1925.

——: «Memoria correspondiente á los años 1924-5 y 1925-6». Madrid, 1927.

Landrove Moiño, Federico: «La enseñanza de la geometría. La comprensión de la forma. La invención y el recortado de figuras». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **19**, pp. 269–271.

——: «La enseñanza de la Geometría». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **29**, pp. 12–13.

Llardent Esmet, Antonio: *Curso de Geometría*. Imp. y enc. de Julio Cosano, Madrid, 3.ª edición, 1921.

——: *Nociones y Ejercicios de Aritmética y Geometría*. Imp. y enc. de Julio Cosano, Madrid, 3.ª edición, 1921.

——: *Curso de Aritmética*. Imp. de Julio Cosano, Madrid, 3.ª edición, 1924.

Llopis Ferrándiz, Rodolfo: «Circular del Director General». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **93**, pp. 60–61.

——: «Propósitos y realidades. Ocho meses en la Dirección General». *Revista de Pedagogía*, 1932, **121**, pp. 2–6.

Llorca García, Ángel: «A nuevo Estado, nueva escuela. La escuela de la República española». *Revista de Pedagogía*, 1932, **125**, pp. 215–223.

Loperena, Pedro; Salazar Chapeta, José; Manuel Nogueras, Francisco; Galés, Manuel; Ribera Villará, Juan y Sancho, M.: «En defensa de la Escuela Superior del Magisterio». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **25**, pp. 197–198.

López Uceda, Cándido: «Primeras lecciones de Aritmética». En: *Anales de la JAE*, tomo XIX, memoria 7.ª, pp. 285–294. Madrid, 1924.

López Velasco, Elisa: *La práctica del Dibujo en la Escuela Primaria. Tomo IV*. Espasa-Calpe, 1933.

Lorenzo, Antonia: «La preparación del Magisterio». *Revista de Pedagogía*, 1931, **114**, pp. 261–266.

Luzuriaga, Lorenzo: *Las escuelas nuevas*. Publicaciones del Museo Pedagógico Nacional. J. Cosano, Madrid, 1923.

——: «El juego y el trabajo en la educación». *Revista de Pedagogía*, 1929, **93**, p. 414.

——: *La educación de nuestro tiempo*. Losada, Buenos Aires, 1957.

——: *Métodos de la nueva educación*, capítulo Conceptos de la nueva educación. Losada, Buenos Aires, 3.ª edición, 1961.

——: *La Educación Nueva*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1964. Edición original de 1927, por la Revista de Pedagogía.

Macé, Jean: *L'Arithmétique du grand-papa. Histoire de deux marchands de pommes*. I. Hetzel et Cie, París, 3.ª edición.

——: *Aritmética del abuelo. Historia de dos vendedores de manzanas*. Traducido por G. Fraile y D. Tejada. Imprenta de T. Fortanet, Madrid, 1868. Traducido por G. Fraile y D. Tejada.

Maeztu Whitney, María de: «Escuelas Normales». En: *Libro-Guía del Maestro*, pp. 119–129. Espasa-Calpe, Madrid, 1936.

Mahler, Gottfried: *Ebene Geometrie*. Walter de Gruryter and Co., Leipzig, 1897. `https://archive.org/details/ebenegeometrie00mahl`. Consultado el 10-10-2015.

——: *Geometría del plano*. Traducido por Federico Alicart. Labor, Barcelona, 1927.

Manuel Nogueras, Francisco: «Los trabajos manuales, ayer y hoy». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **88**, pp. 102–104.

——: «Sobre material pedagógico. Conceptos sueltos». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, pp. 143–144.

Martí Alpera, F.: *Aritmética, Geometría y Trabajo Manual*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1925.

Martí Alpera, Félix: *Ensayos del método de proyectos*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 1934.

Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes: «REGLAMENTO por el que ha de regirse la Junta para ampliación de estudios é investigaciones científicas». *Gaceta de Madrid*, 1910, **28**, pp. 198–200. `http://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1910/028/A00198-00200.pdf`. Consultado el 10-10-2015.

——: «Real Decreto de 30 de agosto de 1914, por el que se reorganizan las Escuelas Normales». *Gaceta de Madrid*, 1914, **245**, pp. pp. 562–567. `https://www.boe.es/datos/pdfs/BOE//1914/245/A00562-00567.pdf`. Consultado el 10-10-2015.

Nelson, Ernesto: *Aritmética Inventiva*. Appleton y Cía, Nueva York, 1918. Primera edición de 1906.

Palau Vera, J.: *Geometría. Estudio de las formas*. Seix Barral, Barcelona, 1914.

——: *Aritmética. Primer grado*. Seix Barral, Barcelona, 5.ª edición, 1931. 1.ª edición de 1913.

Paluzie Lucena, Josep y Sáiz Salvat, Felipe: *Cálculos Aritméticos. Vol. 1-12*. Imp. Elzeviriana y Libr. Cami, Barcelona.

Paunero Ruiz, Luis: «Lo que puede ser un curso de Metodología». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **86**, pp. 64–66.

——: «Memoria que presenta el profesor L. Paunero Ruiz aspirante a una pensión de ampliación de estudios en el extranjero, exponiendo las razones de su petición y plan que se propone seguir para el mejor aprovechamiento del tiempo». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Trabajos. R 123 089. JAE/P-19, Sevilla, 1932.

——: «La enseñanza de la Geometría en la Escuela primaria dirigida hacia la orientación profesional». Residencia de Estudiantes, Archivo JAE. P-17. R 123-020, Bruxelles, 1933.

——: «Una lección sobre proyecciones en el espacio». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **96**, pp. 67–70.

——: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, 30 de enero de 1934». Archivo de la JAE. Expediente JAE / 111-137, pp. 49-50, 1934.

——: «Memoria presentada por el solicitante Luis Paunero Ruiz (Metodología de las Matemáticas». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Trabajos. R 123 036. JAE/P-18, 1934.

——: «Relación y justificantes de trabajos, publicaciones y conferencias». Archivo de la JAE. Expediente JAE / 111-137, pp. 51-53, 1934.

——: *Ensayo. Las matemáticas en la educación*. Tipografía Heliópolis, Sevilla, 1935.

——: «El Congreso Internacional de Enseñanza de Bruselas. Comentarios». *Revista de Escuelas Normales*, 1936, **120**, pp. 132–133.

Puig, J.B.: *Geometría y nociones de agrimensura y arquitectura*. Dalmau Carles, Gerona, 1914.

Puig Adam, Pedro: «Notas sobre Pedagogía Matemática». *Revista Matemática Hispano-Americana*, 1929, **4(2)**, pp. 129–131.

——: «Consideraciones generales sobre la pedagogía matemática en la Segunda Enseñanza». *Gaceta Selecta. Antología de las revistas publicadas por la RSME en sus cien primeros años. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15(1) (suplemento)**, pp. 129–131. Originalmente publicado en la Revista Matemática Hispano-Americana. Tomo IV.

Rey Pastor, Julio: *Lecciones de Álgebra*. El autor, Madrid, 2.ª edición, 1924.

——: *Elementos de Análisis Algebraico*. El autor, Madrid, 3.ª edición, 1930.

——: «Valor educativo de la enseñanza de la matemática». *La Escuela Moderna*, 1931, **476**, pp. 203–214.

——: «Panorama de la enseñanza matemática». *Gaceta Selecta. Antología de las revistas publicadas por la RSME en sus cien primeros años. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15(1) (suplemento)**, pp. 141–144. Originalmente publicado en la revista Matemática Elemental, 1.ª serie, tomo II, 1933, pp. 17-20.

Rey Pastor, Julio y Puig Adam, Pedro: *Elementos de aritmética. Colección Elemental intuitiva. Tomo I*. Imprenta de A. Marzo, Madrid, 3.ª edición, 1928. La primera edición es de 1927.

——: *Elementos y Complementos de Geometría. Colección Elemental Intuitiva*. Imprenta de A. Marzo, Madrid, 1933.

——: *Metodología y Didáctica de la Matemática elemental. Tomo I. Metodología*. Imprenta de A. Marzo, Madrid, 1933.

——: *Bachillerato. Matemáticas. Primer curso*. Unión Tipográfica S.A., Madrid, 1934.

——: *Elementos de Geometría. Colección elemental intuitiva. Tomo II*. Imp. de Afrodisio Aguado, Madrid, 5.ª edición, 1942. La primera edición es de 1928.

Romero Carrasco, Francisco: «Cursos preparatorios». *Revista de Escuelas Normales*, 1930, **69**, pp. 7–9.

——: «Carta dirigida al Sr. Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios, 24 de febrero de 1932». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Expediente JAE / 127-453, pp. 41-43, 1932.

——: *Metodología de las Matemáticas. Procedimientos de cálculo mental y de cálculo escrito rápido*. Tip. y Lib. de A. Arqueros, Badajoz, 1933.

——: «Carta dirigida al Sr. Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios». Residencia de Estudiantes. Archivo de la JAE. Expediente JAE / 127-453, pp. 44-46, 1936.

Roselló, P.: «La instrucción pública mundial 1931-1932». *Revista de Pedagogía*, 1932, **132**, pp. 531–537.

Rouse Ball, W.W.: *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*. J. Hermann, París, 1916. Primera edición de 1909.

Sáinz, Fernando: *El método de Proyectos*. Losada, Buenos Aires, 1961. La primera edición es de la Revista de Pedagogía, en 1930.

Sáiz Salvat, Felipe: *Geometría y ampliación. Didáctica. Trigonometría*. El autor, Málaga. 195?.

——: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios en el extranjero. 12 de abril de 1920». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Expediente JAE 130-56, pp. 3-6, 1920.

——: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios en el extranjero. 26 de marzo de 1921». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Expediente JAE 130-56, pp. 9-10, 1921.

——: «Carta dirigida al Presidente de la Junta para Ampliación de Estudios y pensiones al extranjero. 14 de octubre de 1922». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Expediente JAE 130-56, pp. 11-13, 1922.

——: «Notas sobre metodología didáctica de la Aritmética». Residencia de Estudiantes, Archivo de la JAE. Expediente JAE 130-56, pp. 14-20, 1922.

——: «El Plan de las Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **16**, p. 205.

——: «La enseñanza de las Matemáticas. El cálculo mental». *Revista de Escuelas Normales*, 1924, **15**, p. 157.

——: «El sentido de la Normal». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **25**, pp. 176–177.

——: «Programas escolares. Aritmética, Geometría y Trabajo manual, por Félix Martí Alpera». *Revista de Escuelas Normales*, 1925, **27**, pp. 259–260.

——: «La reforma de las Normales. Sugestiones». *Revista de Escuelas Normales*, 1926, **31**, p. 31.

——: «"Geometría elemental", por Manuel Xiberta Roqueta». *Revista de Escuelas Normales*, 1927, **48**, p. 311.

——: *Ejercicios y problemas de álgebra*. Librería Bastinos de José Bosch, Barcelona, 1930.

——: «La nueva didáctica». *Revista de Escuelas Normales*, 1930, **75**, pp. 228–230.

——: *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental*. Imp, Mercé, Castellón, 1931.

——: «La enseñanza de las Matemáticas. Al margen de la Reforma de Normales». *Revista de Escuelas Normales*, 1931, **83**, pp. 3–5.

——: «Volumen del cono». *Revista de Escuelas Normales*, 1931, **85**, pp. 45–46.

——: «De la organización didáctica». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **94**, pp. 4–6.

——: «La Topografía escolar». *Revista de Escuelas Normales*, 1933, **97 y 103**, pp. 101–103 y 105–107.

——: *Aritmética experimental. Libro del maestro*. Imp. Elzeviriana y Librería Camí, S.A., Barcelona, 1936.

——: *Aritmética experimental. Libro primero*. Imp. Elzeviriana y Librería Camí, S.A., Barcelona, 1936.

Sánchez Pérez, José Augusto: «Notas de metodología matemática». En: *Congreso de Oporto. Tomo III. Ciencias Matemáticas*, pp. 5–22. Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Madrid, 1921.

——: *Tratado de Aritmética*. Tip. Sucesor de J. Peláez, Toledo, 1922. Primera edición en 1914.

——: «Notas de metodología matemática». En: *Congreso de Salamanca. Tomo III. Ciencias Matemáticas*, pp. 39–54. Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Madrid, 1924.

——: «Cursillo de información metodológica. Grupo de Matemáticas: Conferencias. Metodología matemática». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **92 y 93**, pp. 24–28, 43–47.

Sánchez Sarto, Luis (Ed.): *Diccionario de Pedagogía. Tomo primero*. Labor, Barcelona, 1936.

Solana, Ezequiel: *Curso completo de Pedagogía*. El Magisterio Español, Madrid, 1925.

Spencer, W.J.: *Geometría inventiva*. D. Appleton y Compañía, Nueva York, 1882.

Stevenson, John Alford: *The project method of teaching*. The Macmillan Company, USA, 1921. `http://archive.org/stream/projectmethodoft00stevuoft/projectmethodoft00stevuoft_djvu.txt`. Consultado el 10-10-2015.

Valls, Vicente: *El material de enseñanza*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid, 2.ª edición, 1928.

——: «La educación nueva en la práctica. El estudio de la naturaleza y la escuela activa». *Revista de Pedagogía*, 1929, **90**, pp. 246–252.

Vázquez, Claudio: «Algunas ideas sobre los cursos de Metodología». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **89**, pp. 123–124.

Xiberta Roqueta, Manuel: *Elementos de Álgebra*. La editorial gerundense, Gerona, 1920.

——: *Geometría elemental*. Imp. y Lib. de Antonio Franquet y Gusiñé, Gerona, 3.ª edición, 1926.

——: *Elementos de Geometría*. Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, Madrid, 1928.

——: *Elementos de Aritmética*. Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, Madrid, 1929. Primera edición de 1928.

——: «Metodología de las Matemáticas». *Revista de Escuelas Normales*, 1932, **90**, pp. 147–148.

——: *Trigonometría Rectilínea y Nociones de Agrimensura*. Tall. Gráficos de Solomón Marqués, Gerona, 1932.

——: *Matemáticas. Metodología y Prácticas*. Gerona: Talleres Gráficos de Solomón Marqués, 1934.

Xiberta Roqueta, Manuel y Xiberta Peremateu, Juana: *Aritmética y su Metodología*. Suc. tipografía Careras, Gerona, 9.ª edición, 1961.

——: *Trigonometría y Nociones de agrimensura*. Suc. Tipografía Carreras, Gerona, 7.ª edición, 1962.

Fuentes secundarias consultadas

Artaud, Michèlle: «Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques». En: M. Bailleul; C. Comiti; J.L. Dorier; J.B. Lagrange; B. Parzysz y M.H. Salin (Eds.), *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 101–139. ARDM et IUFM, Caen, 1998.

Artigue, Michelle: *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, capítulo La enseñanza de los principios del cálculo:problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, pp. 97–140. Grupo Editorial Iberoamericano, Bogotá, 1995.

——: «Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work». *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 2002, **7**, pp. 245–274.

Assude, Teresa: «De l'écologie et de l'économie d'un système didactique: une étude de cas». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1996, **16(1)**, pp. 47–72.

Assude, Teresa; Coppé, Sylvie y Pressiat, André: «Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège: atomisation et réduction». En: Lalina Coulange; Jean-Philippe Drouhard; Jean-Luc Dorier y Aline Robert (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*, pp. 41–62. La Pensée Sauvage, Grenoble, 2012.

Aubert, Paul (Ed.): *Antonio Machado hoy (1939-1989). Coloquio internacional organizado por la Fundación Antonio Machado y la Casa de Velázquez*. Casa de Velázquez, Madrid, 1994.

Balacheff, Nicolas: *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Traducido por Pedro Gómez. Una empresa docente. Universidad de los Andes, Bogotá (Colombia), 2000. `http://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-00520133/document`. Consultado el 10-10-2015.

Barquero, Berta: *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2009.

Barreiro, Herminio: «Lorenzo Luzuriaga y el movimiento de la Escuela Única en España. De la renovación educativa al exilio (1913-1959)». *Revista de Educación*, 1989, **289**, pp. 7–48.

Bernal Martínez, José Mariano: *Renovación Pedagógica y Enseñanza de las Ciencias. Medio siglo de propuestas y experiencias escolares (1882-1936)*. Biblioteca Nueva, Madrid, 2001.

Bolea Catalán, Pilar: *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2002.

Bolea Catalán, Pilar; Bosch Casabó, Marianna y Gascón Pérez, Josep: «La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2001, **21(3)**, pp. 247–304.

Bosch Casabó, Marianna y Gascón Pérez, Josep: «Las prácticas docentes del profesor de matemáticas». *Boletín SI-IDM*, 2001, **13**. `www.ugr.es/~godino/siidm`.

——: «25 años de transposición didáctica». En: L. Ruiz Higueras; A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 385–406. Diputación de Jaén, Jaén, 2007.

——: «Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas. De los 'talleres de prácticas' a los 'recorridos de estudio e investigación'». En: A. Bronner y al. (Eds.), *Diffuser les mathematiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 55–91. IUFM de l'Academie de Montpellier, Montpellier, 2010.

Bosch Casabó, Marianna; Gascón Pérez, Josep y Sierra Delgado, Tomás: «Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: el caso de los sistemas de numeración». En: M.J. González; M.T. González y J Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 139–150. SEIEM, Santander, 2009.

Bronner, A.; Larguier, M.; Artaud, M.; Bosch, M.; Chevallard, Y.; Cirade, G. y Ladage, C. (Eds.): *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. IUFM de l'Académie de Montpellier, 2010.

Brousseau, Guy: «Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques». *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 1986, **7(2)**, pp. 33–115.

——: «Le contrat didactique: le milieu». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1990, **9(3)**, pp. 309–336.

——: *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage, Grenoble, 1998.

——: *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas, de Guy Brousseau*. Traducido por Dilma Fergona. Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2007.

——: «Le calcul «à la plume» des multiplications et des divisions élémentaires». ARDM, 2007. `http://www.ardm.eu/files/Francais_Calcul_partie1.pdf`. Consultado el 10-10-2015.

Cabassut, Richard: *Démonstrations, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et an Allemagne*. Tesis doctoral, Université Paris 7, París, 2005. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009716`. Consultado el 10-10-2015.

——: «Dans les manuels scolaires la rencontra entre la validation mathématique et les validations non mathématiques: Un example de double dialectique des medias et des milieux». En: *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 751–770. IUFM de l'Academie de Montpellier, 2010.

——: «The double transposition in proving». En: *Proceedings of CERME 6*, INRP, Lyon (France), 2010. `www.inrp.fr/editions/cerme6`. Consultado el 10-10-2015.

Cajori, Florián: *A History of Elementary Mathematics*. Cosimo, New York, 2007.

Capitán Díaz, Alfonso: *Educación en la España Contemporánea*. Ariel, Barcelona, 2000.

Carreño, Myriam; Colmenar, Carmen; Egido, Inmaculada y Sanz, Florentino: *Teorías e instituciones contemporáneas de educación*. Síntesis, Madrid, 2000.

Carrillo Gallego, Dolores: «La codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas. Pestalozzi y la enseñanza mutua». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2004, **24(1)**, pp. 11–44.

——: *La Metodología de la Aritmética en los comienzos de los Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*. Tesis doctoral, Universidad de Murcia, 2005.

Carrillo Gallego, Dolores; Saá Rojo, María Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: *El aprendizaje del número y las regletas de Cuisenaire*. Universidad de Murcia, Murcia, 1989.

Carrillo Gallego, Dolores y Sánchez Jiménez, Encarna: «Aprender matemáticas jugando: la propuesta educativa de José María Eyaralar». En: Agustín Escolano (Ed.), *La cultura material de la escuela. En el centenario de la Junta para la Ampliación de Estudios, 1907-2007*, pp. 183–194. CEINCE, Berlanga de Duero, 2007.

——: «Enseñanza intuitiva y representaciones gráficas en Eyaralar». En: Víctor Juan (Ed.), *Museos Pedagógicos. La memoria recuperada*, pp. 175–183. Museo Pedagógico de Aragón, Huesca, 2008.

——: «La validación en la formación de maestros». En: M. Bosch y al. (Eds.), *Un panorama de la TAD*, tomo 10, pp. 283–298. Centre de Recerca Matemática, Bellaterra (Barcelona), 2011.

——: «El uso de materiales en la enseñanza de la matemática escolar». En: Pedro Luis Moreno y Ana Sebastián (Eds.), *Patrimonio y Etnografía de la escuela en España y Portugal durante el siglo XX*, pp. 181–196. SEPHE y SEM, Murcia, 2012.

——: «El material de enseñanza en las praxeologías de formación de maestros en España (1920-1936)». En: *IVe Congrès International sur la TAD*, IUFM de l'Academie de Toulouse, Toulouse (Francia), 2013. En prensa.

——: «Propuestas de uso de los instrumentos de dibujo para la enseñanza de la Geometría en la edad de plata». En: Ana María Badanelli Rubio; María Poveda Sanz y Carmen Rodríguez Guerrero (Eds.), *Pedagogía museística. Prácticas, usos didácticos e investigación del patrimonio educativo*, pp. 391–400. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Educación, Madrid, 2014.

Casado, Ángel: «Filosofía y educación en España: Luzuriaga y la Revista de Pedagogía. Bajo Palabra». *Revista de Pedagogía II Época*, 2011, **6**, pp. 53–62.

Chachaoua, Hamid y Comiti, Claude: «L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique». En: A. Bronner y al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 771–789. IUFM de l'Academie de Montpellier, Montpellier, 2010.

Chevallard, Yves: *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage, Grenoble, 1991. Segunda edición aumentada. La primera edición es de 1985.

——: «L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1999, **19(2)**, pp. 221–266.

——: «Aspectos problemáticos de la formación docente». En: *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, pp. 1–10. Huesca, 2001. `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15`. Consultado el 10-10-2015.

——: «Organiser l'etude: 1. Structures & Fonctions». En: *XIe école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3–32. La Pensée sauvage, Grenoble, 2001.

——: «Organiser l'étude: 3. Ecologie et régulation». En: *XIe école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 41–56. La Pensée Sauvage, Grenoble, 2002.

——: «La place del mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire». En: *3e Université d'été Animath*, Saint-Flour, 2004.

——: «Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire». En: *Journées de didactique comparée*, Lyon, 2004. `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45`. Consultado el 10-10-2015.

——: «Steps towards a new epistemology in mathematics education». En: *IV Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 4. Sant Feliu de Guíxols, 2005.

——: «La problèmatique anthropologique en didactique, de hier à demain». En: *Actas del I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Baeza (España), 2006.

——: «Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique». En: Luisa Ruiz Higueras; Antonio Estepa y Francisco Javier García (Eds.),

Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, pp. 1–41. Diputación de Jaén, Jaén, 2007.

Chevallard, Yves; Bosch, Marianna y Gascón, Josep: *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. I.C.E Universitat Barcelona and Horsori, Barcelona, 1997.

Chevallard, Yves y Bosch Casabó, Marianna: «Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée». *Petit x*, 2001, **55**, pp. 5–32.

——: «Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations». *Petit x*, 2002, **59**, pp. 43–76.

Cid Castro, Eva y Bolea Catalán, Pilar: «Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico». En: A. Bronner; M. Larguier; M. Artaud; Y. Chevallard; G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 575–595. IUFM de l'Academie de Montpellier, Montpellier, 2010.

Cirade, Gisèle: «Les professeurs en formation initiale face au casse-tête des nombres». En: A. Bronner; M. Larguier; M. Artaud; M. Bosch; Y. Chevallard; G. Cirade y C Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, pp. 327–347. IUFM de l'Académie de Montpellier, Montpellier, 2010.

Comas Rubí, Francesca: *Les relacions de la JAE (Junta para la Ampliación de Estudios) amb Balears. Els viatges pedagògics i la renovació educativa*. Tesis doctoral, Universitat de les Illes Balears, 2000.

Conejo Garrote, Laura y Ortega del Rincón, Tomás: «Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes españolas». *Números*, 2014, **87**, pp. 5–23.

De Villiers, Michael: «El papel y la función de la demostración en matemáticas». *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 1993, **26**, pp. 15–30.

——: «To teach definitions in geometry or teach to define?» En: A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *PME 22 Proceedings*, pp. 248–255. Univ. Stellenbosch, RSA, 1998.

——: «An example of the discovery function of proof». *Mathematics in School*, 2007, **36(4)**, pp. 9–11.

Delgado Martínez, María de los Ángeles: *Margarita Comas Camps (1892-1972). Científica i pedagoga*. Govern de les Illes Balears, Palma de Mallorca, 2010.

Díez Torre, Alejandro Ramón; Pozo Andrés, María del Mar del y Segura Redondo, Manuel: «La "Revista de Escuelas Normales" una publicación de regeneración normalista nacida en Guadalajara (1923-1936)». *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 1988, **1**, pp. 9–30.

Dolz, Joaquim y Leutenegger, Francia: «L'analyse des practiques: une démarche fondamentale dans la formation des enseignants». *Revue FPEQ*, 2015, **18**, pp. 7–16.

Douady, Regine: «Jeux de cadres et dialectique outil-objet». *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 1986, **7(2)**, pp. 5–31.

——: «Des apportes de la didactique des mathématiques a l'enseignement». *Reperes-IREM*, 1992, **6**, pp. 132–158.

Espinoza, Lorena; Barbé, Joaquim y Gálvez, Grecia: «Análisis de la tecnología didáctica de profesores que gestionan procesos de enseñanza aprendizaje matemáticos que incorporan TIC en el aula». En: M. Bosch y al. (Eds.), *Un panorama de la TAD*, pp. 321–347. Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona, España, 2011.

Euclides: *Elementos. Libros I-IV*. Traducido por M.ª Luisa Puertas Castaños. Gredos, Madrid, 1991.

Ferrà-Ponç, Damià: *Escrits sobre Llorenç Villalonga*. Universitat de les Illes Balears, Barcelona, 1997. Pròleg i edició a cura de Pere Roselló Bover.

Font, Vicenç; Díaz Godino, Juan y D'Amore, Bruno: «An onto-semiotic approach to representations in mathematics education». *For the learning of mathematics*, 2007, **27(2)**, pp. 2–7.

Formentín Ibánez, Justo y Rodríguez Fraile, Esther: *La Fundación Nacional para Investigaciones Científicas (1931-1939): actas del Consejo de Administración y estudio preliminar*. CSIC, Madrid, 2001.

Fregona, Dilma y Orús Báguena, Pilar: *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2011.

Gascón Pérez, Josep: «Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1993, **13(3)**, pp. 295–332.

——: «Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 2001, **4**, pp. 129–159.

Gascón Pérez, Josep y Bosch Casabó, Marianna: «La miseria del 'generalismo pedagógico' ante el problema de la formación del profesorado». En: Josep Gascón y Marianna Bosch (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 201–240. Diputación Provincial de Jaén, Jaén, 2007.

Godino, Juan Díaz; Batanero Bernabeu, Carmen y Font Moll, Vicenç: «The onto-semiotic approach to research in mathematics education». *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 2007, **39(1-2)**, pp. 127–135.

Godino, Juan Díaz; Batanero Bernabeu, Carmen y Font Moll, Vicenç: «Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática», 2009. http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm. Consultado el 10-10-2015.

Godino, Juan Díaz; Font Moll, Vicenç y Willhelmi, Miguel R.: «Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 2006, **9 (Especial)**, pp. 133–156.

González Redondo, F.A.; De Vicente Laseca, L. y Fernández Terán, R.E.: «Génesis y problemática institucional del Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios». En: J.M. Sánchez Ron y J. García Velasco (Eds.), *100 JAE. La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas en su centenario*, tomo I, pp. 670–697. Fundación Francisco Giner de los Ríos y Publicaciones de la Residencia de Estudiantes, 2010.

González Redondo, Francisco A.: «Las revistas de la Real Sociedad Matemática Española, 1911-2011». *Gaceta Selecta. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2012, **15 (1) (suplemento)**, pp. 9–36.

González Redondo, Francisco A.; Vicente Laseca, Lourdes y Fernández Terán, Rosario E.: «La organización de la educación matemática en la Junta para la Ampliación de Estudios». *Revista Complutense de Educación*, 2008, **19(1)**, pp. 137–153.

Hitzcovich, Horacio: *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2005.

Ibañes Jalón, Marcelino J. y Ortega del Rincón, Tomás: «Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de Trigonometría en Bachillerato». En: *VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, SEIEM, Logroño, 2002. http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Ibanes02.pdf. Consultado el 10-10-2015.

——: «Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato». *Números*, 2004, **57**, pp. 19–32.

——: «Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato». *Números*, 2005, **61**, pp. 19–40.

Ifrah, Georges: *Historia Universal de las Cifras*. Madrid, 2.ª edición, 1997. Edición original: Histoire universelle des chiffres, 1981, Éditions Robert Laffont, Paris.

Konic, Patricia M.; Godino, Juan Díaz y Rivas, Mauro A.: «Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto». *Números*, 2010, **74**, pp. 57–74.

Ladage, C. y Chevallard, Y.: «La place du portfolio dans la conception et l'implémentation d'une organisation didactique: problèmes ouverts». Comunicación al symposium «Éthique et usage des TICE en éducation» del coloquio international «Efficacité & Équité en Éducation» (Rennes, noviembre, 2008), 2008. `http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=157`.

Larse, S. y Zandieh, M.: «Conjecturing and Proving as Part of the Process of Defining». En: G.M. Lloyd; J.L.M. Wilson y S.L Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th PME-NA*, pp. 797–804, 2005. `http://www.web.pdx.edu/~slarsen/ResearchPapers/pmena05LarsenZandieh.pdf`.

López Esteban, Carmen: *La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto*. Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, 2011.

López Martínez, José Damián: *Aurelio Rodríguez Charentón, un maestro en el olvido*. Editum. Ediciones de la Universidad de Murcia, Murcia, 2014.

Mainer, Juan y Mateos, Julio: «Los inciertos frutos de una ilusionada siembra. La JAE y la Didáctica de las Ciencias Sociales». *Revista de Educación*, 2007, **Número extraordinario**, pp. 191–214. `http://www.revistaeducacion.mec.es/re2007_09.htm`. Consultado el 10-10-2015.

Mainer Baqué, Juan: *La forja de un campo profesional: pedagogía y didáctica de las Ciencias Sociales en España (1900-1970)*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2009.

Margolinas, Claire y Wozniak, Floriane: «Usage des manuels dans le travail de l'enseignant: l'enseignement des mathématiques à l'école primaire». *Revue des sciences de l'éducation*, 2009, **35(2)**, pp. 59–82. `http://id.erudit.org/iderudit/038729ar`.

Marín Eced, Teresa: *La renovación pedagógica en España (1907-1936). Los pensionados en Pedagogía por la Junta para la Ampliación de Estudios*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1990.

——: *Innovadores de la Educación en España*. Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca, 1991.

Marín Ibañez, Ricardo: «Los ideales de la Escuela Nueva». *Revista de Educación*, 1976, **242**, pp. 23–42.

Martínez Alfaro, Encarnación: *Un laboratorio pedagógico de la Junta para la Ampliación de Estudios. El Instituto-Escuela sección Retiro de Madrid*. Biblioteca Nueva, Madrid, 2009.

Martínez Recio, Ángel: «La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica». En: *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 27–44. Almería, 2002.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte: «Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato». BOE, 3 de enero de 2015, pp. 169-546, 2015.

Molero Pintado, Antonio: «La Escuela de Estudios Superiores del Magisterio y su entorno histórico y educativo». En: Antonio Molero Pintado y María del Mar del Pozo Andrés (Eds.), *Escuela de Estudios Superiores del*

Magisterio(1909-1932): Un precedente histórico en la Formación Universitaria del Profesorado Español, pp. 17–44. Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares, Madrid, 1989.

Molero Pintado, Antonio y Pozo Andrés, María del Mar del (Eds.): *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio(1909-1932): Un precedente histórico en la Formación Universitaria del Profesorado Español*. Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares, Madrid, 1989.

Monterrubio Pérez, María Consuelo y Ortega del Rincón, Tomás: «Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones». En: SEIEM (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 37–53. González, M.T. and Murillo, J., Santander, 2009.

——: «Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas». *PNA*, 2011, **5(3)**, pp. 105–127.

——: «Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria». *Revista de Educación*, 2012, **358**, pp. 471–496.

Moreno Martínez, Pedro Luis: «Los pensionados de la Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE) y la Higiene Escolar». *Revista de Educación*, 2007, **Número extra, 1**, pp. 167–190. Ejemplar dedicado a: Reformas e innovaciones educativas (España, 1907-1939).

——: «Rosa Sensat, la cultura material de la escuela y el material de enseñanza». *Temps d'Educatió*, 2013, **44**, pp. 77–44.

Noirfalise, Annie y Matheron, Yves: *Enseigner les Mathématiques a l'École Primaire. Géométrie, Grandeurs et Mesures*. Vuibert, Munich, 2009.

Nóvoa, Antonio: «Carta a un joven historiador de la educación». *Historia y Memoria de la Educación*, 2015, **1**, pp. 23–58.

Núñez Espallargas, José María y Servat Susagne, Jordi: «La matemática en la Institución Libre de Enseñanza: concepciones teóricas y pedagógicas». *Llull*, 1988, **11(20)**, pp. 75–96.

Ortega del Rincón, Tomás: «Modelo de valoración de textos matemáticos». *Números*, 1996, **28**, pp. 4–12.

Ortega del Rincón, Tomás y Ibañes Jalón, Marcelino J.: «Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de bachillerato». *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 2001, **28**, pp. 39–59.

Ortiz de Haro, Juan Jesús: *La probabilidad en los libros de texto*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, 2001.

Ouvrier-Buffet, Cécile: «An Activity for constructing a Definition». En: *Proceedings PME 26*, pp. 4–25, 2002.

——: «Construction de définitions – construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques», 2003. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515`. Consultado el 10-10-2015.

——: «Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve. Étude épistémologique et enjeux didactiques», 2013. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00964093`. Consultado el 10-10-2015.

Payá Rico, Andrés: *La actividad lúdica en la historia de la educación española contemporánea*. Tesis doctoral, Universitat de Valencia, Valencia, 2007.

Pino Arabolaza, Pilar del: «Incidencia del Seminario Laboratorio Matemático en la investigación española en matemáticas (1919-1936)». En: José Manuel Sánchez Ron (Ed.), *1907-1987. La Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas 80 años después*, tomo II, pp. 329–348. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1988.

Pozo Andrés, María del Mar del: «La innovación metodológica y la formación del profesorado en la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio». En: Antonio Molero Pintado y María del Mar del Pozo Andrés (Eds.), *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio(1909-1932): Un precedente histórico en la Formación Universitaria del Profesorado Español*, pp. 65–140. Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares, Madrid, 1989.

——: «La Escuela Nueva en España: crónica y semblanza de un mito». *Historia de la Educación*, 2003-2004, **22-23**, pp. 317–346.

——: «El movimiento pedagógico de la Escuela Nueva». En: María del Mar del Pozo Andrés (Ed.), *Teorías e instituciones contemporáneas de educación*, pp. 197–220. Biblioteca Nueva, Madrid, 2004.

——: «The transnational and national dimentions of pedagogical ideas: the case of the project method, 1918-1939». *Paedagogica Historica: International Journal of the History of Education*, 2009, **45(4-5)**, pp. 453–693.

Real Academia Española de la Lengua: *Diccionario de la Lengua Española*. `www.rae.es`.

Robert, Aline: «Laisser chercher les élèves? Les faire travailler en petits groupes?» *L'Ouvert*, 2008, **117**, pp. 31–46.

Robert, Aline; Penninckx, Jacqueline y Lattuati, Marie: *Une camera au fond de la classe de mathématiques*. Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon, 2012.

Rodríguez Fernández, José Luis y Ruiz Higueras, Luisa: «La transparencia de los hechos didácticos en la enseñanza de las matemáticas». *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 1999, **32**, pp. 69–78.

Romero de Pablos, Ana: «Ampliación de espacios y saberes para la ciencia en España: la física, la química y las matemáticas en la JAE». En: José Manuel Sánchez Ron; A.Q. Lafuente; A Romero y L. Sánchez de Andrés (Eds.), *El laboratorio de España. La Junta para la Ampliación de*

Estudios e Investigaciones Científicas 1907-1939, pp. 264–297. Sociedad Estatal de Conmemoraciones Culturales. Publicaciones de la Residencia de Estudiantes, Madrid, 2007.

Ruiz Berrio, Julio: «Aportaciones de la I.L.E. a la formación universitaria del profesorado». *Revista Complutense de Educación*, 1993, **4(1)**, pp. 209–232.

——: «La Junta de Ampliación de Estudios, una agencia de modernización pedagógica en España». *Revista de Educación*, 2000, pp. 229–248.

Ruiz Higueras, Luisa; Estepa Castro, Antonio y García, Francisco Javier (Eds.): *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico*. Diputación de Jaén, Jaén, 2007.

Ruiz Higueras, Luisa y García García, Francisco Javier: «Arithmetica Practica y Speculativa de J. Pérez de Moya (1513-1596). Análisis epistemológico y didáctico». *Llull*, 2009, **32**, pp. 103–133.

——: «Didáctica de las matemáticas y Formación de Maestros: Respuestas y desafíos (desde la TAD)». En: A. Bronner; M. Larguier; M. Artaud; Y. Chevallard; G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. IIe congrès international sur la TAD*, pp. 171–213. IUFM de l'Academie de Montpellier, 2010.

Ruiz Jaime, María de les Neus: «José María Eyaralar Almazán: l'entusiasta amor per l'educació». En: Francesca Comas Rubí; Sara González Gómez; Xavier Motilla Salas y Bernat Sureda García (Eds.), *Imatges de l'escola, imatge de l'educació: XXI Jornades d'Història de l'Educació*, pp. 335–344. Universitat de les Illes Balears, Palma de Mallorca, 2014.

Ruiz Munzón, Noemí: *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2010.

Saá Rojo, María Dolores: *Las matemáticas de los cuentos y las canciones*. EOS, Madrid, 2002.

Sánchez Gómez, Carmen y Contreras de la Fuente, Ángel: «Análisis de la evolución de los ejemplos que se plantean en libros de texto de bachillerato y COU para la enseñanza del concepto de límite de una función (1950-1993)». En: Elena Ausenjo Martínez y María del Carmen Beltrán (Eds.), *La enseñanza de las ciencias: una perspectiva histórica*, pp. 311–328. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón, niversidad de Zaragoza, Zaragoza, 2003.

——: «Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función, en cuanto a los ejemplos». En: Elena Ausenjo Martínez y María del Carmen Beltrán (Eds.), *La enseñanza de las ciencias: una perspectiva histórica*, tomo I, pp. 329–352. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2003.

Sánchez Jiménez, Encarna: *La introducción de la geometría en la enseñanza primaria (1838-1868)*. Memoria para obtener el diploma de estudios avanzados, Universidad de Murcia, Murcia, 2006.

——: «La resolución de problemas: aportaciones de Aurelio Rodríguez Charentón». En: Pablo Celada (Ed.), *Arte y oficio de enseñar. Dos siglos de perspectiva histórica*, tomo II, pp. 507–516. SEPHE. Universidad de Valladolid, El Burgo de Osma (Soria), 2011.

——: «Problemas Recreativos como recurso en la Enseñanza de las Matemáticas». Conferencia plenaria invitada. VIII Jornadas de Educación Matemática de la Región de Murcia. Murcia: Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia. Publicación en CD-rom, 2012.

——: «La matemática lúdica en el aula». En: *XV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Ponencia invitada. FESPM. Publicación en CD-rom, Gijón, 2013.

Sánchez Jiménez, Encarna; Olivares Carrillo, Pilar y Cantero Tomás, Ángel: «Comparación de algoritmos para multiplicar y dividir: Análisis tecnológico-teórico». En: Javier Maquilón y Noelia Orcajada

(Eds.), *Investigación e innovación en formación del profesorado*, pp. 381–392. Universidad de Murcia, Murcia, 2014.

Sánchez Ron, J.M. (Ed.): *1907-1987. La Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas 80 años después*, tomo I. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1988.

Sessa, Carmen: *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Libros del Zorzal, Buenos Aires (Argentina), 2006.

Sierra Delgado, Tomás A.: *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid, 2006.

Sierra Delgado, Tomás A.; Bosch Casabó, Marianna y Gascón Pérez, Josep: «El cuestionamiento tecnológico-teórico en la Actividad Matemática. El caso del Algoritmo de la Multiplicación». *BOLEMA-Boletím de Educaçao Matemática*, 2013, **27(47)**, pp. 805–828.

Vergnaud, Gérard: *L'enfant, la Mathématique et la Réalité*. Peter Lang, Berna, 1981.

Villalaín Benito, José Luis: *Manuales escolares en España. Tomo III. Libros de texto autorizados y censurados (1874-1939)*. UNED, Madrid, 2002.

Viñao Frago, Antonio: «Hombres e ideas en la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio. Estudio específico del profesorado». En: Antonio Molero Pintado y María del Mar del Pozo Andrés (Eds.), *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio(1909-1932): Un precedente histórico en la Formación Universitaria del Profesorado Español*, pp. 141–166. Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares, Madrid, 1989.

——: «La modernización pedagógica española a través de la "Revista de Pedagogía" (1922-1936)». *Anales de Pedagogía, Universidad de Murcia*, 1994-95, **12-13**, pp. 7–45.

——: «La historia de las disciplinas escolares». *Historia de la Educación*, 2006, **25**, pp. 243–269.

——: «Los cuadernos escolares como fuente histórica: aspectos metodológicos e historiográficos». *Annali di storia dell'educazione e delle istituzioni scolastiche*, 2007, **13**, pp. 17–36.

——: «Pedagogía y experiencias educativas en la JAE: Revisión historiográfica y nuevos enfoques». En: J.M. Sánchez Ron y J. García Velasco (Eds.), *100 JAE. La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas en su centenario*, tomo II, pp. 597–635. Fundación Francisco Giner de los Ríos y Publicaciones de la Residencia de Estudiantes, Madrid, 2010.

——: «Historia de las disciplinas, profesionalización docente y formación de profesores: el caso español». *Pro-Posiçoes*, 2012, **23(3 (69))**, pp. 103–118.

——: «La historia de las disciplinas escolares en España: una revisión con especial atención a la educación secundaria». En: Leoncio López-Ocón; Santiago Aragón y Mario Pedrazuela (Eds.), *Aulas con memoria. Ciencia, educación y patrimonio en los Institutos históricos de Madrid (1837-1936)*, pp. 265–277. CEIMES, CSIC y Comunidad de Madrid, Madrid, 2012.

——: «Francisco Giner de los Ríos. Educación, pedagogía y reforma social». En: Manuel Esteban Albert y Juan Sáez Carreras (Eds.), *Pensadores de ayer para problemas de hoy... Teóricos de las ciencias sociales*, pp. 41–62. Nau Llibres, Valencia, 2013.

——: «Las innovaciones educativas». En: José García Velasco y Antonio Morales Moya (Eds.), *La Institución Libre de Enseñanza y Francisco Giner de los Ríos: nuevas perspectivas. 2. La Institución Libre de Enseñanza y la cultura española*, pp. 420–435. Fundación Francisco Giner de los Ríos (Institución Libre de Enseñanza) / Acción Cultural Española, Madrid, 2013.