UNIVERSIDAD DE MURCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

ESTADOS COHERENTES GENERALIZADOS, *FRAMES* DISCRETOS Y TEOREMAS DE RECONSTRUCCIÓN

Juan Carlos Sánchez Monreal

2012

MANUEL CALIXTO MOLINA y JULIO GUERRERO GARCÍA, Profesores Titulares de Universidad en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada y de la Universidad de Murcia, respectivamente.

CERTIFICAN:

Que la presente Memoria **"Estados Coherentes Generalizados, *Frames* Discretos y Teoremas de Reconstrucción"** ha sido realizada bajo nuestra dirección en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Murcia por **Juan Carlos Sánchez Monreal**, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presentamos ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Murcia la referida Tesis.

Murcia, a 23 de Julio de 2012.

Fdo. Manuel Calixto Molina.

Fdo. Julio Guerrero García

Fdo. Juan Carlos Sánchez Monreal

Deseo agradecer a mis directores de tesis su apoyo, constancia y dedicación aportados para la puesta en marcha, desarrollo y finalización de esta tesis.

A mis padres.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El Análisis Armónico es una rama de las Matemáticas que estudia la representación de una función como superposición de otras más sencillas (en particular de carácter sinusoidal, como es el caso del análisis de Fourier). Las ondas en las que la función se descompone se llaman armónicos. El Análisis Armónico tiene un gran número de aplicaciones en campos tan diversos como el procesamiento de señales, la mecánica cuántica o la neurociencia.

En esta Tesis nos preguntamos si es posible reconstruir una señal a partir de una serie de puntos de muestreo discretos con un cierto grado de aproximación. En el caso de funciones de banda limitada sobre la recta real (o en el Análisis Armónico Abeliano en general), el teorema de muestreo clásico de Shannon nos da condiciones suficientes para este problema. Los teoremas de muestreo para el Análisis Armónico sobre grupos no Abelianos y sus espacios homogéneos son aún escasos en la literatura, salvo algunos resultados generales importantes para grupos compactos ([32], [33]) y grupos de movimiento (traslaciones y rotaciones) no compactos ([43]).

La Teoría de Ondículas Continuas (*Continuous Wavelet Transform*) estándar (ver [31]) puede ser vista como un capítulo de estados coherentes generalizados sobre el grupo de transformaciones afines (traslaciones y dilataciones). Estos resultados reviven el interés en la cuestión de la discretización y en el establecimiento de nuevos teoremas de muestreo para el análisis armónico sobre grupos no Abelianos y sus espacios homogéneos, que será de importancia para el estudio numérico y simulación de sistemas físicos que encierren estas simetrías. Actualmente, hay algunos resultados importantes sobre el muestreo y el cálculo eficiente de transformadas de Fourier para grupos compactos (ver [32, 33]). Me gustaría reseñar la referencia [42] para el grupo de movimientos y sus aplicaciones en ingeniería [43] (concretamente en robótica [44]) y [45] para *frames* discretos del grupo de Poincaré y sus aplicaciones en la Teoría de la Relatividad.

En las referencias ([9],[10]), los autores desarrollan un teorema de muestreo sobre la esfera, que reduce el cálculo de coeficientes de Fourier y convolución de funciones de banda limitada a cálculos discretos finitos. Aquí, las funciones de banda limitada sobre la esfera $\mathbb{S}^2$, de anchura J (momento angular máximo), se desarrollan en términos de armónicos esféricos y se muestrean en una malla equiangular de $4J^2$ puntos.

La Transformada Rápida de Fourier (FFT en inglés) sobre $\mathbb{S}^2$ es un algoritmo para un desarrollo eficiente de una función definida sobre la esfera $\mathbb{S}^2 = SO(3)/SO(2)$ en términos de un conjunto de coeficientes matriciales irreducibles para el grupo especial ortogonal en tres dimensiones $G = SO(3)$ que, para este caso, son precisamente la familia estándar de armónicos esféricos.

La transformada de Fourier sobre la esfera tiene aplicaciones en distintos campos como: geofísica, sismología, tomografía, física de la atmósfera, física atómica, astrofísica, cristalografía, etc.

El grupo $G = SU(2)$ (doble recubrimiento de $SO(3)$) nos permite trabajar con espín o momento angular semientero. Además, nosotros trabajamos con una representación diferente en vez de los armónicos esféricos; emplearemos un sistema de polinomios ortogonales (menos estándar) que son las funciones holomorfas de Majorana ([19],[20]) sobre la esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (Compactificación por un punto del plano complejo).

La ventaja de utilizar esta representación holomorfa compleja en vez de la estándar (representación en ángulos de Euler) es:

1. Aprovechamos una estructura diagonal y circulante de los operadores resolución y "núcleo de solapamiento" (*overlapping kernel*), para dar una fórmula explícita de inversión en la reconstrucción de funciones.

2. Podemos extender el procedimiento de muestreo para un momento angular semientero s, que podría ser utilizado, por ejemplo, para construir *frames* discretos de estados coherentes para partículas con espín en Física Atómica ([22],[5]). Además, para momentos angulares enteros $s = j$, podríamos siempre pasar de una representación a otra a través de una transformación de tipo Bargmann para $SO(3)$.

Introduciremos una transformación de Bargmann generalizada ([21]), relacionando ambas representaciones: la holomorfa y la estándar en términos de armónicos esféricos, que es una generalización de la transformación de Bargmann para los estados coherentes estándar ([22],[5]).

Hemos escogido en $\bar{\mathbb{C}}$ las raíces de la unidad como puntos de muestreo así es que, al muestrear estados coherentes, la expresión del *overlapping kernel* $\mathcal{B}_{kl} = \langle z_k | z_l \rangle$ tiene estructura circulante ([23]). Usando las propiedades de las Matrices Rectangulares de Fourier (RFM) y la teoría de Matrices Circulantes, invertimos el *overlapping kernel* $\mathcal{B}$, para que nos dé una fórmula de reconstrucción para funciones holomorfas de Majorana sobre la esfera de Riemann. La fórmula de inversión viene dada a partir de la descomposición: $\mathcal{B} = \mathcal{F} D \mathcal{F}^{-1}$, donde D es una matriz diagonal y $\mathcal{F}$ representa las matriz de Fourier discreta.

Para el caso del hiperboloide (más concretamente la hoja superior del hiperboloide de dos hojas), se estudian problemas de discretización similares para el grupo no-compacto $SO(2,1)$ (el grupo de movimiento del espacio de Lobachevsky) o, de forma más precisa, para su doble recubrimiento $SU(1,1)$. Los grupos $SU(2)$ y $SU(1,1)$ aparecen como grupos de simetrías en muchos sistemas físicos. La Teoría del Momento Angular es esencial cuando estudiamos sistemas que son invariantes bajo rotaciones (isotropía del espacio). De la misma manera, la teoría de representaciones de $SU(1,1)$ o $SL(2,\mathbb{R})$ es útil cuando está relacionado con sistemas que presentan invariancia conforme, especialmente en dos dimensiones (donde $SO(2,1)$ es un subgrupo del grupo conforme que es el grupo de Virasoro, de dimensión infinita). En particular, el grupo $SL(2,\mathbb{R})$ se utilizó en [27] para definir la ondículas sobre el círculo y en la recta real de una forma unificada. Además, los estados coherentes de $SU(2)$ y $SU(1,1)$, y los estados coherentes generalizados del grupo de Heisenber-Weyl (Gabor *frames*), encuentran una gran variedad de aplicaciones, principalmente en el estudio de sistemas cuánticos y sus límites clásicos (ver [5, 22, 11]). Por ejemplo, los estados fundamentales de los superconductores y super-fluidos (como el condensado de Bose-Einstein) son estados coherentes.

En lugar de trabajar en el hiperboloide, lo haremos en su proyección estereográfica sobre el disco unidad $\mathbb{D}_1 = SU(1,1)/U(1)$. Escogiendo como puntos muestra un conjunto de N puntos igualmente distribuidos sobre una circunferencia de radio $r < 1$, para funciones holomorfas de banda limitada sobre $\mathbb{D}_1$ con límite de banda $M < N$ e índice s de Bargmann (índice de las representaciones irreducibles de la serie discreta de $SU(1,1)$), el operador resolución $\mathcal{A}$ es diagonal; y nos proporciona una fórmula de reconstrucción a partir de la pseudoinversa por la izquierda. Los coeficientes de Fourier se obtienen a través de un filtrado de la transformada de Fourier de los datos, permitiendo una rápida y sencilla extensión del algoritmo de reconstrucción clásico. La reconstrucción de funciones arbitrarias de banda ilimitada no es exacta para un número finito N de muestras. Pero se pueden dar unas fórmulas de reconstrucción parciales y estudiar la aproximación y el error cometido en términos de N, el radio r y el índice s.

Para el caso del grupo de Heisenberg-Weyl (Capítulo 5), ampliamente usado en Óptica Cuántica, usamos una parametrización número-fase de $z = re^{i\theta}$ en términos del número de partículas medio $p = r^2 = |z|^2$ y fase $\theta = \arctan(\Im(z)/\Re(z))$ y escogeremos igualmente un sistema de estados coherentes $\mathcal{S} = \{|z_k\rangle\}$ correspondiente a un conjunto finito de N puntos $\mathcal{Q} = \left\{z_k = re^{2\pi ik/N}\right\}_{k=0}^{N-1}$ uniformemente distribuida sobre un círculo de radio fijo r, que corresponde a un número finito N de fases $\left\{\theta_k = \frac{2\pi ik}{N}\right\}_{k=0}^{N-1}$ para un número promedio de partículas $p = r^2$ (de forma idéntica a como lo hicimos para el grupo $SU(2)$ y $SU(1,1)$). Estudiamos las condiciones bajo las cuales es posible una reconstrucción exacta de la función de onda ψ, cuando nos restringimos a un subespacio de Hilbert (número finito de partículas) o para un número promedio de partículas p por debajo del valor critico $p_c = N$.

La posibilidad de aproximar los estados cuánticos de la luz como una superposición de un número limitado de estados coherentes sobre un círculo (o sobre una línea) en el espacio de fases ha sido ya considerado en las referencias [70, 71, 72, 73, 74, 75]. Varios efectos no-clásicos aparecen debido a la interferencia cuántica entre los componentes de una superposición de estados (llamados también estados tipo *gato de Schrödinger*).

En este capítulo se ve brevemente la restricción de los estados coherentes en un círculo, y analizamos la reconstrucción de estados a partir de un muestreo en la fase para un número finito de partículas. Se estudia también la *representación del círculo* en el lenguaje de *frames*.

La ventaja de esta parametrización en términos de número-fase es que nos permite de nuevo la inversión explícita de los operadores resolución y del *overlapping kernel* a partir de la teoría de Matrices Circulantes y Matrices de Fourier Rectangulares. Al final se hacen algunos comentarios sobre las posibles aplicaciones físicas en Óptica Cuántica.

Para resumir, este trabajo viene estructurado de la siguiente forma: en el primer capítulo introducimos aspectos básicos de matemáticas que hemos utilizado para elaborar esta Tesis. En los tres siguientes capítulos hacemos un estudio detallado del muestreo de los tres grupos de simetría analizados: $SU(2), SU(1,1)$ y el grupo de Heisenber-Weyl. Éste estudio ha sido publicado en las tres referencias siguientes:

1. M. Calixto, J. Guerrero, y J.C. Sánchez-Monreal, *Sampling Theorem and Discrete Fourier Transform on the Riemann Sphere*, Journal of Fourier Analysis and Applications **14** (2008) 538-567.

2. M. Calixto, J. Guerrero, y J.C. Sánchez-Monreal, *Sampling Theorem and Discrete Fourier Transform on the Hyperboloid*, Journal of Fourier Analysis and Applications **17** (2011) 240-264.

3. M. Calixto, J. Guerrero and J.C. Sánchez-Monreal, *Almost complete coherent state subsystems and partial reconstruction of wavefunctions in the Fock-Bargmann phase-number representation* , Journal of Physics A (Mathematical & Theoretical) **45** (2012) 244029 (20pp)

Al final del trabajo hemos introducido cuatro apéndices. En el Apéndice A hemos incluido las demostraciones y desarrollos matemáticos de los distintos resultados obtenidos para facilitar la lectura separándolos de los enunciados. En los Apéndices B, y C se ha incluido información básica sobre la pseudoinversa de Moore-Penrose, mínimos cuadrados, matrices rectangulares de Fourier y matrices circulantes. Y para finalizar, un Apéndice más sobre la definición del operador fase y operador número. También proporcionamos una amplia bibliografía para consultar y profundizar en los distintos aspectos que trata este trabajo.

Capítulo 2

Aspectos básicos

2.1. Espacios homogéneos

Definición 2.1 (Espacios topológicos).
Un espacio topológico es un conjunto E de elementos junto con T, una colección de subconjuntos de E que satisfacen las siguientes propiedades:

1. *El conjunto vacío y E están en T.*

2. *La intersección de cualquier colección finita de conjuntos de T está también en T.*

3. *La unión de toda colección de conjuntos de T está también en T.*

Los conjuntos en T son los conjuntos abiertos, y sus complementos en E son llamados conjuntos cerrados.

La colección T es llamada *topología* en E. Los elementos de E suelen llamarse puntos, aunque pueden ser cualquiera de los objetos matemáticos. Un espacio topológico en el cual los puntos son funciones es llamado un espacio funcional.

Definición 2.2 (Homeomorfismo).
En topología, un homeomorfismo es una biyección entre dos espacios topológicos por una aplicación biyectiva que es continua y cuya inversa es continua. En este caso, los dos espacios topológicos se dicen homeomorfos. Las propiedades de estos espacios que se conservan bajo homeomorfismo se denominan propiedades topológicas.

Definición 2.3 (Espacio homogéneo).
Un espacio se dice homogéneo si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ tal que $h(x) = y$. Ello implica en particular que en un espacio homogéneo las propiedades topológicas locales de uno cualquiera de sus puntos determina las de los otros.

2.2. Representaciones

Definición 2.4 (Representación).
Supongamos que existe una aplicación T homeomorfa de un grupo G al grupo de las matrices

$n \times n$ no singulares sobre un espacio vectorial V

$$\left.\begin{array}{rl} T : G \longrightarrow & GL(V) \\ g \longmapsto & T(g) \end{array}\right\}.$$

Entonces el grupo de matrices $T(g)$ forma una representación de G de dimensión $n = dim_{\mathbb{K}}(V)$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$.

Definición 2.5 (Representación unitaria)**.**
Una representación unitaria de un grupo G es una representación U en el que las matrices $U(g)$ son unitarias para cada $g \in G$. Normalmente utilizaremos U para designar las representaciones unitarias. Es decir,

$$U^*(g)U(g) = U(g)U^*(g) = I, \quad \forall g \in G.$$

Definición 2.6 (Representación irreducible)**.**
Decimos que una representación T es irreducible si es equivalente a través de una relación de semejanza a una representación T' de la forma:

$$T'(g) = \begin{pmatrix} T'_{11}(g) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T'_{22}(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & T'_{33}(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T'_{mm}(g) \end{pmatrix}.$$

2.3. Grupo de Lie Lineal

Definición 2.7 (Grupo de Lie lineal de dimensión n)**.**
Un grupo G es un grupo de Lie lineal de dimensión n si satisface las siguientes condiciones:

1. *G debe de poseer al menos una representación T de dimensión finita. Supongamos que esta representación tiene dimensión m, entonces se define la distancia entre dos elementos $g, g' \in G$ como:*

$$d(g, g') = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} |T_{jk}(g) - T_{jk}(g')|^2} \quad \forall g, g' \in G.$$

   Se define, para cada $\delta > 0$, la bola abierta de radio δ y centro I (entorno al punto I), como

$$M_\delta = \{g \in G : \ d(g, I) < \delta\}, \qquad \text{dada } I \text{ la identidad del grupo } G.$$

2. *$\exists \delta > 0$ tal que cualquier $g \in M_\delta$ puede ser parametrizado por n parámetros $x_1, \dots, x_n$ (no existen dos conjuntos de parámetros que correspondan al mismo elemento $g \in G$). La identidad I será parametrizada siempre como: $x_1 = \dots = x_n = 0$. Es decir:*

$$\left.\begin{array}{rccl} X_i : & M_\delta & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & g & \mapsto & X_i(g) \end{array}\right\} \quad \text{biyección}, \qquad \vec{X}(I) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

3. *$\exists \eta > 0$, tal que cada punto en $\mathbb{R}^n$ para el que corresponde algún elemento g en M_δ, se verifica*
$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2(g) < \eta^2.$$
El conjunto de puntos obtenidos de esta forma será denotado por R_η ($R_\eta \subseteq M_\eta$). $\exists X : R_\eta \subseteq M_\delta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que es una biyección. Estamos quitando las posibles divergencias en $\mathbb{R}^n$.

4. *Cada elemento de la matriz $T(g(x_1, \ldots, x_n)) = T(x_1, \ldots, x_n)$ deberá ser una función analítica de $x_1, \ldots, x_n$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En particular, podemos definir las n matrices $m \times m$, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ con*
$$(a_p)_{jk} = \left(\frac{\partial T_{jk}}{\partial x^p}\right)_{x_1=\ldots=x_n=0}.$$

Teorema 2.1. *Las matrices $\{a_1, \ldots, a_n\}$ forman una base para un espacio vectorial real de dimensión n.*

Aunque $\{a_1, \ldots, a_n\}$ forme una base de un espacio vectorial real, no requiere que los elementos de la matriz de estas matrices necesiten ser reales. Este espacio vectorial dotado del corchete de Lie $[a_i, a_j]$ definirá el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G.

2.4. Espacios de Hilbert

Definición 2.8 (Serie de Cauchy)**.**
Una sucesión $\{\phi_n\}$ de un espacio métrico, en general, se llama sucesión de Cauchy si satisface la siguiente condición (llamada Condición de Cauchy):
$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{Z} : \; d(\phi_n, \phi_m) < \epsilon, \qquad \text{siempre que } n \geq M, \; m \geq M.$$

Definición 2.9 (Espacio de Hilbert)**.**
Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo con producto escalar $\langle \psi | \psi' \rangle$ en el que cada sucesión de Cauchy converge.

Definición 2.10 (Espacio de Hilbert separable)**.**
Un espacio de Hilbert ($\mathcal{H} \neq \{0\}$) es separable si y sólo si admite una base ortonormal numerable.

Proposición 2.1.
Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tienen el mismo cardinal.

Definición 2.11 (Sistema ortonormal completo)**.**
*Un conjunto de vectores ortonormales $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ de un espacio de Hilbert se dice **completo** si no existe ningún vector ψ distinto de cero que sea ortogonal a cada ψ_j con $j \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.2. *Si un espacio de Hilbert de dimensión infinita es **separable**, entonces el espacio contiene un sistema ortonormal completo, y cada sistema ortonormal completo en el espacio consiste de un número contable de vectores.*

Teorema 2.3. *Si los vectores $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ forman un sistema ortonormal completo de un espacio de Hilbert de dimensión infinita, entonces cualquier vector del espacio puede ser escrito como:*

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \psi_j, \psi \rangle \psi_j \ ,$$

además se cumple que

$$\|\psi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \psi_j, \psi \rangle|^2 \qquad \textit{(Relación de Parseval).} \tag{2.1}$$

2.5. Órbitas

Definición 2.12 (G-equivalentes)**.**
Dado un conjunto X, y una acción

$$\left. \begin{array}{rcc} g : X & \longrightarrow & X \\ x & \mapsto & gx \end{array} \right\} \ \textit{con } g \in G \ ,$$

decimos que $x \in X$ es G-equivalente a $y \in X$ $(x \sim y)$ si $gx = y$, para algún $g \in G$.

Definición 2.13 (G-órbitas u órbitas)**.**
Las clases de equivalencia de X bajo la relación de equivalencia $\sim$ se denominan G-órbitas u órbitas de X.

Así que x e y pertenecen a la misma órbita si y sólo si $y = gx$ para algún $g \in G$. La órbita que contiene a x es el conjunto $\{gx : g \in G\}$. Si hay solamente una G-órbita en X diremos que G es **transitivo** sobre X. En este caso para cada par de puntos x, y en X hay un $g \in G$, tal que $y = gx$.

Si Y es un subconjunto de X $(Y \subseteq X)$, y $g \in G$, denotamos con $g(Y)$ al conjunto $\{gy : y \in Y\}$.

Definición 2.14 (G-invariante)**.**
Un subconjunto Y de X es G-invariante o invariante si $g(Y) \subseteq Y$, $\forall g \in G$.

Dado un subconjunto arbitrario Y de X $(Y \subseteq X)$, podemos encontrar un subgrupo

$$K = \{g \in G : g(Y) \subseteq Y\} \, .$$

Es fácil encontrar que K es un grupo de transformación e Y es un subconjunto K-invariante de X. Frecuentemente, nos referimos a K como la G-simetría o grupo de simetría del conjunto Y.

Para cualquier $x \in X$, el grupo

$$G^x = \{g \in G : \; gx = x\}$$

se le denomina subgrupo **de isotropía** de x en G. Contiene los elementos de G que dejan x invariante.

2.6. Integración invariante

Sea $\Phi(g)$ una función compleja sobre el grupo G.

Para un grupo finito, las sumas de la forma

$$\sum_{g \in G} \Phi(g)$$

se suelen encontrar, particularmente, en la teoría de representaciones. Es fácil comprobar, que el conjunto $\{g'g : \; g \in G\}$ tiene exactamente el mismo número de elementos que G, para cualquier $g' \in G$. Entonces

$$\sum_{g \in G} \Phi(g'g) = \sum_{g \in G} \Phi(g),$$

por lo que, la suma se dice que es invariante por la izquierda. Similarmente:

$$\sum_{g \in G} \Phi(gg') = \sum_{g \in G} \Phi(g),$$

se dice entonces que es invariante por la derecha. Y si $\Phi(g) = 1$, $\forall g \in G$; entonces la suma es finita en el sentido de

$$\sum_{g \in G} 1 = N \;, \quad \text{siendo } N = Card(G).$$

Si hacemos la generalización a grupos de Lie lineales y conexos, es natural reemplazar la suma por una integral con respecto a las coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de g. Utilizando la teoría de Haar, para los grupos de Lie lineales existe siempre una integral invariante por la izquierda o invariante por la derecha.

$$\text{Inv-izq} \quad \int_G \Phi(g) d_l(g) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dy_1 \ldots \int_{a_n}^{b_n} dy_n \Phi(g(y_1, \ldots, y_n)) \sigma_l(y_1, \ldots, y_n).$$

$$\text{Inv-der} \quad \int_G \Phi(g) d_r(g) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dy_1 \ldots \int_{a_n}^{b_n} dy_n \Phi(g(y_1, \ldots, y_n)) \sigma_r(y_1, \ldots, y_n).$$

Para un grupo de Lie lineal G, tal que:

$$\int_G \Phi(g'g) d_l(g) = \int_G \Phi(g) d_l(g), \qquad \int_G \Phi(gg') d_r(g) = \int_G \Phi(g) d_r(g),$$

para cualquier $g' \in G$, y cualquier función $\Phi(g)$ en la que la integral está bien definida.

Aquí $\sigma_l(y_1,\ldots,y_n)$ y $\sigma_r(y_1,\ldots,y_n)$ son funciones peso invariantes por la izquierda y por la derecha, determinadas salvo constantes arbitrarias.

Las integrales invariantes por la izquierda y por la derecha se dicen que son finitas si:

$$\int_G d_l(g) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dy_1 \ldots \int_{a_n}^{b_n} dy_n \sigma_l(y_1,\ldots,y_n),$$

$$\int_G d_r(g) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dy_1 \ldots \int_{a_n}^{b_n} dy_n \sigma_r(y_1,\ldots,y_n),$$

son finitas. Si las constantes multiplicativas pueden ser escogidas tal que $\sigma_l(y_1,\ldots,y_n)$ y $\sigma_r(y_1,\ldots,y_n)$ sean iguales, entonces las integrales serán al mismo tiempo invariantes por la izquierda que por la derecha, entonces G se dice que es **unimodular**, y podemos escribir:

$$d_l g = d_r g = dg, \qquad \sigma_l(y_1,\ldots,y_n) = \sigma_r(y_1,\ldots,y_n) = \sigma(y_1,\ldots,y_n).$$

Los grupos de Lie compactos tienen muchas de las propiedades de los grupos finitos. La suma sobre un grupo finito puede ser reemplazado por la integral invariante sobre un grupo de Lie compacto. Pero para grupos no compactos la situación es más compleja.

Teorema 2.4. *Si G es un grupo de Lie compacto, entonces G es unimodular y la integral invariante*

$$\int_G \Phi(g) d(g) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dy_1 \ldots \int_{a_n}^{b_n} dy_n \sigma(y_1,\ldots,y_n)\Phi(g)$$

existe y es finita para cada función continua $\Phi(g)$. Así que $\sigma(y_1,\ldots,y_n)$ puede ser escogida tal que

$$\int_G d(g) = \int_{a_1}^{b_1} dy_1 \ldots \int_{a_n}^{b_n} dy_n \sigma(y_1,\ldots,y_n) = 1.$$

Una función $\Phi(g)$ es continua $\Longleftrightarrow$ $\Phi(g(y_1,\ldots,y_n))$ es una función continua de $y_1,\ldots,y_n$.

Teorema 2.5. *Si G es Abeliano o semi-simple, entonces G es unimodular.*

2.7. Descomposición Gaussiana

Sea $G^c = SL(2,\mathbb{C})$ el grupo de todas las matrices 2×2 complejas con determinante unidad[1]

$$G^c \equiv SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}.$$

Algunos subgrupos de G^c son:

[1] Ver [5].

- El grupo de matrices triangulares: $B_\pm = \{b_\pm\}$,

$$b_+ = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}, \quad b_- = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad b_{11}b_{22} = 1.$$

  Estos subgrupos son *maximales solubles*[2] en G^c.

- El grupo de matrices triangulares con elementos unidad en la diagonal principal

$$z_+ = \begin{pmatrix} 1 & z_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

  Estos subgrupos son *maximal nilpotentes*[3] en G^c.

- El subgrupo de las matrices complejas diagonales: $H^c = \{h\}$,

$$h = h(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \qquad \epsilon \neq 0.$$

Cualquier elemento de G^c admite una **descomposición Gaussiana**.

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = z_+ h z_- = b_+ z_- = z_+ b_- \ , \qquad \text{donde}$$

$$b_+ \equiv z_+ h \ , \quad b_- \equiv h z_- \ , \quad z_+ = \begin{pmatrix} 1 & \zeta(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$z_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z(g) & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1}(g) & 0 \\ 0 & \epsilon(g) \end{pmatrix},$$

$$\zeta = \zeta(g) = \beta\delta^{-1}, \quad z = z(g) = \gamma\delta^{-1}, \quad \epsilon(g) = \delta.$$

[2]Decimos que un grupo es *maximal soluble*, cuando es el grupo más grande *soluble*. Definimos entonces que un grupo G es *soluble* si hay una cadena de subgrupos

$$\{e\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G \ ,$$

tal que, para cada i, el subgrupo H_i es normal en H_{i+1} y el grupo cociente H_{i+1}/H_i es abeliano. Donde e es el elemento neutro del grupo.

[3]Decimos que un grupo es *maximal nilpotente*, cuando es el grupo más grande *nilpotente*. Definimos entonces que un grupo G es *nilpotente* si hay una cadena de subgrupos

$$\{e\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G.$$

H_1 es el centro de G. El centro de un grupo es el conjunto de elementos que conmutan con cada elemento del grupo. Y para $n > 1$, H_n es el subgrupo único de G, de tal manera que H_n/H_{n-1} es el centro de G/H_{n-1}. Donde e es el elemento neutro del grupo.

La descomposición Gaussiana es única para cada elemento de G^c, excepto para los elementos de la forma:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} .$$

Utilizando la descomposición Gaussiana[4]: $\alpha = \epsilon^{-1} + z\epsilon\zeta,\ \beta = \zeta\epsilon,\ \gamma = \epsilon z,\ \delta = \epsilon$, y para el caso particular de $SU(2)$; tenemos que $\gamma = -\bar{\beta}$, $\delta = \bar{\alpha}$. A partir de aquí, se puede demostrar de forma trivial que para los elementos de G los parámetros $\{\zeta, z, \epsilon\}$ se relacionan como:

$$|\epsilon(g)|^2 = \left(1 + |z(g)|^2\right)^{-1} = \left(1 + |\zeta(g)|^2\right)^{-1} .$$

Los conjuntos cocientes del grupo G^c con sus subgrupos $B_\pm$ son espacios homogéneos que son isomorfos al plano complejo $\mathbb{C}$:

$$X_+ = G^c/B_- \sim Z_+ \qquad , \qquad X_- = B_+ \setminus G^c \sim Z_- \ .$$

- La acción del grupo G^c en estos espacios se obtiene fácilmente con la descomposición Gaussiana. Por ejemplo, para X_+:

$$g z_+ = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = z'_+ h' z'_- \qquad , \qquad g : \zeta \longrightarrow \zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \ .$$

Respectivamente, para el espacio X_-:

$$z_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = z''_+ h'' z''_- \qquad , \qquad g : z \longrightarrow z'' = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta} \ .$$

Demostración: A partir de:

$$g z_+ = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\zeta + \beta \\ \gamma & \gamma\zeta + \delta \end{pmatrix} \qquad , \qquad z'_+ h' z'_- = \begin{pmatrix} (\epsilon')^{-1} + \epsilon' z' \zeta' & \epsilon'\zeta' \\ \epsilon' z' & \epsilon' \end{pmatrix} ,$$

se obtiene que $\zeta' = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$. De igual forma se demuestra para el espacio X_- . ∎

Para el caso particular del grupo $G = SU(2)$, éste contiene un subgrupo de matrices diagonales

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right\} , \qquad \alpha = e^{i\psi/2} .$$

[4]Como los elementos del grupo $g \in G^c$, es decir, las matrices de $SL(2, \mathbb{C})$, se pueden descomponer como

$$g = z_+ h z_- = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1} + \epsilon z \eta & \epsilon\eta \\ \epsilon z & \epsilon \end{pmatrix} ,$$

y además, si vemos la estructura que tienen las matrices de $SU(2)$ (ver (3.1)), encontramos la relación entre los parámetros: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ con ϵ, z, η.

- El espacio cociente $X = G/H$ es isomorfo al conjunto de elementos de G de la forma
$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \ , \ \beta = \beta_1 + i\beta_2, \ \alpha^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 \right\}$$
con la parametrización:
$$\alpha = \cos\theta/2 \qquad , \qquad \beta = -\sin\theta/2 \ e^{-i\varphi} \qquad (0 \leq \theta < 2\pi, \ 0 \leq \varphi < 2\pi).$$
Se puede ver que el espacio X es justo la esfera $\mathbb{S}^2$ de radio unidad, es decir, el conjunto de vectores unitarios $\hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.

- Cualquier elemento del espacio $X = G/H$, puede ser escrito como:
$$g_n = \exp\left(i\frac{\theta}{2}(m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2) \right),$$
donde $m_1 = \sin\varphi, \ m_2 = -cos\varphi$; σ_1, σ_2 son las matrices de Pauli:
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>*Demostración*</u>*:*
$$g_n = \exp\left(i\tfrac{\theta}{2}A\right), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\varphi} \\ -ie^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^n = \left\{ \begin{array}{ll} A & n \in \text{ impar} \\ \mathbb{I} & n \in \text{ par} \end{array} \right. .$$
$$g_n = \sum_{n \in \text{ impar}} \left(\frac{i\theta}{2}\right)^n \frac{1}{n!} A + \sum_{n \in \text{ par}} \left(\frac{i\theta}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\mathbb{I} = Ai\sin\theta/2 + \mathbb{I}\cos\theta/2 = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -e^{-i\varphi}\sin\theta/2 \\ e^{i\varphi}\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}.$$
■

2.8. Producto de convolución

Definición 2.15 (Producto de convolución)**.**
*Si f y g son dos funciones reales de variable real, con $\|f\|_1$ y $\|g\|_1$[5] finitas, entonces la **convolución** de f y g se denotan como $f * g$, y se define como*
$$f * g\ (t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds\ .$$

Teorema 2.6 (Convolución para series de Fourier[6])**.** *Si f y g tienen periodo $2L$ con un desarrollo en serie (discreto) de Fourier:*
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\pi nt/L}, \qquad c_n = \tfrac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\pi nt/L}dt\ ,$$
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{i\pi nt/L}, \qquad d_n = \tfrac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(t)e^{-i\pi nt/L}dt\ .$$

---
[5] $\|f(x)\|_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$.
[6] Demostración: [53], p.117,118.

Entonces la convolución $f * g$ viene dada por:

$$f * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n d_n e^{i\pi nt/L}.$$

- Esta definición se extiende a periodo $L \longrightarrow \infty$ con

$$\hat{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \quad \text{(la transformada de Fourier).}$$

- La convolución es conmutativa. Es decir, si f y g tienen periodo $2L$, entonces

$$f * g = g * f.$$

- La transformada de Fourier de $f * g$ es $\hat{f}\hat{g}$, es decir, $\widehat{f * g} = \hat{f}\ \hat{g}$. Y la transformación de Fourier inversa de $\hat{f}\hat{g}$ es la convolución $f * g$.

- En teoría de probabilidad, una función densidad de probabilidad es una función no-negativa f satisfaciendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

2.9. Teorema de Muestreo

Definimos la transformada de Fourier de f sobre la frecuencia ω, como:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Entonces si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, tenemos[7]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

A partir del producto escalar de $f, g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt\ , \qquad \|f\|^2 = \langle f|f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt\ ;$$

tenemos el siguiente teorema que nos conserva el producto escalar y la norma en una transformación de Fourier

[7] Ver demostración: [4], p.23.

Teorema 2.7. *Si $f, h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces*[8]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{h(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{h}(\omega)}d\omega \quad \textit{(Fórmula de Parseval).}$$

Para $h = f$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad \textit{(Fórmula de Plancherel).}$$

Definición 2.16 (Distribuciones)**.**
Definimos en general las ***distribuciones*** *sobre el espacio de funciones C_0^∞ infinitamente diferenciables sobre un soporte compacto. Una distribución D es una forma lineal que asocia cualquier $\phi \in C_0^\infty$ al valor $\int_{-\infty}^{+\infty} D(t)\phi(t)dt$. Dos distribuciones D_1 y D_2 son iguales si*

$$\forall \phi \in C_0^\infty \ , \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} D_2(t)\phi(t)dt.$$

Teorema 2.8 (Fórmula de Poisson[9])**.** *Se da la siguiente igualdad en el sentido de distribuciones*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-inT\omega} = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) .$$

δ: Delta de Dirac.

La forma más sencilla de discretizar una señal analógica f es guardando sus valores muestreados $\{f(nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en intervalos de longitud T. Una aproximación de $f(t)$ para cualquier valor de $t \in \mathbb{R}$ puede ser reconstruido a partir de la interpolación de esos datos muestreados.

Una señal discreta puede ser representada como una suma de deltas de Dirac. Asociamos cada dato $f(nT)$ como una delta de Dirac $f(nT)\delta(t-nT)$ en $t = nT$. Un muestreado uniforme de f se puede expresar de la forma

$$f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT) .$$

La transformada de Fourier de $\delta(t - nT)$ es $e^{-inT\omega}$, así que, la transformada de Fourier de f_d es

$$\hat{f}_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)e^{-inT\omega}.$$

[8] Ver demostración: [4], p.26.
[9] Ver demostración: [4], p.29.

Proposición 2.2.
La transformada de Fourier de la señal discreta obtenida a partir del muestreo de f en el intervalo T es[10]

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right).$$

Definición 2.17 (Funciones de banda limitada)**.**
Una función f se dice que es de banda limitada si su transformada de Fourier $\hat{f}$ es 0 fuera de un intervalo finito $[-\omega, \omega]$.

El resultado de este teorema de muestreo fue probado por primera vez por Whittaker en 1935. Shannon lo redescubrió en 1949 para aplicarlo a la Teoría de la Información.

Teorema 2.9 (Teorema Whittaker-Shannon)**.** *Si f es de banda limitada, es decir, que el soporte de $\hat{f}$ está contenido en $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$, entonces*[11]

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) h_T(t - nT), \tag{2.2}$$

con

$$h_T(t) = sinc\left(\frac{\pi t}{T}\right) \equiv \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}.$$

La condición de que f sea de banda limitada, nos garantiza que f no sufra cambios bruscos entre puntos muestreados consecutivos, y podamos reconstruir a partir de una interpolación *suave.*

El teorema de muestreo da una condición suficiente para reconstruir una señal a partir de sus datos, pero existen otras condiciones suficientes que pueden ser establecidas por diferentes formas de interpolación. El teorema de muestreo de Whittaker nos dice como una señal se puede descomponer en una base ortogonal.

Proposición 2.3.
Si $h_T(t) = sinc(\frac{\pi t}{T})$, entonces $\{h_T(t - nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortogonal sobre el espacio de funciones U_T de banda limitada, es decir, cuyas transformadas de Fourier se soportan sobre el intervalo $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$. Si $f \in U_T$, entonces[12]

$$f(nT) = \frac{1}{T}\langle f(t) | h_T(t - nT)\rangle \ .$$

La proposición 2.3 nos muestra que la fórmula de interpolación (2.2) se puede interpretar como una descomposición de $f \in U_T$ en un base ortogonal de U_T:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f(u) | h_T(u - nT)\rangle h_T(t - nT).$$

[10] Ver demostración: [4], p.43.
[11] Ver demostración: [4], p.44.
[12] Ver demostración: [4], p.47,48.

Si $f \notin U_T$, que significa que f no es de banda limitada, es decir, que $\hat{f}$ tiene un soporte que no está incluida en $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$, para eliminar el *aliasing* debemos de encontrar la función $\tilde{f} \in U_T$ que minimiza $\|\tilde{f} - f\|$. La proposición A.2 de [4] (p.597.) prueba que $\tilde{f}$ es la proyección ortogonal $P_{U_T} f$ de f en U_T[13].

El teorema de muestreo Whittaker-Shannon se puede generalizar para otros espacios U_T, tal que $f \in U_T$ pueda ser reconstruida interpolando sus datos muestreados $\{f(nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Una señal $f \notin U_T$ se puede aproximar con su proyección ortogonal $\tilde{f} = P_{U_T} f$ en U_T, caracterizada a través de un muestreo uniforme $\left\{\tilde{f}(nT)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

2.10. Estados coherentes y *Frames*

2.10.1. Definición de los estados coherentes generalizados

Sea G un grupo de Lie arbitrario y $T(g)$ es una representación irreducible unitaria actuando en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Tomemos un vector fijo $|\phi_0\rangle$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y consideremos el conjunto $\{|\psi_g\rangle\}$, donde $|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle$, y g es cualquier elemento del grupo G. No es difícil de ver que dos vectores $|\psi_{g_1}\rangle$ y $|\psi_{g_2}\rangle$ corresponden al mismo estado, es decir, difieren solamente en un factor de fase $|\psi_{g_1}\rangle = e^{i\alpha}|\psi_{g_2}\rangle$, $|e^{i\alpha}| = 1$; solamente si $T(g_2^{-1} g_1)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha}|\psi_0\rangle$. Supongamos que $H = \{h\}$ es un subgrupo de G, tal que sus elementos tienen la propiedad

$$T(h)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\psi_0\rangle.$$

Cuando el subgrupo H es maximal, se le denominará subgrupo de isotropía para el estado $|\psi_0\rangle$.

Esta construcción muestra que los vectores $|\psi_g\rangle$ para todos los elementos del grupo g, pertenecen a una clase de equivalencia de G con respecto al subgrupo H, que difieren solamente en un factor de fase y así determinan el mismo estado. Escogiendo un representante $g(x)$ en cualquier clase de equivalencia x, uno obtiene un conjunto de estados $\left\{|\psi_{g(x)}\rangle\right\}$, donde $x \in X = G/H$. Y además, $g(x) = \sigma(x)$ donde $\sigma : H \longrightarrow G$ es una sección de Borel.

Definición 2.18 (Estados coherentes generalizados).
El sistema de estados $\{|\psi_g\rangle\}$, $|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle$, *donde* g *son elementos del grupo* G *(*T *es una representación del grupo* G*, actuando en el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*, y* $|\psi_0\rangle$ *es un vector fijo en este espacio) se llama un sistema de estados coherentes* $\{T, |\psi_0\rangle\}$.

Sea H el subgrupo de isotropía para el estado $|\psi_0\rangle$. Entonces un estado coherente $|\psi_g\rangle$ está determinado por un punto $x = x(g)$ en el espacio cociente G/H, correspondiente al elemento g : $|\psi_g\rangle = e^{i\alpha}|x\rangle$, $|\psi_e\rangle = |x(e)\rangle \equiv |0\rangle$.

[13] Ver Apéndice A de [4], p. 591-602.

El estado correspondiente al vector $|x\rangle$ puede ser considerado como un subespacio unidimensional en $\mathcal{H}$, o como un proyector $\mathcal{P}_x = |x\rangle\langle x|$, $\dim \mathcal{P}_x = 1$ en $\mathcal{H}$. Así que el sistema de estados coherentes (**CS**) representa un conjunto de subespacios unidimensionales en $\mathcal{H}$, parametrizados con puntos del espacio homogéneo $X = G/H$.

2.10.2. *Frames* de un espacio vectorial

En el contexto del análisis armónico la suma de los coeficientes de Fourier al cuadrado de una función periódica de periodo 2π es igual a la integral del módulo de la función al cuadrado:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad \text{(Identidad de Parseval)},$$

donde los coeficientes de Fourier a_n de f están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Si $\{e_n\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces

$$\sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Un *frame*[14] F de un espacio vectorial V es una generalización de una base en el que F puede ser linealmente dependiente.

Definición 2.19 (*Frame*)**.**
Un "frame"es un conjunto $\{e_k\}$ de elementos de V que satisfacen la condición de admisibilidad:

$$\exists A, B \in \mathbb{R}: \ 0 < A \leq B < \infty\ , \qquad A\|v\|^2 \leq \sum_k |\langle v|e_k\rangle|^2 \leq B\|v\|^2, \quad \forall v \in V. \tag{2.3}$$

Esto significa que las constantes A y B pueden ser escogidas independientemente de v, éstas sólo dependen del conjunto $\{e_k\}$.

- Si $\{e_k\}_{k=1,\ldots,m}$ es un *frame* en V, y $\{v_k\}_{k=1,\ldots,n}$ es un conjunto finito de vectores arbitrarios en V, entonces $\{e_k\}_{k=1,\ldots,m} \bigcup \{v_k\}_{k=1,\ldots,n}$ es también un *frame* en V. Un *frame* que no es base se dice que es **sobre-completo** o redundante.

- Un conjunto de vectores $\{e_k\}_{k=1,\ldots,m}$ en V es un *frame* en V si y sólo si el envolvente de $\{e_k\}_{k=1,\ldots,m}$ genera todo V, es decir

$$L\left(\{e_k\}_{k=1,\ldots,m}\right) = V.$$

[14]Se puede ver un estudio detallado de los *frames* en la referencia [47].

- Sea un espacio vectorial V con el *frame* $\{e_k\}_{k=1,\ldots,m}$, definimos la aplicación lineal

$$T : \mathbb{C}^m \longrightarrow V, \quad T\{c_k\}_{k=1,\ldots,m} = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k.$$

T se le define con el nombre de operador *pre-frame*, o operador **síntesis**. El operador adjunto se expresa de la forma

$$T^* : V \longrightarrow \mathbb{C}^m, \quad T^*v = \{\langle v, v_k\rangle\}_{k=1,\ldots,m},$$

siendo $v \in V$, $\{v_k\}_{k=1,\ldots,m}$ un *frame* de V. A este operador se le llama operador **análisis**. Si componemos T con su adjunto T^*, obtenemos el operador *frame*

$$S : V \longrightarrow V, \quad Sv = TT^*v = \sum_{k=1}^{m} \langle v, v_k\rangle v_k.$$

En términos del operador *frame*

$$\langle Sv, v\rangle = \sum_{k=1}^{m} |\langle v, v_k\rangle|^2, \; v \in V.$$

Un *frame* es un sistema generador, pero un sistema generador puede no ser un *frame*. A continuación se muestra un ejemplo de esto.

Ejemplo:

Vamos a poner un ejemplo de sistema generador que no es *frame*.

$$S = \left\{(1,0),(0,1),(0,\frac{1}{\sqrt{2}}),(0,\frac{1}{\sqrt{3}}),\ldots\right\} \equiv \{e_n\}_{n=0,\ldots,\infty}.$$

$$\langle S\rangle = \mathbb{R}^2, \qquad \langle S\rangle \equiv \text{envolvente lineal de } S;$$

con $e_0 = (1,0),\; e_n = (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$, donde n toma los valores $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Si cogemos un vector $|v\rangle = (0,1) \equiv e_1$, $\|v\| = 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle v|e_k\rangle|^2 = 0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty,$$

por lo que, no se cumple la condición de admisibilidad (2.3) de la definición de *frame*.

Definición 2.20 ("*Frame dual*")**.**
Un "frame dual" $\tilde{e}_k$ es cualquier conjunto de vectores que cumplan la siguiente propiedad:

$$v = \sum_k \langle\tilde{e}_k|v\rangle e_k = \sum_k \langle e_k|v\rangle \tilde{e}_k, \qquad \forall v \in V.$$

Esto implica que un "frame" junto con su "frame dual" tienen propiedades análogas que una base ortonormal. En particular existe una "resolución de la identidad":

$$1 = \sum_k |\tilde{e}_k\rangle\langle e_k| = \sum_k |e_k\rangle\langle\tilde{e}_k|.$$

Se puede decir también que $\tilde{e}_k$ es "frame dual" si cumple que $\langle e_k|\tilde{e}_{k'}\rangle = \langle\tilde{e}_k|e_{k'}\rangle = \delta_{kk'}$.

Definición 2.21 (“*Frame tight*” o ajustado)**.**
Un “frame” es “tight” si las cotas de “frame” A y B son iguales ($A = B$). Esto significa que el “frame” obedece a una generalización de la identidad de Parseval (2.1). Un “frame” está normalizado si $A = B = 1$. Un “tight frame” normalizado se le llama también un “frame” de Parseval.

Definición 2.22 (“*Frame*” uniforme)**.**
Un “Frame” es uniforme si cada elemento tiene la misma norma: $\forall k,\ \|e_k\| = c$, donde c es una constante independiente de k.

Teorema 2.10 (Teorema de representación de Riesz-Fréchet)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert (separable o no) con producto escalar $(\cdot,\cdot)$, y $\mathcal{H}'$ su espacio dual, consistente en todas las funciones lineales continuas de $\mathcal{H}$ en el cuerpo base $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si ψ es un elemento de $\mathcal{H}$, entonces $\forall F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ existe un único vector $\psi \in \mathcal{H}$ tal que*

$$F(\phi) = (\psi, \phi), \qquad \forall \phi \in \mathcal{H}.$$

Este teorema establece que cada elemento de $\mathcal{H}'$ puede ser escrito unívocamente de esta forma.

Este teorema establece una conexión importante entre un espacio de Hilbert y su espacio dual. Por lo que representa una justificación para la notación *bra-ket* de Dirac en el tratamiento matemático de la Mecánica Cuántica.

2.10.3. Reconstrucción de funciones: caso continuo

Vamos a considerar una representación unitaria U de un grupo de Lie G sobre un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$. Consideremos el espacio $L^2(G, dg)$ de funciones complejas de cuadrado integrable Ψ sobre G, donde $dg = d(g'g), \forall g' \in G$ es la medida invariante por la izquierda de Haar que define el producto escalar

$$(\Psi, \Phi) = \int_G \bar{\Psi}(g)\Phi(g)dg.$$

Definición 2.23 (Vector admisible o fiducial)**.**
*Una función distinta de cero $\gamma \in \mathcal{H}$ se denomina **admisible** o (vector fiducial) si:*

$$\Gamma(g) \equiv \langle U(g)\gamma|\gamma\rangle \in L^2(G, dg).$$

Eso es si

$$C_\gamma = (\Gamma(g), \Gamma(g)) = \int_G \bar{\Gamma}(g)\Gamma(g)dg = \int_G |\langle U(g)\gamma|\gamma\rangle|^2 dg < \infty\ .$$

Definición 2.24 (Estados Coherentes)**.**
*Asumimos que la representación U es irreducible y que existe una función γ admisible. Entonces un sistema de **estados coherentes (CS)** de $\mathcal{H}$ asociados a G se define como el conjunto de funciones en la órbita de γ bajo G.*

$$\gamma_g = U(g)\gamma,\ g \in G.$$

Definición 2.25 (Vector admisible módulo un subgrupo).
Sea el espacio homogéneo $Q = G/H$, con H un subgrupo cerrado. Entonces la función distinta de cero γ se dice que es ***admisible*** mod(H, σ) *(con $\sigma : Q \longrightarrow G$, una sección de Borel), y la representación U de cuadrado integrable mod(H, σ), si se cumple la condición*

$$\int_Q |\langle U(\sigma(q))\gamma|\psi\rangle|^2 dq < \infty, \ \forall\psi \in \mathcal{H}, \tag{2.4}$$

donde dq es una medida quasi-invariante sobre Q.

Los estados coherentes *indexados* en Q están definidos como

$$\gamma_{\sigma(q)} = U(\sigma(q))\gamma, \ q \in Q,$$

y forman un conjunto *sobre-completo* en $\mathcal{H}$.

La condición (2.4) puede ser escrita también como un valor esperado, donde $A_\sigma = \int_Q |\gamma_{\sigma(q)}\rangle\langle\gamma_{\sigma(q)}|dq$. A_σ es un operador positivo, acotado e invertible.

$$0 < \int_Q |\langle U(\sigma(q))\gamma|\psi\rangle|^2 dq = \langle\psi|A_\sigma|\psi\rangle < \infty \quad \forall\psi \in \mathcal{H}.$$

Si el operador A_σ^{-1} es acotado, entonces el conjunto $S_\sigma = \left\{|\gamma_{\sigma(q)}\rangle, \ q \in Q\right\}$ se dice que es un *frame* y un *tight frame* si A_σ es proporcional a la identidad, $A_\sigma = \lambda I, \ \lambda > 0$.

Vamos a considerar que γ genera un *frame* (es decir, que A_σ^{-1} es acotado). Entonces definimos la aplicación lineal (operador de muestreo)

$$\begin{aligned} T_\gamma : \ & \mathcal{H} \longrightarrow L^2(Q, dq) \\ & \psi \longmapsto \Psi_\gamma(q) = (T_\gamma\psi)(q) = \langle\gamma_{\sigma(q)}|\psi\rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Su rango $L^2_\gamma(Q, dq) \equiv T_\gamma(\mathcal{H})$ es completo con respecto al producto escalar

$$(\Phi|\Psi)_\gamma \equiv (\Phi|T_\gamma A_\sigma^{-1} T_\gamma^{-1}\Psi)_Q.$$

T_γ es unitario de $\mathcal{H}$ a $L^2_\gamma(Q, dq)$. Así que, la aplicación inversa T_γ^{-1} nos da la *fórmula de reconstrucción*

$$A_\sigma|\psi\rangle = \int |\gamma_q\rangle\langle\gamma_q|\psi\rangle dq = \int |\gamma_q\rangle\Psi_\gamma(q)dq \Longrightarrow$$

$$\boxed{A_\sigma^{-1}A_\sigma|\psi\rangle = |\psi\rangle = T_\gamma^{-1}\Psi_\gamma = \int_Q \Psi_\gamma(q)A_\sigma^{-1}|\gamma_{\sigma(q)}\rangle dq, \qquad \Psi_\gamma \in L^2_\gamma(Q, dq).} \tag{2.6}$$

Esta fórmula expande la señal ψ en términos del *frame dual* $A_\sigma^{-1}\gamma_{\sigma(q)}$ con los coeficientes $\Psi_\gamma(q) = (T_\gamma\psi)(q)$. Estas expresiones adquieren una forma más simple cuando A_σ es múltiplo de la identidad (*frame tight*).

2.10.4. Reconstrucción de funciones: discretización y muestreo

Para un tratamiento numérico, la integral

$$A_\sigma = \int_Q |\gamma_{\sigma(q)}\rangle\langle\gamma_{\sigma(q)}| dq$$

se discretiza, por lo que nos restringimos a un subconjunto discreto $\mathcal{Q} \subset Q$. La cuestión es si esta restricción implica una pérdida de información, es decir, si el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ |q_k\rangle \equiv |\gamma_{\sigma(q_k)}\rangle,\ q_k \in \mathcal{Q} \right\}$$

constituye un *frame* discreto por él mismo, con operador *resolución*

$$\mathcal{A} = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} |q_k\rangle\langle q_k|.$$

El operador $\mathcal{A}$ no necesita coincidir con el original A_σ. De hecho, un *tight frame* continuo podría contener *frames* discretos que no son *tight*, que es lo que sucede en nuestro caso.

Asumimos que $\mathcal{S}$ genera un *frame* discreto, esto es, que existen dos constantes positivas $0 < b < B < \infty$ (cotas *frame*), tal que cumple la **condición de *frame***:

$$b\|\psi\|^2 \leq \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} |\langle q_k|\psi\rangle|^2 \leq B\|\psi\|^2, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \tag{2.7}$$

Si

$$\langle\psi|\mathcal{A}|\psi\rangle = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} \langle\psi|q_k\rangle\langle q_k|\psi\rangle = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} |\langle q_k|\psi\rangle|^2,$$

la condición de *frame* es equivalente a decir que el valor esperado $\langle\psi|\mathcal{A}|\psi\rangle$ está acotado entre

$$b \leq \frac{\langle\psi|\mathcal{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \leq B.$$

Para discutir las propiedades de un *frame*, es conveniente definir el operador *frame* (o de muestreo)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}:\ & \mathcal{H} \longrightarrow l^2 \\ & \psi \longmapsto \mathcal{T}(\psi) = \{\langle q_k|\psi\rangle,\ q_k \in \mathcal{Q}\}. \end{aligned}$$

Si calculamos el valor esperado de $\mathcal{T}^*\mathcal{T}$ sobre $|\psi\rangle$, obtenemos:

$$\langle\psi|\mathcal{T}^*\mathcal{T}|\psi\rangle = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} \langle\psi|q_k\rangle\langle q_k|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{A}|\psi\rangle.$$

$\mathcal{T}^* : l^2 \longrightarrow \mathcal{H}$ es el operador *síntesis*.
Entonces podemos escribir $\mathcal{A} = \mathcal{T}^*\mathcal{T}$, y la condición de admisibilidad adopta la forma:

$$bI \leq \mathcal{T}^*\mathcal{T} \leq BI,$$

donde el I es el operador identidad en $\mathcal{H}$.

A partir de la condición de *frame*, y como b y B son constantes positivas, entonces tenemos que $\mathcal{A}$ es invertible y su inversa es acotada. Si definimos el *frame* dual como

$$\left\{ |\tilde{q}\rangle \equiv \mathcal{A}^{-1}|q\rangle \right\},$$

uno puede probar fácilmente que el análogo de la fórmula de reconstrucción (2.6) para el espacio discreto $\mathcal{Q}$ es:

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} \langle q_k|\psi\rangle |\tilde{q}_k\rangle,} \tag{2.8}$$

con $\Psi_k \equiv \langle q_k|\psi\rangle$, que converge fuertemente en $\mathcal{H}$. Además, tenemos una *resolución de la identidad*:

$$\mathcal{T}_l^+\mathcal{T} = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} |\tilde{q}_k\rangle\langle q_k| = \mathcal{T}^*(\mathcal{T}_l^+)^* = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} |q_k\rangle\langle \tilde{q}_k| = I, \tag{2.9}$$

donde $\mathcal{T}_l^+ \equiv (\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{-1}\mathcal{T}^*$ es la pseudoinversa por la izquierda. Donde el operador *frame* dual[15] es $\tilde{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_l^+)^*$.

El operador $P = \mathcal{T}\mathcal{T}_l^+$ actuando sobre l^2 es un proyector ortogonal sobre el rango de $\mathcal{T}$.

La función $\Psi(q)$ puede ser obtenida de la forma

$$\Psi(q) \equiv \langle q|\psi\rangle = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} \Xi_k(q)\Psi_k$$

a partir de sus datos $\Psi_k = \langle q_k|\psi\rangle$ y a través de la función de tipo *sinc*

$$\Xi_k(q) = \langle q|\tilde{q}_k\rangle, \qquad \Xi_k(q_l) = P_{lk}.$$

Un conjunto arbitrario sobre-completo de datos $\Psi_k \in l^2$, puede ser incompatible con $|\psi\rangle$, y por lo tanto es necesario proyectar previamente. Este caso lo vamos a denominar *sobre-muestreo*, es decir, hay más datos que los necesarios. El conjunto $\mathcal{Q}$ se dice que es el espacio de muestreo para el espacio $\mathcal{H}$.

El otro caso sería que no se tuvieran suficientes puntos para completar la reconstrucción de la señal, pero incluso para este caso, es posible poder reconstruir parcialmente la señal. En este caso, $\mathcal{S}$ no genera un *frame* discreto, y el operador $\mathcal{A}$ no va a ser invertible. Pero se puede construir otro operador a partir de $\mathcal{T}$, actuando sobre l^2.

Los elementos de matriz de $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$ son

$$\mathcal{B}_{kl} = \langle q_k|q_l\rangle.$$

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es el *overlapping kernel* discreto. Si el conjunto $\mathcal{S}$ es linealmente independiente, el operador $\mathcal{B}$ será invertible y puede construirse una pseudoinversa por la izquierda para

[15]Introducido por Antoine y Gazeau ([26]).

$\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_r^+ \equiv \mathcal{T}^*(\mathcal{T}\mathcal{T}^*)^{-1}$, de tal forma que $\mathcal{T}\mathcal{T}_r^+ = I_{l^2}$. Y como antes habíamos mencionado, aquí existe otro operador análogo: $P_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T}$ actuando sobre $\mathcal{H}$ que es un proyector ortogonal en el subespacio $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ expandido sobre $\mathcal{S}$. Podemos definir un *pseudo frame* dual como

$$|\tilde{q}_k\rangle = \sum_{q_l \in \mathcal{Q}} \mathcal{B}_{lk}^{-1} |q_l\rangle. \tag{2.10}$$

Nos da una *resolución* del proyector $P_{\mathcal{S}}$

$$\mathcal{T}_r^+\mathcal{T} = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} |\tilde{q}_k\rangle\langle q_k| = \mathcal{T}^*(\mathcal{T}_r^+)^* = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} |q_k\rangle\langle\tilde{q}_k| = P_{\mathcal{S}}.$$

Usando esto, una reconstrucción parcial $\hat{\psi}$ de la señal ψ, se puede obtener de la forma:

$$\hat{\Psi}(q) = \langle q|\hat{\psi}\rangle = \sum_{q_k \in \mathcal{Q}} L_k(q)\Psi_k,$$

a partir de sus datos $\Psi_k = \langle q_k|\psi\rangle$, a través de las funciones de interpolación de tipo Lagrange

$$L_k(q) = \langle q|\tilde{q}_k\rangle \tag{2.11}$$

con $L_k(q_l) = \delta_{kl}$. Aquí $\hat{\psi}$ es la proyección ortogonal de ψ sobre el subespacio $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, esto es, $|\hat{\psi}\rangle = P_{\mathcal{S}}|\psi\rangle$. La distancia de la función exacta ψ a la señal reconstruida $\hat{\psi}$ está dada por la función error:

$$E_\psi(\mathcal{S}) = \frac{\|\psi - \hat{\psi}\|}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\sqrt{\langle\psi|I - P_{\mathcal{S}}|\psi\rangle}}{\langle\psi|\psi\rangle}. \tag{2.12}$$

Los operadores $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se intercalan con el operador *frame* $\mathcal{T}$ (o de muestreo), $\mathcal{T}\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}$ fuera invertible, entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ serían invertibles, y además, $\mathcal{T}_r^+ = \mathcal{T}_l^+ = \mathcal{T}^{-1}$. Este caso correspondería al caso de "muestreo crítico", donde ambos operadores $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ puede ser usados para reconstruir completamente la señal. En muchos casos, no es posible encontrar un conjunto de puntos $\mathcal{Q}$ tal que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean invertibles. El ejemplo más común es el espacio de Bargmann-Fock de funciones analíticas sobre $\mathbb{C}$, donde uno puede encontrar retículos donde se puede muestrear (y por lo tanto $\mathcal{A}$ es invertible), o que se puede interpolar dichos datos (y así $\mathcal{B}$ es invertible), pero no ambos simultáneamente. Ejemplos de muestreo crítico están dados por el espacio de funciones de banda limitada sobre $\mathbb{R}$ y el conjunto $\mathbb{Z}$, en el que ambos son muestreables e interpolables, y el espacio de funciones sobre la esfera de Riemann (su proyección estereográfica sobre el plano complejo) con momento angular fijo s y el conjunto de N raíces de la unidad, con $N = 2s + 1$.

En el caso en el que tengamos un número finito N de puntos de muestreo q_k, el espacio l^2 puede ser substituido por $\mathbb{C}^N$, y el operador $\mathcal{B}$ se puede identificar con una matriz con respecto a una base fijada.

Capítulo 3

Teoremas de muestreo y Transformada Discreta de Fourier sobre la esfera

3.1. Introducción

Usaremos la teoría de estados coherentes para probar un teorema de muestreo para funciones de Majorana (holomorfas) sobre la esfera de Riemann. Y daremos una fórmula de reconstrucción exacta como un producto de convolución de N datos y un *kernel de reconstrucción* dado (una función de tipo *sinc*). Discutiremos los casos de submuestreo y sobre-muestreo.

El hecho de tomar las raíces de la unidad como puntos de muestra nos va a permitir encontrar las fórmulas explícitas de inversión para los operadores de *resolución* y *overlapping kernel* a partir de la teoría de las Matrices Circulantes y las matrices Fourier Rectangulares. Se considera también, el caso de las funciones de banda limitada sobre la esfera de Riemann para un J máximo. Y se analiza la conexión con la representación de los ángulos de Euler estándar en términos de armónicos esféricos a través de las transformaciones de Bargmann discretas.

3.2. Representaciones de $SU(2)$. Estados coherentes

3.2.1. Sistemas de coordenadas y generadores

La representación fundamental de dos dimensiones del grupo de Lie $SU(2)$ (grupo de matrices complejas 2×2 unitarias con determinante 1) es:

$$SU(2) = \left\{ U(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ -\bar{\zeta}_2 & \bar{\zeta}_1 \end{pmatrix},\ \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C} :\ \det(U) = |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = 1 \right\}. \quad (3.1)$$

Las coordenadas ζ_1, ζ_2 se denominan parámetros de **Cayley-Klein**. Si definimos otras variables

$$\zeta_1 = \epsilon_0 + i\epsilon_3, \qquad \zeta_2 = \epsilon_2 + i\epsilon_1, \quad \epsilon_j \in \mathbb{R}, \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Tenemos

$$\det(U) = |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = \epsilon_0^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 = 1,$$

de ahí que podamos ver $SU(2) \approx \mathbb{S}^3$ (la esfera en tres dimensiones) como una variedad tridimensional. Es decir, $SU(2)$ es difeomorfo a la esfera de tres dimensiones $\mathbb{S}^3$.

Utilizando las matrices de Pauli, el conjunto de matrices

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

es una base de matrices hermíticas 2×2 de traza cero. Es decir, una matriz $U \in SU(2)$, podemos expresarla en forma compacta

$$U(\epsilon) = \epsilon_0 I + 2i \sum_{k=1}^{3} \epsilon_k J_k, \tag{3.2}$$

donde I es la matriz identidad 2×2.

A las matrices de Pauli se les denomina generadores de las transformaciones infinitesimales

$$U = I + i\epsilon A, \qquad \epsilon \ll 1.$$

A es una matriz hermítica de traza cero, que se puede escribir como

$$A = \sum_{k=1}^{3} a_k J_k.$$

El álgebra de Lie de los generadores infinitesimales de $SU(2)$ está definido como el espacio vectorial real

$$su(2) = \langle \{J_1, J_2, J_3\} \rangle,$$

siendo $J_i,\ (i = 1, 2, 3)$ las matrices Hermíticas de traza cero satisfaciendo las relaciones de conmutación del momento angular

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \qquad [J_2, J_3] = iJ_1, \qquad [J_3, J_1] = iJ_2. \tag{3.3}$$

Cualquier grupo de Lie conexo como $SU(2)$ puede construirse a partir de la exponenciación de sus generadores infinitesimales.

$$U(\alpha) = e^{i\sum_{k=1}^{3} \alpha_k J_k} = I\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i\sum_{k=1}^{3} n_k J_k \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \tag{3.4}$$

donde $\alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, 3 \quad$ (coordenadas canónicas).

$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \qquad n_k \equiv \frac{\alpha_k}{\alpha}.$$

Si se comparan las relaciones (3.2) y (3.4) nos da una relación de los parámetros de Cayley-Klein (ϵ), y las coordenadas canónicas (α).

$$\epsilon_0 \equiv \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad \epsilon_k \equiv n_k \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Vamos a introducir otra parametrización compleja de $SU(2)$. Vamos a definir la siguiente relación de equivalencia en $SU(2)$.

$$(\zeta_1', \zeta_2') \sim (\zeta_1, \zeta_2) \Leftrightarrow (\zeta_1', \zeta_2') = \eta(\zeta_1, \zeta_2), \quad (\eta \in \mathbb{C}, |\eta| = 1).$$

El espacio cociente $(SU(2)/\sim)$ coincide con el espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^1$ que es isomorfo a $\mathbb{S}^2$. Vamos a denotar con $[\eta_1, \eta_2]$ a los elementos de las clases de equivalencia de $\mathbb{C}P^1$. Si $\eta_2 \neq 0$, entonces $[\eta_1, \eta_2] = [\frac{\eta_1}{\eta_2}, 1] \equiv [z, 1]$ representa un punto $z \in \mathbb{C}$, que está relacionado con la proyección estereográfica de la esfera de Riemann sobre $\mathbb{C}$. Si $\eta_2 = 0$, entonces $[\eta_1, 0] = [1, 0]$ es justo un punto (el polo norte o sur). La otra carta corresponde a $\eta_1 \neq 0$, que contiene el elemento identidad $I \in SU(2)$. Trabajaremos en esta carta, y definiremos $z \equiv \frac{\eta_2}{\eta_1}$. La proyección

$$\left.\begin{array}{rcl} \Pi : SU(2) & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (z_1, z_2) & \mapsto & [z_1, z_2] \end{array}\right\}$$

da a $SU(2)$ la estructura de un fibrado principal (fibración de Hopf) con grupo de estructura:

$$\Pi^{-1}\left([z_1, z_2]\right) = \{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| = 1\} \simeq U(1).$$

En nuestra carta, tomaremos $\eta = e^{i\varphi} = \frac{\zeta_1}{|\zeta_1|}$. Los parámetros de Cayley-Klein se pueden escribir en estas coordenadas (adaptadas a la fibración de Hopf) como:

$$\zeta_1 = \mathcal{N}(z, \bar{z})\eta, \ \zeta_2 = \mathcal{N}(z, \bar{z})z\eta, \ \mathcal{N}(z, \bar{z}) \equiv \sqrt{\frac{1}{1 + z\bar{z}}},$$

donde se ha definido el factor de normalización $\mathcal{N}$ por conveniencia.

- Si expresamos los operadores escalera como: $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$, podemos encontrar cualquier elemento del grupo $U \in SU(2)$, y expresarlo en las coordenadas complejas[1] z, η
$$U(z, \bar{z}, \varphi) = \mathcal{N}(z, \bar{z})e^{zJ_- - \bar{z}J_+}e^{-i\varphi J_3}. \tag{3.5}$$
- Podemos parametrizar los elementos de $SO(3)$ en términos de los ángulos de Euler, que corresponde a la elección del siguiente orden de transformación[2]:
$x_3(\varphi) \longrightarrow x_2(\theta) \longrightarrow x_3(\phi)$
$$U(\theta, \phi, \varphi) = e^{-i\phi J_3}e^{-i\theta J_2}e^{-i\varphi J_3}. \tag{3.6}$$
- Relación entre los parámetros de Cayley-Klein y los ángulos de Euler:
$$\zeta_1 = e^{-i\frac{\varphi+\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad \zeta_2 = e^{i\frac{\varphi-\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}.$$
Por lo que, la proyección estereográfica de la esfera de Riemann sobre el plano complejo es: $z = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = e^{i\phi}\tan\frac{\theta}{2}$.

En este apartado hemos discutidos las representaciones de $SU(2)$ de dimensión dos ($s = 1/2$). Vamos a considerar a continuación las representaciones irreducibles unitarias de dimensión superior de spin s arbitrario.

[1] Ver Apéndice A: **D1**.
[2] Ver Apéndice A: **D2**.

3.2.2. Representaciones de espín s arbitrario

Las representaciones irreducibles unitarias del álgebra de Lie $su(2)$ son de dimensión $2s+1$, donde $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ es un parámetro (espín momento angular) semientero que va a etiquetar cada representación. El espacio $\mathcal{H}_s \simeq \mathbb{C}^{2s+1}$ se pueden generar en la base ortonormal momento angular $B(\mathcal{H}_s) = \{|s,m\rangle,\ m = -s, \ldots, s\}$ que son autovectores comunes a J_3 y es el operador Casimir $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, es decir

$$J_3|s,m\rangle = m|s,m\rangle, \qquad J^2|s,m\rangle = s(s+1)|s,m\rangle.$$

De las relaciones de conmutación:

$$J_+ \equiv J_1 + iJ_2,\ J_- \equiv J_1 - iJ_2, \quad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm\ ,$$

observamos que los operadores $J_\pm$ son operadores escaleras de creación y destrucción, respectivamente, cuya acción sobre la base $B(\mathcal{H}_s)$ nos da

$$J_\pm|s,m\rangle = \sqrt{(s\mp m)(s\pm m+1)}|s,m\pm 1\rangle. \tag{3.7}$$

Si expresamos estos operadores en forma matricial, habrá que reordenar las bases de forma que $m = s, s-1, \ldots, -s$, es decir, se construirán las filas y las columnas en orden decreciente de espín. Para que sea coherente con la expresión que a continuación se escribe:

$$(J_\pm)_{m',m} \equiv \langle s,m'|J_\pm|s,m\rangle = \sqrt{(s\mp m)(s\pm m+1)}\ \delta_{m',m\pm 1}.$$

Se puede comprobar fácilmente que la acción de (3.7) preserva las relaciones de conmutación (3.3), por ejemplo:

$$[J_+, J_-] = 2J_3.$$

Sabiendo que $Q = SU(2)/U(1) = \mathbb{S}^2$, y tomando como sección de Borel (como hicimos en la sección 2.10.3), podremos simplemente tomar $\varphi = 0$ en los vectores $U(\theta,\phi,\varphi)|s,m\rangle$ y $U(z,\bar{z},\varphi)|s,m\rangle$.

Tenemos, por tanto, distintas caracterizaciones de los estados coherentes de espín, según tomemos una parametrización u otra. Nos vamos a centrar en las dos parametrizaciones: la compleja (Hopf)(3.5) y la de los ángulos de Euler (3.6).

3.2.3. Ángulos de Euler: Armónicos esféricos

- Para cualquier vector fidual $|\gamma\rangle = |s,m\rangle$, el conjunto de estados coherentes $|\theta,\phi;m\rangle = U(\theta,\phi)|s,m\rangle$ es sobre-completo[3] (para cualquier m) en $\mathcal{H}_s$.

- El conjunto de estados coherentes $\{|\theta,\phi;m\rangle\}$ es un *tight frame*[4].

[3]Ver Apéndice A: **D5**.
[4]Ver Apéndice A: **D6**.

Vamos a considerar el operador[5]

$$\mathcal{O} = \int d\Omega |\theta, \phi; m\rangle\langle\theta, \phi; m|, \quad (d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi);$$

donde $d\Omega$ es la medida invariante estándar sobre la esfera $\mathbb{S}^2$.

- Como $d\Omega$ es una medida invariante sobre $\mathbb{S}^2$, tenemos que $U'\mathcal{O} = \mathcal{O}U',\ \forall U' = U(\theta', \phi', \varphi') \in SU(2)$. Como U' es una representación irreducible, tenemos por el lema de Schur que $\mathcal{O} = \lambda I$, para alguna constante λ, donde I es el operador identidad.

- $$Tr(\mathcal{O}) = \lambda(2s+1) = 4\pi \Longrightarrow \lambda = \frac{4\pi}{2s+1} \Longrightarrow A_\sigma \equiv \frac{1}{\lambda}\mathcal{O} = \frac{2s+1}{4\pi}\int |\theta, \phi, m\rangle\langle\theta, \phi, m|\, d\Omega = I.$$

El solapamiento (*overlap*) de estados coherentes en esta representación de ángulos de Euler, sería[6]:

$$\langle\theta, \phi, m|\theta', \phi', m\rangle = \langle s, m|e^{i\theta J_2}e^{i\phi J_3}e^{-i\phi' J_3}e^{-i\theta' J_2}|s, m\rangle = \sum_{n=-s}^{s}\langle s, m|e^{i\theta J_2}|s, n\rangle\langle s, n|e^{-i\theta' J_2}|s, m\rangle e^{in(\phi-\phi')} =$$

$$= \sum_{n=-s}^{s}(d^s_{nm})^*(\theta) d^s_{nm}(\theta') e^{in(\phi-\phi')}.$$

donde

$$d^s_{nm}(\theta) \equiv \langle s, n|e^{-i\theta J_2}|s, m\rangle, \qquad \text{(son los coeficientes de la matriz } d \text{ de Wigner)}.$$

- Para el caso particular en que $s = j$ entero y en el que el vector *fidual* sea $|\gamma\rangle = |j, 0\rangle$, y utilizando las matrices D de Wigner, tenemos que son los armónicos esféricos $Y_j^m(\theta, \phi)$ las componentes de los estados coherentes de espín sobre la base ortonormal[7] $|j, m\rangle$.

$$\langle\theta, \phi; 0|j, m\rangle = \langle j, 0|U^*(\theta, \phi)|j, m\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}Y_j^m(\theta, \phi) = Y_j^m(\theta, \phi) \text{ de Racah.} \tag{3.8}$$

- De la relación de ortogonalidad de los armónicos esféricos:

$$\int d\Omega\, Y_l^m(\theta, \phi)(Y_{l'}^{m'})^*(\theta, \phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

  es fácil asociar[8] $Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \langle l, m|\theta, \phi\rangle$.

[5] Ver Apéndice A: **D7**.
[6] Estas funciones están dadas en [11], capítulo 15.
[7] Ver Apéndice A: **D9**.
[8] Ver Apéndice A: **D8**.

- Para un momento angular general j, el estado $|\psi\rangle$ tiene una descomposición en armónicos esféricos[9].

$$\Psi(\theta,\phi) = \langle\theta,\phi;0|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \langle\theta,\phi;0|j,m\rangle\langle j,m|\psi\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \sum_{m=-j}^{j} \psi_m Y_j^m(\theta,\phi), \quad (3.9)$$

con los coeficientes de Fourier $\psi_m = \langle j,m|\psi\rangle$

3.2.4. Caracterización holomorfa compleja: Funciones de Majorana

En este trabajo usamos como vector fidual el vector de peso máximo (como suele ser habitual en la definición de estados coherentes) $|\gamma\rangle = |s,s\rangle$, de tal forma que $J_+|\gamma\rangle = 0$. Generamos los estados coherentes

$$|z\rangle \equiv U(z,\bar{z})|\gamma\rangle = \mathcal{N}_s(z,\bar{z}) e^{zJ_-} e^{-\bar{z}J_+}|s,s\rangle = \mathcal{N}_s(z,\bar{z}) e^{zJ_-}|s,s\rangle \ , \quad (3.10)$$

donde $U(z,\bar{z}) \equiv U(z,\bar{z},0)$. Hay que recordar que $\mathbb{S}^2 = SU(2)/U(1)$.

Los estados $|z\rangle$ son funciones holomorfas[10], sin contar con el peso común $\mathcal{N}_s(z,\bar{z})$, que generalmente suele incluirse en la medida de integración.

Vamos a determinar $\mathcal{N}_s$ a partir de

$$J_\pm|s,m\rangle = \sqrt{(s\mp m)(s\pm m+1)}|s,m\pm 1\rangle \ ,$$

$$e^{zJ_-}|s,s\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n (J_-)^n|s,s\rangle = \sum_{n=0}^{2s} \frac{1}{n!} z^n (J_-)^n|s,s\rangle = \sum_{n=0}^{2s} z^n \sqrt{\binom{2s}{n}}|s,s-n\rangle \ . \quad (3.11)$$

donde se ha usado que

$$(J_-)^n|s,s\rangle = n!\sqrt{\binom{2s}{n}}|s,s-n\rangle \ ,$$

como se ha comprobado fácilmente.

Por lo tanto, la descomposición del estado coherente $|z\rangle$ sobre la base ortonormal $\{|s,m\rangle\}$ es:

$$|z\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}z}}\right)^{2s} \sum_{n=0}^{2s} z^n \sqrt{\binom{2s}{n}}|s,s-n\rangle \ . \quad (3.12)$$

- Entonces imponiendo la condición de unitariedad [11] $\langle z|z\rangle = 1$, nos da

$$\mathcal{N}_s = \mathcal{N}^{2s}, \quad \mathcal{N} \equiv \frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}z}} \ .$$

[9] Ver (2.5)
[10] Solamente funciones de z.
[11] Ver Apéndice A: **D3**.

- Al igual que para el caso de los ángulos de Euler[12], el *frame* $\{|z\rangle,\ z \in \mathcal{C}\}$ es *tight* en $\mathcal{H}_s$, ya que se tiene:

$$I = \frac{2s+1}{\pi}\int_{\mathcal{C}} |z\rangle\langle z|\frac{d^2z}{(1+z\bar{z})^2}, \qquad (d^2z \equiv dRe(z)dIm(z))\ .$$

Renombrando la base ortonormal $\{|s,m\rangle\}$ de forma adecuada, es decir, pasando de una etiqueta $n = 0,\ldots,2s$ a la etiqueta $m = -s, -s+1,\ldots,0,\ldots,s$ $(m = n-s)$, podemos expresar la descomposición del estado coherente (3.12), de la forma:

$$|z\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}z}}\right)^{2s}\sum_{m=-s}^{s} z^{s+m}\sqrt{\begin{pmatrix}2s\\ s+m\end{pmatrix}}|s,m\rangle\ .$$

- Vamos a obtener los coeficientes de la matriz irreducible[13]:

$$\langle z|s,m\rangle = \langle s,s|U^*(z,\bar{z})|s,m\rangle = \mathcal{N}^{2s}(z,\bar{z})\Upsilon_s^m(\bar{z}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}z}}\right)^{2s}(\bar{z})^{s+m}\sqrt{\begin{pmatrix}2s\\ s+m\end{pmatrix}}\ .$$

  Con $\Upsilon_s^m(\bar{z}) \equiv (\bar{z})^{s+m}\sqrt{\begin{pmatrix}2s\\ s+m\end{pmatrix}}$.

Υ_s^m es un monomio en función de $\bar{z}$, salvo un factor numérico. Introducimos la representación holomorfa como:

Dada $|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^{s}\psi_m|s,m\rangle,\ (|\psi\rangle \in \mathcal{H}_s)$,

$$\Psi(z) \equiv \langle z|\psi\rangle = (1+z\bar{z})^{-s}\sum_{m=-s}^{s}\psi_m\Upsilon_s^m(\bar{z}) = \mathcal{N}^{2s}(z,\bar{z})f(\bar{z})\ ,$$

donde $\Phi(z)$ se denomina función de Majorana y es (anti-)holomorfa salvo el factor $\mathcal{N}^{2s}$. La función $f(\bar{z}) \equiv \sum_{m=-s}^{s}\psi_m\Upsilon_s^m(\bar{z})$ es una función antiholomorfa de z. En este caso es un polinomio.

Usualmente el factor $\mathcal{N}^{2s}(z,\bar{z}) = (1+z\bar{z})^{-s}$ es absorbido en la medida de integración. Si escogemos como vector *fidual* el vector de peso mínimo $|\gamma\rangle = |s,-s\rangle$, obtendremos las funciones holomorfas $f(z)$.

- El conjunto de estados coherentes **CS** $\{|z\rangle\}$ no es ortogonal. El *kernel de solapamiento* [14] resulta ser:

$$\boxed{C(z,z') = \langle z|z'\rangle = \frac{(1+z'\bar{z})^{2s}}{(1+z\bar{z})^s(1+z'\bar{z}')^s}\ .}$$

[12]Ver Apéndice A: **D4**.
[13]Ver Apéndice A: **D10**.
[14]Ver Apéndice A: **D11**.

- Ambas representaciones: la de Euler y la compleja, para spin $s = j$ entero; están relacionadas por la **Transformación de Bargmann**[15].

$$K(\theta,\phi;z) \equiv \langle\theta,\phi|z\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \langle\theta,\phi|j,m\rangle\langle j,m|z\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}(1+z\bar{z})^{-j} \sum_{m=-j}^{j} Y_j^m(\theta,\phi)\Upsilon_j^m(z) =$$

$$= (1+z\bar{z})^{-j}\frac{\sqrt{(2j)!}}{2^j j!}\left(2z\cos\theta + z^2\sin\theta e^{i\phi} - \sin\theta e^{-i\phi}\right)^j \; . \tag{3.13}$$

3.3. Sobre-muestreo y muestreo crítico

Elegimos los puntos de muestreo de forma que el operador resolución $\mathcal{A}$ y el *Kernel* $\mathcal{B}$ de solapamiento sean invertibles y se puedan expresar en forma explícita. Para ello escogemos las N raíces de la unidad. La razón más importante de seleccionar las raíces de la unidad es que están asociados con el subgrupo cíclico discreto ($\mathbb{Z}_N$)

$$\mathbb{Z}_N \subset U(1) \subset SU(2) \; ,$$

y ello nos permitirá invertir de manera sencilla $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y hacer la reconstrucción en términos de la *DFT*. Para un momento angular s definido, tenemos $2s+1$ estados posibles, de ahí que el número de puntos N a escoger depende de que queramos realizar **muestreo crítico**: $N = 2s+1$, ***sobre-muestreo***: $N > 2s+1$, o ***submuestreo***: $N < 2s+1$.

En el caso *sobre-muestreo*, que es el que vamos a estudiar en esta sección, el conjunto S genera $\mathcal{H}_S$, y el operador resolución $\mathcal{A} = \mathcal{T}^*\mathcal{T}$ es invertible (véase sección 2.10.4).

Lema 3.1.
Sea $\mathcal{Q} = \left\{z_k = e^{2\pi i k/N}\right\},\ N \geq 2s+1,\ k = 0,\ldots,N-1$ *el subconjunto discreto del espacio homogéneo* $Q = SU(2)/U(1) \equiv \mathbb{S}^2 = \bar{\mathbb{C}}$ *(esfera de Riemann). El conjunto discreto de estados coherentes (**CS**)* $S = \{|z_k\rangle,\ z_k \in \mathcal{Q}\}$ *constituye un "frame" discreto en* $\mathcal{H}_S$ *y la expresión*

$$I_{2s+1} = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k\rangle\langle\tilde{z}_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{z}_k\rangle\langle z_k| \; , \tag{3.14}$$

proporciona una resolución de la identidad en $\mathcal{H}_s$*. Aquí* $|\tilde{z}_k\rangle = \mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle,\ (k = 0,\ldots,N-1)$ *("Frame dual"), y* $\mathcal{A}$ *es el operador resolución.*
$\mathcal{A}$ *es diagonal en la base ortonormal*[16] $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, $\mathcal{A} = diag(\lambda_0,\ldots,\lambda_{2s})$*, con*

$$\lambda_n = \frac{N}{2^{2s}}\binom{2s}{n} \quad (n = 0,\ldots,2s) \; .$$

[15]Ver Apéndice A: **D12**. Ver [12], p. 83, ecuación 17.
[16]Ver Apéndice A: **D13**.

Corolario 3.1. *Definiendo que* $D \equiv diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_{2s})$ *y usando que* $\mathcal{T}_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}}\lambda^{1/2}e^{-i2\pi kn/N}$, *tenemos las siguientes expresiones en términos de las matrices de Fourier rectangulares*[17]*:*

(a) $\mathcal{T} = \mathcal{F}_N \; i_{N,2s+1} \; D^{1/2}$.

(b) $\mathcal{A} = \mathcal{T}^*\mathcal{T} = D = diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_{2s})$.

(c) $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^* = \mathcal{F}_N \mathcal{A}^{\uparrow} \mathcal{F}_N^*$.

Lema 3.2.
Bajo los supuestos del Lema 3.1, el operador $P = \mathcal{T}\mathcal{T}_l^+ = \mathcal{F}_N \; P_{2s+1}\mathcal{F}_N^*$ *es un proyector ortogonal en un subespacio de* $\mathbb{C}^N$ *de dimensión*[18] $(2s+1)$ *en el rango de* $\mathcal{T}$.

Teorema 3.1 (Fórmula de reconstrucción[19])**.** *Cualquier función* $\psi \in \mathcal{H}_s$ *puede ser reconstruida a partir de* $N \geq 2s+1$ *puntos de muestra*

$$z_k = e^{2\pi ik/N}, \; (k = 0, 1, \ldots, N-1) \; ,$$

y los datos $\Psi(z_k) \equiv \langle z_k|\psi\rangle$. *Entonces*

$$\Psi(z) = \langle z|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(z_k)\Xi(zz_k^{-1}) \; ,$$

donde

$$\Xi(z) = \frac{2^s}{N}(1+z\bar{z})^{-s}\frac{1-\bar{z}^{2s+1}}{1-\bar{z}} \; .$$

La expresión $\Psi(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(z_k)\Xi(zz_k^{-1})$ puede interpretarse como una fórmula de interpolación, donde los polinomios de tipo Lagrange tiene la forma

$$L_k(z) = \Xi(zz_k^{-1}) \; ,$$

satisfaciendo las relaciones de ortogonalidad:

$$L_k(z_l) = \Xi(z_l z_k^{-1}) = P_{lk} \; ,$$

donde P es el proyector del Lema 3.2. Para el caso crítico $N = 2s+1 \Longrightarrow L_k(z_l) = \delta_{lk}$.

Corolario 3.2. *Los coeficientes de Fourier* a_m *del desarrollo* $|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^{s} a_m|s,m\rangle$, *para cualquier* $\psi \in \mathcal{H}_s$, *en la base ortonormal* $\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)$ *se puede determinar en términos de los datos* $\Psi(z_k) = \langle z_k|\psi\rangle$ *como*[20]*:*

$$a_{n-s} = \frac{2^s}{N}\binom{2s}{n}^{-1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(z_k)e^{2\pi ikn/N} \, , \, (n = 0, \ldots, 2s) \; .$$

[17]Ver Apéndice A: **D14**.
[18]Ver Apéndice A: **D15**.
[19]Ver Apéndice A: **D16**.
[20]Ver Apéndice A: **D17**.

- Es interesante describir esta demostración en términos de matrices de Fourier rectangulares[21]:
$$\mathcal{A} = \mathcal{T}^*\mathcal{T} = D \equiv diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_{2s}), \quad \mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^* = \mathcal{F}_N \mathcal{A}^{\uparrow} \mathcal{F}_N^* \ .$$

Proposición 3.1.
Definimos los datos duales como $\Gamma(k) \equiv \langle \tilde{z}_k|\psi\rangle$*, que están relacionados con los datos* $\Psi(k) \equiv \Psi(z_k) = \langle z_k|\psi\rangle$*, a través del producto de convolución*[22]

$$\Gamma(k) = [\Delta * \Psi](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta(k-l)\Psi(l) \ ,$$

donde $\Delta(k)$ *(El filtro), es la transformada de Fourier rectangular de* $\delta = (\lambda_0^{-1}, \ldots, \lambda_{2s}^{-1})$*,*

$$\Delta(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{2s} \lambda_n^{-1} e^{-i2\pi nk/N} = \frac{2^{2s}}{N^{3/2}} \sum_{n=0}^{2s} \binom{2s}{n}^{-1} e^{-i2\pi nk/N} \ .$$

La relación entre $\Psi(k)$ y $\Gamma(k)$ es simplemente un cambio de base, pero con un conjunto de generadores no ortogonales $\{|z_k\rangle\}$ y $\{|\tilde{z}_k\rangle\}$. Este cambio de base puede interpretarse como una convolución.

- Si definimos[23] $\tilde{\mathcal{B}} \equiv \langle \tilde{z}_l|\tilde{z}_k\rangle$ (*kernel de solapamiento dual*), vemos que
$$\tilde{\mathcal{B}} = \Delta = \mathcal{B}^+ \ .$$

- Para valores de espín altos $s \gg 1$ $(N \geq 2s+1)$, tenemos[24]
$$\Delta(k) = \frac{2^{2s}}{N^{3/2}} \left(1 + e^{-i4\pi sk/N} + O\left(\frac{1}{2s}\right)\right) \ . \tag{3.15}$$

Cuando $k = 0$, tenemos que:

$$\Delta(0) = \frac{2^{2s}}{N^{3/2}} \sum_{n=0}^{2s} \binom{2s}{n}^{-1} = \frac{2s+1}{N^{3/2}} \sum_{n=0}^{2s} \frac{2^n}{n+1} \ .$$

Además, se verifica[25]:

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2s} \binom{2s}{n}^{-1} = 2 \ .$$

Como se puede ver en el comportamiento asintótico del filtro (3.15), si tomamos el número de puntos de muestra $N = N(s) > 2^{4s/3} \geq 2s+1$ y para que cumpla la condición de *sobremuestreo*, es decir, $N \geq 2s+1$; entonces para $s \geq \frac{3}{2}$, tenemos que $\Delta(k)$ converge a cero para $s \longrightarrow \infty$. Pero si $N = N(s) = 2^{4s/3} \geq 2s+1$ para un $s \geq \frac{3}{2}$, tenemos que $\Delta(k)$ está acotada para $s \longrightarrow \infty$.

[21] Ver Apéndice A: **D18**.
[22] Ver Apéndice A: **D19**.
[23] Ver Apéndice A: **D20**.
[24] Ver Apéndice A: **D21**.
[25] Ver artículo [6]

3.4. Submuestreo y muestreo crítico

Vamos a suponer ahora que el número de puntos de muestra es $N \leq 2s+1$. Para el caso en el que $N < 2s+1$, no podemos reconstruir cualquier función arbitraria $\psi \in \mathcal{H}_s$, pero sí su proyección ortogonal $\hat{\psi} \equiv P_S\psi$ sobre $\hat{\mathcal{H}}_s$, subespacio de $\mathcal{H}_s$, generado por el conjunto discreto $S = \{|z_k\rangle,\ k = 0,\ldots,N-1\}$ de estados coherentes (CS). Es decir, la restricción a este subconjunto discreto implica una pérdida de información.

Para este caso el operador resolución $\mathcal{A}$ no es invertible. Y por lo tanto, no podemos construir un *frame*, ni una *resolución de la identidad*. El conjunto S es linealmente independiente, por lo que, podemos construir otro operador, el *overlapping kernel* $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$, que es invertible (pues tiene estructura circulante) y nos da una expresión para una fórmula de reconstrucción parcial.

Lema 3.3.
Sea[26] $\mathcal{Q} = \left\{z_k = e^{2\pi i k/N},\ k = 0,\ldots,N-1\right\}$ *un subconjunto discreto del espacio homogéneo* $Q = SU(2)/U(1) = \mathbb{S}^2 = \overline{\mathbb{C}}$. $N \leq 2s+1$ *(N raíces de la unidad). El operador "pseudo-frame"*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}:\mathcal{H}_s & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ \psi & \mapsto & \mathcal{T}(\psi) = \{\langle z_k|\psi\rangle,\ z_k \in \mathcal{Q}\}\ , \end{array}$$

es tal que el operador "overlapping kernel" $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$ *es una matriz* $N\times N$ *hermítica definida positivamente, y además, invertible, admitiendo la descomposición* $\mathcal{B} = \mathcal{F}_N\hat{D}\mathcal{F}_N^*$ *donde* $\hat{D} = diag(\hat{\lambda}_0,\ldots,\hat{\lambda}_{N-1})$ *es una matriz diagonal con*

$$\hat{\lambda}_k = \sum_{j=0}^{\bar{q}-1}\lambda_{k+jN} = \frac{N}{2^{2s}}\sum_{j=0}^{\bar{q}-1}\binom{2s}{k+jN}\ , \tag{3.16}$$

siendo $\bar{q} = Ceiling\left(\frac{2s+1}{N}\right)$.

Lema 3.4.
Bajo[27] *las condiciones del Lema 3.3, el conjunto* $|\tilde{z}_k\rangle,\ k = 0,\ldots,N-1$ *donde* $|\tilde{z}_k\rangle \equiv \sum_{l=0}^{N-1}\mathcal{B}^{-1}_{lk}|z_l\rangle$ *constituye un "pseudo-frame dual" para S. El operador* $P_S = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T}$ *es un proyector ortogonal que lleva de* $\mathcal{H}_s \longrightarrow S$*, donde* $\mathcal{T}_r^+ = \mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1}$ *(pseudo inversa por la derecha de* $\mathcal{T}$*), y*

$$\sum_{k=0}^{N-1}|\tilde{z}_k\rangle\langle z_k| = \sum_{k=0}^{N-1}|z_k\rangle\langle\tilde{z}_k| = P_S\ . \tag{3.17}$$

Aunque una reconstrucción completa de la señal original no es posible en el caso del *submuestreo*, sí podemos hacer una reconstrucción parcial de la manera que a continuación exponemos:

[26] Ver Apéndice A: **D22**.
[27] Ver Apéndice A: **D23**.

Teorema 3.2 (Fórmula parcial de reconstrucción[28]). *Cualquier función $\psi \in \mathcal{H}_s$ puede ser parcialmente reconstruida con $N \leq 2s+1$ datos $\Psi(z_k) \equiv \langle z_k|\psi\rangle$, muestreando en los puntos $z_k = e^{2\pi ik/N}$, $(k = 0, \ldots, N-1)$. Definimos $|\hat{\psi}\rangle = P_S|\psi\rangle$*

$$\hat{\Psi}(z) = \langle z|\hat{\psi}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(z_k)\hat{\Xi}(zz_k^{-1}) \ ,$$

donde

$$\hat{\Xi}(z) = \frac{2^s}{N}(1+z\bar{z})^{-s} \sum_{p=0}^{N-1} \hat{\lambda}_p^{-1} \sum_{l=0}^{\bar{q}-1} \lambda_{p+lN} \bar{z}^{p+lN} \ .$$

Al igual en el caso del *sobre-muestreo*, esto puede ser interpretado como una fórmula de interpolación, donde los polinomios de Lagrange son las funciones $\hat{L}_k(z) = \hat{\Xi}(zz_k^{-1})$, que satisfacen las relaciones propias de ortogonalidad

$$\hat{L}_k = \hat{\Xi}(z_l z_k^{-1}) = \delta_{lk} \ .$$

A continuación, vamos a dar una proposición que es análoga al que hicimos en el *sobre-muestreo*.

Proposición 3.2.
Definimos[29] los datos duales como $\Gamma(k) \equiv \langle \tilde{z}_k|\psi\rangle$, que están relacionados con los datos $\Psi(k) \equiv \Psi(z_k) = \langle z_k|\psi\rangle$, a través del producto de convolución

$$\Gamma(k) = \left[\hat{\Delta} * \Psi\right](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{\Delta}(k-l)\Psi(l)$$

donde el filtro $\hat{\Delta}(k)$ es la DFT de $\hat{\delta} \equiv (\hat{\lambda}_0^{-1}, \ldots, \hat{\lambda}_{N-1}^{-1})$, siendo $\hat{\lambda}_k$ los autovalores[30] del operador $\mathcal{B}$:

$$\hat{\Delta}(k) = \left[\mathcal{F}_N\hat{\delta}\right](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\lambda}_k^{-1} e^{-i2\pi nk/N} \ .$$

Corolario 3.3. *Los coeficientes de Fourier[31] $\hat{a}_m$ del desarrollo $|\hat{\psi}\rangle = \sum_{m=-s}^{s} \hat{a}_m|s,m\rangle$, para cualquier $\psi \in \mathcal{H}_s$, en la base ortonormal $B(\mathcal{H}_s)$ se pueden determinar en términos de los datos $\Psi(k) \equiv \langle z_k|\psi\rangle$ como:*

$$\hat{a}_{n-s} = \frac{N}{2^s} \binom{2s}{n}^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi kn/N} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{B}_{kl}^{-1}\Psi(l), \quad (n = 0, \ldots, 2s) \ .$$

también podemos expresar $\hat{a}$ en términos de los *datos duales* como:

$$\hat{a} = \mathcal{T}^*\Gamma = D^{1/2}\mathcal{F}_{N,2s+1}^*\Gamma \ .$$

[28] Ver Apéndice A: **D24**.
[29] Ver Apéndice A: **D25**.
[30] Ver ecuación (3.16).
[31] Ver Apéndice A: **D26**.

Corolario 3.4 (Interpolación covariante[32]). *Para $0 \leq k \leq N-1$, definimos sobre $\mathcal{Q}$ las funciones $\Phi_k(z) \equiv \langle z|z_k\rangle$, $z \in \mathbb{C}$. Sea $\zeta_0, \ldots, \zeta_{N-1}$; N números complejos y $\mathcal{B}_{kl}$ el operador "overlapping kernel". Definamos sobre $\mathcal{Q}$ la función*

$$\Phi(z) = \Phi(z_0, \ldots, z_{N-1}; \zeta_0, \ldots, \zeta_{N-1}; z) \equiv \frac{-1}{\det(\mathcal{B})} \det \begin{pmatrix} 0 & \Phi_0(z) & \cdots & \Phi_{N-1}(z) \\ \zeta_0 & \mathcal{B}_{00} & \cdots & \mathcal{B}_{0N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{N-1} & \mathcal{B}_{N-10} & \cdots & \mathcal{B}_{N-1N-1} \end{pmatrix} .$$

Entonces, tenemos que

1. *$\Phi(z) = \langle z|\phi\rangle$, para algún $\phi \in \mathcal{H}_s$.*
2. *Φ es una solución del problema de interpolación, es decir, $\Phi(z_k) = \zeta_k$, $(k = 0, \ldots, N-1)$.*
3. *Φ tiene norma mínima, en el sentido que si $\tilde{\Phi}$ es cualquier otra función sobre $\mathcal{Q}$ con $\tilde{\Phi} = \langle z|\tilde{\phi}\rangle$ para algún $\tilde{\phi} \in \mathcal{H}_s$ y $\tilde{\Phi}(z_k) = \zeta_k \Longrightarrow \|\tilde{\Phi}\| \geq \|\Phi\|$*
4. *El procedimiento de interpolación es invariante bajo la multiplicación por la izquierda en G, en el sentido que $U(g)\mathcal{B}U^*(g) = \mathcal{B}$ y*

$$\Phi(gz_0, \ldots, gz_{N-1}; \zeta_0, \ldots, \zeta_{N-1}; gz) = \Phi(z_0, \ldots, z_{N-1}; \zeta_0, \ldots, \zeta_{N-1}; z)$$

(gz denota la acción natural del grupo G sobre el espacio homogéneo $\mathcal{Q} = G/H$, así que la actuación por la izquierda en el problema de interpolación $\breve{\Phi}(gz_k) = \zeta_k$ es resuelta con la función $\breve{\Phi}(z) = \Phi(g^{-1}z)$)

3.5. Muestreo para el caso de varios espines

Para el caso de varios espines, es decir, para el caso de funciones de banda limitada, no es tan fácil seleccionar los puntos de muestreo para poder obtener una expresión explícita de la inversa de los operadores *resolution* y *overlapping kernel.*

Restringimos los valores de espín a números enteros.

Sea el espacio de funciones de banda limitada

$$\mathcal{H}^{(J)} = \bigoplus_{s=0}^{J} \mathcal{H}_s .$$

El conjunto de estados coherentes puede definirse de forma análoga a como se hizo para el caso de un solo espín.

[32] Ver Apéndice A: **D27**.

Expresamos las representaciones reducibles y unitarias de $SU(2)$, actuando sobre $\mathcal{H}^{(J)}$ como:

$$U^{(J)}(z,\bar{z}) = \bigoplus_{s=0}^{J} U_s(z,\bar{z}) \ ,$$

donde $U_s(z,\bar{z})$ son representaciones irreducibles y unitarias de espín s.

- El espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(J)}$ tiene una base ortogonal $\{|s,m\rangle\}$, en el que su *resolución de la identidad* es

$$I_{\mathcal{H}^{(J)}} = \sum_{s=0}^{J} \sum_{m=-s}^{s} |s,m\rangle\langle s,m| \ . \tag{3.18}$$

- Seleccionamos el vector *fiducial*

$$|\gamma\rangle^J = \frac{1}{\sqrt{J+1}} \bigoplus_{s=0}^{J} |s,s\rangle \ . \tag{3.19}$$

- Los estados coherentes están definidos como

$$|z\rangle^J = U^{(J)}(z,\bar{z})|\gamma\rangle^J \ . \tag{3.20}$$

- El *overlapping kernel* para el caso de varios espines es:

$$C^{(J)}(z,z') = {}^J\langle z|z'\rangle^J = \frac{1}{J+1} \sum_{s=0}^{J} \frac{(1+z'\bar{z})^{2s}}{(1+z\bar{z})^s(1+z'\bar{z}')^s} \ . \tag{3.21}$$

Vamos a justificar estos puntos[33]:

Cogemos las raíces de la unidad para el muestreo $z_k = e^{2\pi i k/N}$. Para el caso del muestreo crítico, tenemos:

$$N = \dim \mathcal{H}^{(J)} = \dim \bigoplus_{s=0}^{J} \mathcal{H}_s = 1+3+5+\ldots+(2J+1) = (J+1)^2 \ .$$

Donde $\dim \mathcal{H}_s = 2s+1$.

De esta forma $\mathcal{A}^{(J)}$ y $\mathcal{B}^{(J)}$ tiene una estructura sencilla, y además, sus inversas pueden calcularse.

Proposición 3.3.
Para[34] $N \geq 2J+1$, *el operador "overlapping kernel"* $\mathcal{B}^{(J)}$ *tiene rango* $2J+1$.

[33] Ver Apéndice A: **D28**.
[34] Ver Apéndice A: **D29**.

La demostración podría hacerse también usando que $\mathcal{B}^{(J)}$ tiene estructura circulante, $\mathcal{B}^{(J)}_{kl} = C_{l-k}$, con

$$C_k \equiv \frac{1}{J+1}\sum_{s=0}^{J} 2^{-2s}\left(1+e^{2\pi i k/N}\right)^{2s} \ .$$

Vemos que el colocar los puntos de muestra en el ecuador de la esfera de Riemann, no es una buena elección, por lo que, tenemos que buscar otras alternativas. El problema es que otras elecciones de puntos de muestra nos proporciona un *operador de resolución* con menos estructura, y por lo tanto, sin la posibilidad de encontrar una inversa explícita.

Otra posibilidad es usar un reticulado *equiangular* en (θ,ϕ), como el usado en las referencias [9, 10]. Si $(\theta_j,\phi_k) = \left(\frac{\pi}{N}j, \frac{2\pi}{N}k\right)$, $(j,k = 0,1,\ldots,N-1)$; es un retículo de N^2 puntos en la esfera, donde $N \geq J+1$. Los puntos asociados en el plano complejo con la proyección estereográfica están dados por

$$z_j^k = e^{i\phi_k}\tan\frac{\theta_j}{2} = e^{i\frac{2\pi}{N}k}\tan\left(\frac{\pi}{2N}j\right) = r_j e^{i\frac{2\pi k}{N}} \ .$$

Aunque se puede ver que en este caso el operador *resolución* es singular.

Vamos a seguir un procedimiento en el que consideramos las $2s+1$ raíces de r_s^{2s+1}

$$z_m^{(s)} = r_s e^{\frac{2\pi i m}{2s+1}}, \quad (s = 0,\ldots,J;\ m = 0,\ldots,2s). \tag{3.22}$$

Donde s denota el índice de espín, y m el índice para las raíces, y donde $r_s > 0$ verifica que si $s \neq s' \Longrightarrow r_s \neq r_{s'}$. Seguiremos usando $N = (J+1)^2$ puntos de muestra pero distribuidos en círculos de diferentes radios. En la esfera de Riemann, estos puntos se distribuyen en diferentes paralelos, uno por cada valor de espín.

El operador *frame* $\mathcal{T}$ es una matriz cuadrada $(J+1)^2 \times (J+1)^2$ con una estructura en bloques de $(2s'+1)\times(2s+1)$. Si Definimos la matriz

$$\mathcal{T}_{mn}^{(s',s)} \equiv \langle z_m^{(s')}|s, s-n\rangle; \qquad (m = 0,1,\ldots,2s'), (n = 0,1,\ldots,2s),$$

entonces

$$\mathcal{T} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{T}^{(0,0)} & \mathcal{T}^{(0,1)} & \ldots & \mathcal{T}^{(0,J)} \\ \hline \mathcal{T}^{(1,0)} & \mathcal{T}^{(1,1)} & \ldots & \mathcal{T}^{(1,J)} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathcal{T}^{(J,0)} & \mathcal{T}^{(J,1)} & \ldots & \mathcal{T}^{(J,J)} \end{array}\right) \ .$$

Corolario 3.5. $\mathcal{T}^{(s',s)} = \mathcal{F}_{2s'+1,2s+1}\left(D_{2s+1}^{(s',s)}\right)^{1/2}$ *donde* $D_{2s+1}^{(s',s)} = diag\left(\lambda_0^{(s',s)},\ldots,\lambda_{2s}^{(s',s)}\right)$ *con*[35]

$$\lambda_n^{(s',s)} = \frac{1}{J+1}\frac{2s'+1}{(1+r_{s'}^2)^{2s}}\binom{2s}{n} r_{s'}^{2n} \ .$$

[35]Ver Apéndice A: **D30**.

- Los bloques diagonales de $\mathcal{T}^{(s)}$ $(s = s')$ son los operadores *frame* para el caso de muestreo crítico, fijado el espín s, donde $s = 0, 1, \ldots, J$, y $\lambda_n(s,s)$ coincide con el $\lambda_n = N2^{-2s}\binom{2s}{n}$, $(n = 0, \ldots, 2s)$, si sustituimos $r_s = 1$, salvo un factor $\frac{1}{J+1}$.

- Al igual que si sumamos $\sum_{n=0}^{2s} \lambda_n = 2s + 1$, se tiene que para el caso de varios espines: $\sum_{s=0}^{J}\sum_{n=0}^{2s} \lambda_n^{(s,s)} = J + 1$.

- La estructura en bloques de $\mathcal{T}^{(J)}$ la heredan el operador resolución $\mathcal{A}$ y el operador *overlapping kernel* $\mathcal{B}$

$$\mathcal{A}^{(s',s)} = \sum_{s''=0}^{J} (\mathcal{T}^{(s'',s')})^* \mathcal{T}^{(s'',s)} = \sum_{s''=0}^{J} \left(D_{2s'+1}^{(s'',s')}\right)^{1/2} \mathcal{F}^*_{2s''+1,2s'+1}\mathcal{F}_{2s''+1,2s+1}\left(D_{2s+1}^{(s'',s)}\right)^{1/2},$$
$$\mathcal{B}^{(s',s)} = \sum_{s''=0}^{J} \mathcal{T}^{(s',s'')} (\mathcal{T}^{(s,s'')})^* = \sum_{s''=0}^{J} \mathcal{F}_{2s'+1,2s''+1}\left(D_{2s''+1}^{(s',s'')}\right)^{1/2}\left(D_{2s''+1}^{(s,s'')}\right)^{1/2} \mathcal{F}^*_{2s+1,2s''+1}.$$

El operador *overlapping kernel* $\mathcal{B}$ se obtiene a partir de:

$$\mathcal{B}_{m,n}^{(a,b)} \equiv \langle z_m^{(a)} | z_n^{(b)} \rangle^J = \frac{1}{J+1}\sum_{s=0}^{J}\left(\frac{\left(1 + r_a r_b e^{2\pi i \frac{n(2a+1)-m(2b+1)}{(2a+1)(2b+1)}}\right)^2}{(1+r_a^2)(1+r_b^2)}\right)^s \equiv \tag{3.23}$$

$$\equiv \frac{1}{J+1}\sum_{s=0}^{J}\left(\kappa_{m,n}^{a,b}\right)^s = \begin{cases} 1 & \text{si } z_m^{(a)} = z_n^{(b)} \\ \dfrac{1}{J+1}\dfrac{1-(\kappa_{m,n}^{a,b})^{J+1}}{1-\kappa_{m,n}^{a,b}} & \text{otros casos} \end{cases}. \tag{3.24}$$

donde

$$\kappa_{m,n}^{a,b} \equiv \frac{(1 + r_a r_b e^{2\pi i \frac{n(2a+1)-m(2b+1)}{(2a+1)(2b+1)}})^2}{(1+r_a^2)(1+r_b^2)} \tag{3.25}$$

es la razón de la suma geométrica.

El operador *overlapping kernel* $\mathcal{B}_{m,n}^{(a,b)}$ es una matriz hermítica con la siguiente estructura:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
\mathrm{circ}(1) & B_{01} & B_{02} & \ldots & B_{0k} & B_{0\ k+1} & \ldots \\ \hline
B_{01}^* & \mathrm{circ}(\mathcal{C}_0^{(1)},\mathcal{C}_1^{(1)},\mathcal{C}_2^{(1)}) & B_{12} & \ldots & B_{1k} & B_{1\ k+1} & \ldots \\ \hline
B_{02}^* & B_{12}^* & \mathrm{circ}(\mathcal{C}_0^{(2)},\ldots,\mathcal{C}_4^{(2)}) & \ldots & B_{2k} & B_{2\ k+1} & \ldots \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline
B_{0k}^* & B_{1k}^* & B_{2k}^* & \ldots & \mathrm{circ}(\mathcal{C}_0^{(k)},\ldots,\mathcal{C}_{2k}^{(k)}) & B_{k\ k+1} & \ldots \\ \hline
B_{0\ k+1}^* & B_{1\ k+1}^* & B_{2\ k+1}^* & \ldots & B_{k\ k+1}^* & \ddots & \ldots \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right).$$

Los bloques diagonales son matrices circulantes de dimensión $2s+1$ con $C_n^{(s)} = \frac{(1+r_s^2 e^{2\pi i n/(2s+1)})^{2s}}{(1+r_s^2)^{2s}}$, y los bloques no diagonales B_{pq} son matrices de dimensión $(2p+1)\times(2q+1)$.

El operador *overlapping kernel* $\mathcal{B}_{m,n}^{a,b}$ no es una matriz circulante[36], ni si quiera es una matriz circulante por bloques, por lo que el cálculo de la inversa se hace por métodos numéricos. Hemos comprobado numéricamente que $\mathcal{B}_{m,n}^{a,b}$ es invertible para diferentes elecciones de r_s.

Corolario 3.6. *Los coeficientes de Fourier a_m^s del desarrollo $\sum_{s=0}^{J}\sum_{m=-s}^{s} a_m^s|s,m\rangle$, para cualquier $\psi \in \mathcal{H}^{(J)}$ en la base ortonormal $\mathcal{B}(\mathcal{H}^{(J)})$ puede determinarse en términos de los datos $\Psi(z_k^{(s)}) = \langle z_k^{(s)}|\psi\rangle$ como*

$$\vec{a} = \mathcal{T}^* \mathcal{B}^{-1} \vec{\Psi} \ .$$

La inversión de $\mathcal{B}$ requiere $O(N^2)$ operaciones, pero se hace de una vez para siempre. Otros métodos, como en ([9] y [10]) hacen la reconstrucción con $O((N\log(N))^2)$ operaciones. Para competir con ellos habría que escoger los puntos de la muestra de manera que podamos invertir fácilmente $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$.

3.6. Conexión con la representación de los ángulos de Euler

Hemos probado las fórmulas de reconstrucción para funciones de Majorana $\Phi(z)$ con N datos $\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle$, con el muestreo $z_k = e^{2\pi i k/N}$ en la esfera de Riemann. La ventaja de usar esta representación holomorfa compleja en lugar de la representación de los ángulos de Euler son dos:

1. Podemos aprovechar la ventaja de su estructura circulante de los operadores *resolución* y *overlapping kernel*, respectivamente, para poder obtener sus fórmulas explícitas de inversión.

2. Podemos extender el procedimiento de muestreo a momentos angulares semienteros (s), que pueden ser aplicados, por ejemplo, a los *frames* discretos para estados coherentes de partículas con espín en Mecánica Cuántica.

Además, para momentos angulares enteros $s = j$, podríamos siempre pasar de una representación a otra a través de la transformación de Bargmann[37].

[36]Esto se debe al hecho de que los puntos de muestreo no forman un grupo abeliano. Solamente el conjunto de puntos de la forma $z_m^{(s)}$, $m = 0,1,\ldots,2s$, con s fijado, forma subgrupos cíclicos, y estos son los responsables para que estos bloques diagonales tenga forma circulante.

[37]Ver ecuación (3.13)

Vamos a trabajar, por simplicidad, en el caso crítico $N = 2j+1$, y denotaremos con $\Phi_k = \langle\theta_0, \phi_k|\psi\rangle$ los datos de la función (3.9) en la caracterización de los ángulos de Euler, y los puntos de muestreo $\theta_0 \neq 0, \pi$ y $\phi_k = \frac{-2\pi}{N}k$, $(k = 0, \ldots, N-1)$. Es decir, un conjunto de N puntos distribuidos uniformemente en un paralelo de la esfera $\mathbb{S}^2$, que barre según las agujas del reloj. Denotamos con

$$\mathcal{K}_{kl} \equiv K(\theta_0, \phi_k; z_l) = \langle\theta_0, \phi_k|z_l\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{(2j)!}}{2^{2j}j!} e^{i2\pi jk/N} \sin^j(\theta_0) \left(-1 + 2e^{i2\pi(l-k)/N} \cot\theta_0 + e^{i4\pi(l-k)/N}\right)^j \ . \tag{3.26}$$

la matriz discreta $N \times N$ de la transformación de Bargmann. Si insertamos la *resolución de la identidad* (3.14) en $\langle\theta_0, \phi_k|\psi\rangle$, tenemos la expresión[38]:

$$\Phi_k = \sum_{l,m=0}^{N-1} \mathcal{K}_{kl}\mathcal{B}^{-1}_{lm}\Psi_m, \quad \text{donde } \Psi_m = \langle z_m|\psi\rangle \ . \tag{3.27}$$

Que relaciona los datos entre ambas caracterizaciones o representaciones a través de las matrices $\mathcal{K}$ (3.26) y $\mathcal{B}$ (C.4), respectivamente.

Excepto para algunos valores de θ_0 (que veremos más tarde en esta sección), la transformación (3.27) es invertible, y se pueden obtener fórmulas explícitas para $\mathcal{K}^{-1}$. $\mathcal{K}$ puede escribirse como el producto $\mathcal{K} = \Lambda\mathcal{Q}$.

$$\Lambda_{kp} = \frac{\sqrt{(2j)!}}{2^{2j}j!} e^{i2\pi jk/N} \sin^j(\theta_0)\delta_{kp},$$

$$\mathcal{Q}_{pl} = (-1 + 2\cot(\theta_0)e^{i2\pi(l-p)/N} + e^{i4\pi(l-p)/N})^j \equiv q_{l-p} \equiv q_n \ .$$

de una matriz diagonal Λ y una matriz circulante $\mathcal{Q}$, que puede ser fácilmente invertida (siguiendo el procedimiento utilizado en el apéndice (C.2), como:

- $$\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{F}_N\Omega^{-1}\mathcal{F}_N^*, \quad \text{donde } \Omega = diag(\omega_0, \ldots, \omega_{N-1}) \quad \text{con autovalores}^{39}$$

  $$\omega_k = \sum_{n=0}^{N-1} q_n e^{-i2\pi kn/N} = N \sum_{p=0}^{j} \sum_{r=0}^{p}{}' \binom{p}{r}\binom{j}{p} (-1)^{p-r}(2\cot\theta_0)^{j-p} \ ,$$

  donde $\quad (p = 0, \ldots, j), (r = 0, \ldots, p)$.

  $\sum'$ indica la suma con la restricción $p = j - k + 2r$.

[38] Ver Apéndice A: **D31**.

- Podemos obtener la representación holomórfica $\vec{\Psi}$ a partir de los datos en la representación de los ángulos de Euler ($\vec{\Phi}$), a través de la fórmula

  $$\vec{\Psi} = \mathcal{B}\mathcal{Q}^{-1}\Lambda^{-1}\vec{\Phi} = \mathcal{F}_N D\Omega^{-1}\mathcal{F}_N^*\Lambda^{-1}\vec{\Phi} \ ,$$

  que puede ser visto como un producto de convolución[40]

  $$\vec{\Psi} = \vec{\Theta} * \vec{\Phi}'$$

  de los datos reescalados $\vec{\Phi}' = \Lambda^{-1}\vec{\Phi}$ y el filtro $\vec{\Theta} = \mathcal{F}_N\vec{\theta}$ con $\theta_k = \frac{\lambda_k}{\omega_k}$ el cociente de los autovalores de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{Q}$.

- Hay valores de θ_0 en los que $\mathcal{K}$ no tiene inversa. Por ejemplo, para el caso de $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (el ecuador), en el que

  $$\omega_k = \binom{j}{\frac{k}{2}}(-1)^{j-k/2}N.$$

Vamos a mostrar que esta situación está ligada con el hecho de que las funciones generales (3.9) en la representación de los ángulos de Euler no puede reconstruirse a partir de sus puntos de muestreo Φ_k sobre una distribución uniforme de N puntos en el ecuador de la esfera.

Insertamos $I_{2j+1} = \sum_{m=-j}^{j} |j,m\rangle\langle j,m|$ en $\langle\theta_0,\phi_k|\psi\rangle$ con $|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^{j} a_m|j,m\rangle$ con lo que[41]

$$\Phi_k = \sum_{m=-j}^{j}\sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}Y_j^m(\theta_0,\phi_k)a_m \ . \tag{3.28}$$

Definimos la función $\mathcal{Y}_{kn}(\theta_0) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{N}}Y_j^{n-j}(\theta_0,\phi_k)$, y viendo la demostración del corolario 3.2, en el que los coeficientes de Fourier a_{n-j} están dados en términos de los datos Ψ_k a través de $\vec{a} = D^{-1/2}\mathcal{F}_N^*\vec{\Psi}$, obtenemos una variante de la fórmula[42] (3.27)

$$\vec{\Phi} = \mathcal{Y}(\theta_0)D^{-1/2}\mathcal{F}_N^*\vec{\Phi}$$

que conecta de nuevo los datos en ambas representaciones. Conociendo que los armónicos esféricos se pueden expresar en términos de las funciones de Legendre asociadas[43] P_j^m:

$$Y_j^m(\theta,\phi) = e^{im\phi}P_j^m(\cos\theta) \ ,$$

---

[40] $\vec{\Psi} = \mathcal{F}_N(D\Omega^{-1})\mathcal{F}_N^*(\Lambda^{-1}\vec{\Phi})$.
[41] Ver Apéndice A: **D33**.
[42] Ver Apéndice A: **D34**.
[43] Apartado 10: *spherical harmonics*, p.76. [**12**].

cuyo valor en el ecuador $\theta_0 = \pi/2$ está dado en términos de las funciones Gamma[44]

$$P_j^m(0) = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(j+m)\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}j + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}j - \frac{1}{2}m + 1\right)} ,$$

por lo que, $\mathcal{Y}_{kn}(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad$ (para n impar).

En otras palabras, para $\theta_0 = \pi/2$, el proceso de reconstrucción en la representación de los ángulos de Euler falla, a menos que nos restrinjamos al subespacio de funciones ψ con coeficientes de Fourier nulos para n impar, es decir, $a_{n-j} = 0$ para n impar.

[44] Fórmula 8.6.1 (p.334), [**13**]. Ver Apéndice A: **D35**.

Capítulo 4

Teoremas de muestreo y Transformada Discreta de Fourier sobre el hiperboloide

4.1. Introducción

Usando estados coherentes probaremos un teorema de muestreo para funciones holomorfas sobre el hiperboloide (o su proyección estereográfica en el disco unidad $\mathbb{D}_1$), visto como un espacio homogéneo del grupo pseudo-unitario $SU(1,1)$. Daremos una fórmula de reconstrucción para funciones de banda limitada a partir de un *kernel* de tipo *sinc*, y una transformada discreta de Fourier de N puntos muestra convenientemente escogidos. Se estudiará en este capítulo también el caso de submuestreo y de funciones de banda ilimitada; y la condiciones bajo las cuales podemos obtener una reconstrucción parcial con N puntos muestra de forma aproximada, y de como tiende a la forma exacta cuando $N \longrightarrow \infty$.

4.2. Representaciones de $SU(1,1)$

4.2.1. Propiedades de $SU(1,1)$

El grupo $SU(1,1)$ está formado por todas las matrices 2×2 de determinante unidad que deja invariante la forma hermítica $\eta = diag(1,-1)$. Los elementos de $SU(1,1)$ son parametrizados a partir de dos números complejos

$$g = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \bar{\zeta}_2 & \bar{\zeta}_1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 = 1 \; .$$

El grupo $SU(1,1)$ es localmente isomorfo a $SO(2,1)$ (el grupo de rotaciones del espacio pseudo-euclídeo de dimensión 3, también llamado grupo de Lorentz de dimensión 3)

$$SO(2,1) = SU(1,1)/\mathbb{Z}_2 \qquad \text{donde} \qquad \mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\} \text{ (grupo cíclico)} \; .$$

También es localmente isomorfo al grupo simpléctico $Sp(2,\mathbb{R})$, al igual que a $SL(2,\mathbb{R})$. Ver [49, 50, 51, 52].

Las diferencias entre los grupos $SU(1,1)$ y $SU(2)$ son:

1. $SU(1,1)$ es no-compacto, mientras que $SU(2)$ es compacto.
2. $SU(2)$ es conexo, mientras que $SU(1,1)$ no lo es.

El grupo $G = SU(1,1)$ tiene una descomposición Gaussiana[1]

$$g = z_+ h z_- \quad , \quad z_+ \in Z_+ \quad , \quad z_- \in Z_- \quad , \quad h \in H^c \ .$$

Por ejemplo, la acción del grupo G sobre Z_- está dado por[2]

$$g = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \bar{\zeta}_2 & \bar{\zeta}_1 \end{pmatrix} : \qquad z \longrightarrow z_g = \frac{\zeta_1 z + \bar{\zeta}_2}{\zeta_2 z + \bar{\zeta}_1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esta acción no es transitiva, de manera que el plano complejo $\mathbb{C}$ está dividido (*foliado*) en tres órbitas:

1. $\mathbb{D}_1 \equiv X_+ = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ (Interior del círculo unidad).
2. $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}_1 \equiv X_- = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1\}$ (Exterior del círculo unidad).
3. $\mathbb{S}_1 \equiv X_0 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ (Frontera del círculo unidad).

La acción de cada elemento g nos da la transformación

$$(1 - |z|^2) \longrightarrow (1 - |z_g|^2) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta_2 z + \bar{\zeta}_1|^2} \ .$$

X_+ y X_- se refieren a las dos hojas del hiperboloide. En efecto, el espacio X_+ se puede identificar con el conjunto de elementos $g \in SU(1,1)$ con

$$\zeta_1 \equiv x_0 \quad , \quad \zeta_2 \equiv x_1 + i x_2 \ ,$$

$$g = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \bar{\zeta}_2 & \zeta_1 \end{pmatrix} \quad , \quad |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1 \quad , \quad \bar{\zeta}_1 = x_0 > 0,$$

de manera que se puede usar una parametrización

$$\zeta_1 = x_0 = \cosh \tau/2 \quad , \quad \zeta_2 = e^{-i\varphi} \sinh \tau/2 \quad , \quad \tau > 0 \ , \varphi \in [0, 2\pi).$$

X_+ es isomorfo a la hoja superior del hiperboloide $\{(x_0, x_1, x_2) : \ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1\}$. Es decir, el conjunto de vectores unitarios (en la métrica pseudo-euclídea), que tienen la forma

$$(\hat{n})^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, \ x_0 > 0, \quad \hat{n} = (\cosh \tau, \sinh \tau \cos \varphi, \sinh \tau \sin \varphi).$$

[1] Ver (sección 2.7)

[2] Demostración análoga a la que se hizo en el apartado (2.7)

Entonces un elemento del espacio X_+ está escrito de la forma

$$g_n = \begin{pmatrix} \cosh\tau/2 & e^{-i\varphi}\sinh\tau/2 \\ e^{i\varphi}\sinh\tau/2 & \cosh\tau/2 \end{pmatrix} = \exp[\tau(m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2)/2] ,$$

donde $\vec{m} = (0, m_1, m_2) \equiv (0, \sin\varphi, -\cos\varphi)$ y σ_1, σ_2 son matrices de Pauli.

Las matrices g_n describen una rotación hiperbólica alrededor del vector $\vec{m}$, con ángulo de rotación τ.

Como en el caso de $SU(2)$, la descomposición Gaussiana nos da un isomorfismo entre estos espacios. Por ejemplo, el isomorfismo entre el círculo unidad $X_+ = \{z : \ |z| < 1\}$, y la hoja superior del hiperboloide $\mathbb{H}^2 = \{\vec{n} \equiv (x_0, x_1, x_2) : \ (\vec{n})^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, \ x_0 > 0\}$ se establece de la forma:

$$z = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \tanh\left(\frac{\tau}{2}\right) e^{-i\varphi} \in \mathbb{D}_1, \quad \vec{n} = (\cosh\tau, \sinh\tau\cos\varphi, \sinh\tau\sin\varphi) .$$

Así, el disco abierto de radio unidad $\mathbb{D}_1$ puede ser considerado como la proyección estereográfica de la rama superior del hiperboloide $X_+ = \mathbb{H}^2$ sobre el plano complejo.

También podemos identificar $\mathbb{D}_1$ como el conjunto cociente $SU(1,1)/U(1)$, donde $U(1)$ es el subgrupo de las fases $e^{i\alpha} = \frac{\zeta_1}{|\zeta_1|}$.

El grupo $SU(1,1)$ es no-compacto, de manera que a diferencia del caso de $SU(2)$, todas sus representaciones unitarias irreducibles son de dimensión infinita. Este grupo tiene un número de series de representaciones irreducibles unitarias: principal, discreta y suplementaria. Aquí sólo vamos a utilizar la serie discreta.

4.2.2. Representación de la serie discreta

La representación de la serie discreta de $SU(1,1)$ es de dimensión infinita, pero en muchos aspectos es análoga a la representación de dimensión finita de $SU(2)$. Un vector de la base $|m\rangle$ vendrá etiquetado por un entero m, que va desde 0 hasta infinito.

El álgebra de Lie correspondiente al grupo de Lie $SU(1,1)$, tiene tres generadores infinitesimales K_1, K_2 y K_0, que en la representación fundamental se escriben como

$$K_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad K_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Las relaciones de conmutación son

$$[K_1, K_2] = -iK_0 \quad , \quad [K_2, K_0] = iK_1 \quad , \quad [K_0, K_1] = iK_2 .$$

Como para $SU(2)$, sería más apropiado expresarlos como

$$K_\pm = \pm i(K_1 \pm iK_2) \quad , \quad K_0 ,$$

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm \quad , \quad [K_-, K_+] = 2K_0 \; . \tag{4.1}$$

El operador cuadrático

$$\hat{C}_2 = K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 = K_0^2 - \frac{1}{2}(K_+K_- + K_-K_+)$$

es invariante (**operador Casimir**), es decir, conmuta con cada K_j $(j = 0, 1, 2)$. A partir del lema de Schur, para cualquier representación irreducible este operador se puede expresar como un múltiplo de la identidad

$$\hat{C}_2 = s(s-1)\hat{I} \; .$$

Así que una representación de $SU(1,1)$ está determinada con un número s que denominaremos *symplin* (espín simpléctico). Para las series discretas, el valor de s vale: $s = 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots$.

4.2.3. Representaciones irreducibles unitarias: estados coherentes de $SU(1,1)$

Buscamos representaciones irreducibles unitarias de $SU(1,1)$. Tomaremos una base de vectores ortonormales del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_s$ que sean autovectores de K_0:

$$K_0|s,n\rangle \equiv \; (n+s)|s,n\rangle \; .$$

A partir de las relaciones de conmutación (4.1), podemos mostrar que

$$K_+|s,n\rangle = \sqrt{(n+1)(2s+n)}|s,n+1\rangle, \quad K_-|s,n\rangle = \sqrt{n(2s+n-1)}|s,n-1\rangle \; .$$

- Cualquier elemento del grupo $U(\zeta) \in SU(1,1)$ se puede escribir de forma exponencial[3]

$$U(z,\bar{z},\varphi) = e^{zK_+ - \bar{z}K_-}e^{i\varphi K_0} \in SU(1,1) \; .$$

El subgrupo $U(1) \subset SU(1,1)$ está generado por K_0, y actúa de la forma, $e^{i\varphi K_0}|s,m\rangle = e^{i(m+s)\varphi}|s,m\rangle$. Al igual que se hizo para $SU(2)$, el espacio cociente será $Q = SU(1,1)/U(1) = \mathbb{D}_1$. Vamos a tomar la sección de Borel $\sigma : Q \longrightarrow G$ con $\sigma(z,\bar{z}) = (z,\bar{z},0)$. Tomaremos elementos de $SU(1,1)$ módulo fase, es decir, tomaremos $\varphi = 0$ para los vectores $U(z,\bar{z},\varphi)|s,m\rangle$.

Para cualquier vector *fiducial* $|\gamma\rangle = |s,m\rangle$ el conjunto de estados coherentes $|z,m\rangle \equiv U(z,\bar{z})|\gamma\rangle$ es sobre-completo (para cualquier m) en $\mathcal{H}_s$. Usaremos $|\gamma\rangle = |s,0\rangle$ como vector *fiducial* (es decir, el vector de peso mínimo), así que $K_-|\gamma\rangle = 0$ y los estados coherentes quedan como

$$|z\rangle \equiv U(z,\bar{z})|\gamma\rangle = e^{zK_+ - \bar{z}K_-}|s,0\rangle = \mathcal{N}_s(z,\bar{z})e^{zK_+}|s,0\rangle,$$

donde[4] $\mathcal{N}_s(z,\bar{z}) = (1-|z|^2)^s$ es un factor de normalización.

Se puede probar que:

[3]Ver Apéndice A: **DS1**.
[4]Ver Apéndice A: **DS2**.

- El *frame* $\{|z\rangle,\ z \in \mathbb{C}\}$ es *tight* en $\mathcal{H}_s$, con *resolución de la identidad* [5]

$$I = \frac{2s-1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_1} |z\rangle\langle z| \frac{d^2z}{(1-z\bar{z})^2} .$$

- La descomposición de los estados coherentes $|z\rangle$ sobre la base ortonormal $\{|s,m\rangle\}$ nos da los coeficientes de la matriz irreducible

$$U^s_m(z) \equiv \langle z|s,m\rangle = \sqrt{\binom{2s+m-1}{m}}(1-z\bar{z})^s \bar{z}^m . \tag{4.2}$$

<u>*Demostración*</u>*:* Se deduce fácilmente a partir de

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_s(z,\bar{z}) z^n \sqrt{\binom{2s+n-1}{n}} |s,n\rangle, \qquad \mathcal{N}_s(z,\bar{z}) = (1-z\bar{z})^s .$$

■

Un vector general de *symplin* s

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} a_m |s,m\rangle$$

escrita entonces en representación de estados coherentes como

$$\Psi(z) \equiv \langle z|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} a_m U^s_m(z),$$

que es una función anti-holomorfa de z. Los coeficientes de Fourier a_n pueden ser calculados a través de la siguiente fórmula integral:

$$a_n = \langle s,n|\psi\rangle = \frac{2s-1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_1} \Psi(z)\overline{U^s_n(z)} \frac{d^2z}{(1-z\bar{z})^2} . \tag{4.3}$$

Hay que mencionar que el conjunto de estados coherentes $\{|z\rangle\}$ no es ortogonal. A continuación escribimos el *solapamiento (overlap)*[6] entre los estados coherentes que resulta ser un *núcleo reproductor* (*reproducing kernel*).

$$\boxed{C(z,z') = \langle z|z'\rangle = \frac{(1-z\bar{z})^s(1-z'\bar{z}')^s}{(1-z'\bar{z})^{2s}} .}$$

Esta cantidad será esencial en nuestro procedimiento de muestreo sobre $\mathbb{D}_1$.

Existen otras representaciones de estados coherentes en $SU(1,1)$, correspondientes a otras parametrizaciones, pero que no discutiremos en este trabajo.

---

[5] Ver Apéndice A: **DS3**.

[6] La demostración es análoga a la que se hizo en **D11** para $SU(2)$. También hemos utilizado la expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \binom{p+n-1}{n} = (1-x)^{-p} ,$$

4.3. Teorema de muestreo y DFT en $\mathbb{D}_1$

Las técnicas de muestreo consisten en la evaluación de una función (*señal*) ψ sobre un conjunto de puntos discretos, y después reconstruir completamente o parcialmente ψ sin perder información esencial en el proceso.

En nuestro caso, elegimos de una forma conveniente nuestros puntos de muestreo, de tal forma, que el *operador resolución* $\mathcal{A}$ y el operador *reproducing kernel* $\mathcal{B}$ sea invertible y podamos encontrar una expresión explícita de esa inversa. Escogeremos un conjunto de N puntos distribuidos uniformemente en una circunferencia de radio r:

$$\mathcal{Q} = \left\{ q_k \equiv z_k = re^{2\pi ik/N},\ k = 0, 1, \ldots, N-1 \right\},\ r \in (0, 1); \tag{4.4}$$

que es un subconjunto discreto del espacio homogéneo $Q = SU(1,1)/U(1) = \mathbb{D}_1$, formado por las raíces[7] N-ésimas de r^N, con $0 < r < 1$. Definimos el conjunto $\mathcal{S} = \{|z_k\rangle,\ k = 0, 1, \ldots, N-1\}$ como subconjunto de estados coherentes asociados a los puntos de $\mathcal{Q}$. La envoltura lineal

$$\mathcal{H}_s^{\mathcal{S}} \equiv Lin\left(\{|z_0\rangle, |z_1\rangle, \ldots, |z_{N-1}\rangle\}\right),$$

es el subespacio de $\mathcal{H}_s$ generado por $\mathcal{S}$. Para un N finito, tenemos que $\mathcal{H}_s^{\mathcal{S}} \neq \mathcal{H}_s$, así que no podemos reconstruir exactamente cada función $\psi \in \mathcal{H}_s$ a partir de las N muestras (*datos*) $\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle$, pero probaremos que para funciones de banda limitada podemos siempre dar una fórmula exacta de reconstrucción.

4.3.1. Funciones de banda limitada

Definición 4.1.
Definimos el subespacio $\mathcal{H}_s^M$ de funciones de banda limitada, con $M < \infty$ como:

$$\mathcal{H}_s^M \equiv Lin\left(\{|s,0\rangle, |s,1\rangle, \ldots, |s,M\rangle\}\right). \tag{4.5}$$

El subespacio $\mathcal{H}_s^M$ es un subespacio vectorial de dimensión finita de $\mathcal{H}_s$. Aunque no es invariante bajo la acción de $SU(1,1)$, si que es invariante bajo la acción del subgrupo $U(1) \subset SU(1,1)$ generado por K_0.

Antes de poner el siguiente teorema, vamos a introducir un lema, que nos va a servir para demostrar dicho teorema.

Lema 4.1.
El operador "frame" $\mathcal{T} : \mathcal{H}_s^M \longrightarrow \mathbb{C}^N$ definido por $\mathcal{T}(\psi) = \{\langle z_k|\psi\rangle,\ z_k \in \mathcal{Q}\}$ es tal que el

[7] En el caso de la esfera, los puntos de muestreo que se utilizan son las raíces de la unidad. Éstas forman un subgrupo abeliano $\mathbb{Z}_N$ de $SU(2)$. La principal ventaja que nos proporcionaba es que $\mathcal{B}$ era una matriz circulante. En ese caso, el muestreo era regular [31]. Ahora con $SU(1,1)$ el muestreo es irregular. El espacio $\mathcal{Q}$ está formado por órbitas del subgrupo $\mathbb{Z}_N$ para $z = r$, y esto es suficiente para mantener la estructura circulante de $\mathcal{B}$.

operador "resolución" $\mathcal{A} = \mathcal{T}^*\mathcal{T}$ es diagonal, $\mathcal{A} = diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_M)$, en la base (4.5) de $\mathcal{H}_s^M$, con[8]

$$\lambda_m \equiv N(1-r^2)^{2s} \binom{2s+m-1}{m} r^{2m}, \; m = 0, \ldots, M. \tag{4.6}$$

Como $\mathcal{A}$ es invertible en $\mathcal{H}_s^M$, denotando $|\tilde{z}_k\rangle \equiv \mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle$, el "frame dual", la expresión

$$I_M = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k\rangle\langle\tilde{z}_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{z}_k\rangle\langle z_k| \tag{4.7}$$

nos da una "resolución de la identidad" en $\mathcal{H}_s^M$.

Teorema 4.1. *Dada*[9] *una función de banda limitada $\psi \in \mathcal{H}_s^M$ sobre el disco $\mathbb{D}_1$, y siendo el valor del límite de la banda M, con un desarrollo finito*

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{M} a_m |s, m\rangle, \tag{4.8}$$

existe una fórmula de reconstrucción (2.8) de ψ a partir de los datos $\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle$, dada por

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \Xi_k(z)\Psi_k, \tag{4.9}$$

para $N > M$ con función tipo "sinc",

$$\Xi_k(z) = \frac{1}{N}\left(\frac{1-z\bar{z}}{1-z_k\bar{z}_k}\right)^s \sum_{m=0}^{M} (\overline{z z_k^{-1}})^m.$$

- En efecto, la ecuación[10] (4.9) puede ser interpretada como una fórmula de reconstrucción tipo Shannon, donde $\Xi_k(z)$ juega el papel de función *sinc*, satisfaciendo las relaciones de ortogonalidad $\Xi_k(z_l) = P_{lk}$, donde el operador $P = \mathcal{T}\mathcal{T}_l^+$ es un proyector ortogonal sobre el subespacio de dimensión M de $\mathbb{C}^N$. En el caso de un muestreo crítico, $N = M+1$, tenemos que $\Xi_k(z_l) = \delta_{lk}$, que corresponde a una fórmula de interpolación. Para el caso de un *sobre-muestreo*, $N > M+1$, se obtiene un proyector a partir de un conjunto de datos *sobre-completo* Ψ_k, $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$, que podría ser incompatible con $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_s^M$.

Corolario 4.1 (Transformada de Fourier Discreta[11])**.** *Los coeficientes de Fourier a_m del desarrollo $|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{M} a_m|s,m\rangle$, para cualquier $\psi \in \mathcal{H}_s^M$, pueden determinarse en términos de los datos $\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle$ como*

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{N\lambda_m}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k m/N}\Psi_k, \quad (m = 0, \ldots, M). \tag{4.10}$$

[8] La cantidad λ_m está bien definida para $m \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ y será usada para el caso de funciones de banda limitada. Ver Apéndice A: **DS4**.

[9] Ver Apéndice A: **DS5**.

[10] Ver Apéndice A: **DS6**

[11] Ver Apéndice A: **DS7**.

- Los coeficientes de Fourier a_m se obtienen como una transformada discreta de Fourier (rectangular) a partir de los datos $\Psi(z_k)$, con un factor de escala $1/\sqrt{\lambda_m}$. La expresión (4.10) nos da una discretización de (4.3)

4.3.2. Funciones de banda ilimitada y submuestreo

En el apartado anterior hemos visto, que usando N puntos de muestreo, podemos reconstruir completamente funciones de banda limitada $\psi \in \mathcal{H}_s^M$, tomando como el límite de banda $M = N - 1$. Cuando abordamos la reconstrucción de una función de banda ilimitada $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |s, n\rangle$ a partir de un número finito N de muestras, no podemos usar los resultados de la sección anterior, ya que el *operador resolución* $\mathcal{A}$ es ahora no invertible[12].

Para el caso del hiperboloide, a diferencia del caso de la esfera [1], donde el espacio de Hilbert de funciones de espín s, $\mathcal{H}_s$, es de dimensión finita, aquí $\mathcal{H}_s$ es de dimensión infinita; y por tanto, para la reconstrucción de una función arbitraria $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |s, n\rangle$ va a estar siempre sometida a error. Como $|\psi\rangle$ es normalizable, los coeficientes de Fourier decrecen a cero, así que si, $|\psi\rangle$ no es de banda limitada, y a_n decrece a cero lo suficientemente rápido, podremos considerar aproximadamente que es de banda limitada si la norma de $|\psi_M^\perp\rangle \equiv \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n |s, n\rangle$ es lo suficientemente pequeña comparada con la norma de $|\psi\rangle$, para un M apropiado.

Definición 4.2.
Vamos a definir

$$P_M = \sum_{m=0}^{M} |s, m\rangle\langle s, m|$$

como el proyector sobre el subespacio $\mathcal{H}_s^M$ de funciones de banda limitada con un límite de banda M. Denotaremos por ϵ_{M+1}^2 la distancia al cuadrado de una función de banda no limitada

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |s, n\rangle \in \mathcal{H}_s$$

a su proyección ortogonal

$$|\psi_M\rangle = P_M |\psi\rangle = \sum_{n=0}^{M} a_n |s, n\rangle$$

sobre el subespacio $\mathcal{H}_s^M$ de funciones de banda limitada con un límite de banda M, es decir:

$$\epsilon_{M+1}^2 \equiv \frac{\langle \psi | I - P_M | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n|^2}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2}. \tag{4.11}$$

[12] Mientras el operador $\mathcal{T} : \mathcal{H}_s \longrightarrow \mathbb{C}^N$ tiene la misma expresión que en la sección anterior, el operador $\mathcal{A}$ es una matriz de dimensión infinita dada por $\mathcal{A}_{mn} = \lambda_m^{1/2} \lambda_n^{1/2} \delta_{jj'}$, con $m = j \; mod \; N$ y $n = j' \; mod \; N$, que es una matriz diagonal por bloques $N \times N$.

En otras palabras[13], ϵ_{M+1} *es el seno del ángulo entre* ψ *y* ψ_M.

Esperamos que el error cometido cuando reconstruyamos ψ a partir de sus N muestras Ψ_k sea del orden de $\epsilon_N(\psi)$, que será lo suficientemente pequeño si los coeficientes de Fourier a_n decaen suficientemente rápido. De forma más exacta, si $|a_n| \leq \frac{C}{n^\alpha}$; para alguna constante C, con $\alpha > \frac{1}{2}$ y $n \geq N$, entonces

$$\|\psi\|^2\epsilon_N^2(\psi) = \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 \leq C^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \leq \int_N^\infty \frac{C^2}{x^{2\alpha}}dx = \frac{C^2}{(2\alpha-1)}\frac{1}{N^{2\alpha-1}}. \tag{4.12}$$

Con lo cual $\epsilon_N^2(\psi) = O\left(\frac{1}{N^{2\alpha-1}}\right)$.

En el siguiente teorema, daremos una fórmula de reconstrucción parcial para funciones de banda ilimitada, y una cota para el error cometido. Pero antes vamos a introducir una serie de lemas, que utilizaremos para la demostración de dicho teorema.

Lema 4.2.
El operador "pseudo-frame" $\mathcal{T} : \mathcal{H}_s \longrightarrow \mathbb{C}^N$, *dado por* $\mathcal{T}(\psi) = \{\langle z_k|\psi\rangle,\ z_k \in \mathcal{Q}\}$ *es tal que el operador "overlapping kernel"* $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$, *es una matriz Hermítica invertible definida positiva, admitiendo una descomposición* $\mathcal{B} = \mathcal{F}\hat{D}\mathcal{F}^*$, *donde* $\hat{D} = diag(\hat{\lambda}_0, \ldots, \hat{\lambda}_{N-1})$ *es una matriz diagonal con*

$$\hat{\lambda}_j = \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{j+qN}, \tag{4.13}$$

y $\mathcal{F}$ *la matriz de Fourier*[14].

Lema 4.3.
Bajo[15] *las condiciones del lema 4.2, el conjunto* $\left\{|\tilde{z}_k\rangle = \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{B}_{kl}^{-1}|z_l\rangle,\ k = 0, \ldots, N-1\right\}$ *constituye un "pseudo-frame" dual para* $\mathcal{S}$. *El operador* $P_\mathcal{S} = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T}$ *es un proyector ortogonal sobre el subespacio* $\mathcal{H}_s^\mathcal{S}$, *donde* $\mathcal{T}_r^+ = \mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1}$ *es una pseudoinversa (por la derecha) para* $\mathcal{T}$, *y*

$$P_\mathcal{S} \equiv \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{z}_k\rangle\langle z_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k\rangle\langle \tilde{z}_k|\ , \tag{4.14}$$

da una resolución del proyector P_S, *cuyos elementos de matriz en la base ortonormal* $\{|s,n\rangle\}$ *de* $\mathcal{H}_s$ *tienen una estructura diagonal por bloques* $N \times N$:

$$P_{mn}(r,N) \equiv \langle s,m|P_S|s,n\rangle = \sqrt{\lambda_m\lambda_n}\ \hat{\lambda}_{n\ mod\ N}^{-1}\ \delta_{n=m\ mod\ N}, \qquad (m,n \in \mathbb{N}^* \equiv \mathbb{N}\cup\{0\})\ , \tag{4.15}$$

con $\hat{\lambda}_n$ *dado en (4.13).*

---

[13]Ver Apéndice A: **DS8**.
[14]Ver Apéndice A: **DS9**.
[15]Ver Apéndice A: **DS10**.

Los coeficientes de matriz (4.15) los utilizaremos para el cálculo de la función error de funciones de banda ilimitada que expondremos en el siguiente teorema. En algún momento determinado será interesante estudiar su comportamiento para N grande (un número grande de puntos de muestreo). Para dar una expresión explícita de este comportamiento asintótico de $P_{mn}(r,N)$, utilizaremos la siguiente función

$$\nu_n(r,N) \equiv \frac{\hat{\lambda}_n - \lambda_n}{\lambda_n} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\binom{n+uN+2s-1}{n+uN}}{\binom{n+2s-1}{n}} r^{2uN}, \quad n = 0,\ldots,N-1 . \tag{4.16}$$

Para ello hemos utilizado las expresiones de $\hat{\lambda}_n$ y λ_n (4.6, 4.13).

En términos de $\nu_n(r,N)$, los elementos de matriz (4.15) adoptan la siguiente forma:

$$P_{mn}(r,N) = \frac{\binom{2s-1+j+pN}{j+pN}^{1/2} \binom{2s-1+j+qN}{j+qN}^{1/2} r^{(p+q)N}}{\binom{2s-1+j}{j}(1+\nu_j(r,N))} ,$$

para $m = j + pN$ y $n = j + qN$, con $j = 0,\ldots,N-1$ y $p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para los demás casos el valor de P_{mn} es cero[16]. En particular, para $n,m \leq N-1$, el proyector P_{mn} adopta la forma diagonal

$$P_{mn}(r,N) = \frac{\lambda_n}{\hat{\lambda}_n}\delta_{mn} = \frac{1}{1+\nu_n(r,N)}\delta_{mn}, \quad m,n = 0,\ldots,N-1 . \tag{4.17}$$

Vamos a probar a continuación una propiedad de monotonía de las funciones $\nu_n(r,N)$.

Lema 4.4.
Las funciones[17] $\nu_n(r,N)$ *son estrictamente decrecientes en* n *para* $r > 0$ *y* $s > 1/2$*, esto es:*

$$\nu_n(r,N) < \nu_m(r,N) \Leftrightarrow n > m, \quad (n,m = 0,\ldots,N-1).$$

- Para el caso crítico de $s = 1/2$, tenemos que $a_n = 1$ (definido en (A.9)). Es decir, $\nu_n(r,N) = \nu(r,N) \equiv \frac{r^{2N}}{1-r^{2N}}$.
- Y para el caso de $s < 1/2$, tenemos que $\{a_n\} \longrightarrow 1$, $(n \longrightarrow \infty)$. (Estrictamente creciente). Por lo que, se deduce, que $\nu_n(r,N)$ es estrictamente creciente para $s < 1/2$.

Ya estamos preparados para introducir el siguiente teorema.

[16] $j = n \; mod \; N$ y $j = m \; mod \; N$ es equivalente a $n = j + pN$ y $m = j + qN$, donde $(j = 0,\ldots,N-1)$.
[17] Ver Apéndice A: **DS11**.

Teorema 4.2. *Dada*[18] *una función de banda ilimitada $\psi \in \mathcal{H}_s$, existe una reconstrucción parcial de ψ, en términos del alias*

$$\hat{\Psi}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} L_k(z)\Psi_k, \tag{4.18}$$

a partir de N datos Ψ_k, tomando los puntos de muestreo de (4.4), con el error[19]

$$\epsilon_\psi^2(r,N) \equiv \epsilon_\psi^2(\mathcal{H}_s^S) \leq \frac{\nu_0(r,N)}{1+\nu_0(r,N)} + 2\epsilon_N(\psi)\sqrt{1-\epsilon_N^2(\psi)} + \epsilon_N^2(\psi)\frac{(2+\nu_0(r,N))}{1+\nu_0(r,N)}, \tag{4.19}$$

con $\nu_0(r,N)$ definido en (4.16). Las funciones de interpolación de Lagrange (2.11) adoptan la siguiente forma:

$$L_k(z) = \frac{1}{N}\left(\frac{1-z\bar{z}}{1-z_k\bar{z}_k}\right)^s \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{j+qN}\left(\overline{z z_k^{-1}}\right)^{j+qN} \tag{4.20}$$

donde

$$\hat{\lambda}_j = \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{j+qN}, \qquad (j = 0, \ldots, N-1),$$

son los autovalores del operador discreto "reproducing kernel" $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$ (con coeficientes $\mathcal{B}_{kl} = \langle z_k | z_l \rangle$) y λ_n dado en (4.6), pero ahora para $n \in \mathbb{N}^* \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Se puede comprobar de forma sencilla[20] que $\lim_{N\to\infty} \nu_0(r,N) = 0,\ \forall r \in (0,1)$. Esto implica que el error (4.19) va a cero para $N \to \infty$.

Para obtener el orden de magnitud de este error, daremos primero el comportamiento asintótico de $\nu_0(r,N)$ para N grande.

Proposición 4.1.
La cantidad $\nu_0(r,N)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico[21] *(como una función de N):*

$$\nu_0(r,N) = \binom{2s-1+N}{N} r^{2N} + O(N^{2s-1} r^{4N}), \tag{4.21}$$

para

$$r < r_0(s,N) = \left[\frac{\binom{2s-1+N}{N}}{\binom{2s-1+2N}{2N}}\right]^{\frac{1}{2N}} = 1 - \frac{(2s-1)\ln 2}{2N} + O(1/N^2)\,.$$

---

[18] Ver Apéndice A: **DS12**.

[19] $\epsilon_\psi(\mathcal{H}^S) = \frac{\|\psi - \hat{\psi}\|}{\|\psi\|} = \sqrt{\frac{\langle \psi | I - P_S | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}}$.

[20] Ver Apéndice A: **DS13**.

[21] Ver Apéndice A: **DS14**.

- Usando la expresión asintótica (4.21), el error cuadrático (4.19) tiende a cero cuando $N \longrightarrow \infty$, con el comportamiento asintótico[22]

$$\epsilon_\psi^2(r,N) \leq 2\epsilon_N\sqrt{1-\epsilon_N^2} + 2\epsilon_N^2 + O(N^{2s-1}r^{2N}) \ ,$$

  para $r < r_0$. Así que, la reconstrucción de ψ con $\hat{\psi}$ es exacta en este límite.

Corolario 4.2 (Transformada Discreta de Fourier[23])**.** *Los coeficientes de Fourier a_n del desarrollo (4.8) se pueden obtener de forma aproximada como una transformada de Fourier sobre el hiperboloide:*

$$\hat{a}_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\hat{\lambda}_n}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi nk/N}\Psi_k \ . \tag{4.22}$$

- La expresión de los coeficientes de Fourier $\hat{a}_n$ conllevan una especie de *periodización* del a_n original[24].

$$\hat{a}_{n+pN} = \sqrt{\frac{\lambda_{n+pN}}{\lambda_n}}\,\hat{a}_n \ , \quad \forall p \in \mathbb{N} \ .$$

  Este es el análogo para el hiperboloide del típico efecto *aliasing* para señales de banda ilimitada sobre la recta real.

Podríamos pensar que, para el caso $\epsilon_N = 0$, deberíamos recuperar los resultados de la sección 4.3.1 (funciones de banda limitada). Pero veremos que este no es el caso. Antes, tenemos que realizar un proceso de truncado y filtrado de $|\hat{\psi}\rangle$ en (5.26) para obtener la fórmula de reconstrucción (4.9) para funciones de banda limitada (4.8). Si $M = N-1$, la operación de truncado será:

$$|\hat{\psi}_M\rangle \equiv P_M|\hat{\psi}\rangle = \sum_{m=0}^{M}\hat{a}_n|s,n\rangle.$$

Si a continuación reescalamos los coeficientes de Fourier[25]:

$$|\hat{\psi}_M^R\rangle \equiv R|\hat{\psi}_M\rangle = \sum_{m=0}^{M}\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_n}\hat{a}_n|s,n\rangle \ ,$$

podemos encontrar la fórmula de reconstrucción para $\hat{\Psi}_M^R(z) = \langle z|RP_M|\hat{\psi}\rangle$ de la expresión (4.9). Para funciones de banda limitada, encontramos que el error cuadrático se puede acotar de la siguiente forma[26]:

$$\frac{\|\psi - \hat{\psi}_M^R\|^2}{\|\psi\|^2} \leq \epsilon_N^2 + \frac{\langle\psi_M^\perp|P_S P_M R^2 P_M P_S|\psi_M^\perp\rangle}{\|\psi\|^2} \leq \epsilon_N^2 + \epsilon_N^2(1+\nu_0(r,N))^2 \ . \tag{4.23}$$

[22] Ver Apéndice A: **DS15**.
[23] Ver Apéndice A: **DS16**.
[24] Ver Apéndice A: **DS17**.
[25] Ver Apéndice A: **DS20**.
[26] Ver Apéndice A: **DS22**.

De forma distinta a (4.19), la nueva cota en (4.23) es proporcional a ϵ_N^2. Si además, suponemos un comportamiento para a_n como en (4.12), entonces tenemos que el error (4.23) es del orden $O\left(\frac{1}{N^{2\alpha-1}}\right)$.

Un enfoque alternativo para el muestreo de funciones de banda ilimitada ψ para ϵ_{M+1} muy pequeño, será más adecuado en un cierto límite. De hecho, para $\epsilon_{M+1} \ll 1$, tenemos que:

$$\|\psi - P_M\psi\|^2 = \epsilon_{M+1}^2\|\psi\|^2 \ll \|\psi\|^2.$$

Por lo tanto, la fórmula de reconstrucción (4.9) para $\psi_M = P_M\psi$ sería una buena aproximación de ψ, de manera similar a lo realizado en [40], sección 4. El problema es que, en general, los datos originales $\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle$ para ψ y los datos truncados (desconocidos) $\Psi_{M,k} = \langle z_k|P_M|\psi\rangle$ para ψ_M son diferentes, a menos que $\langle z_k|P_M = \langle z_k| \quad (\forall k = 0, \ldots, N-1)$, que es equivalente[27] a $\langle z_k|P_M|z_k\rangle = 1 \quad (\forall k = 0, \ldots, N-1)$. La siguiente proposición estudia las condiciones bajo las cuales este requerimiento se cumple.

Proposición 4.2.
Tomamos[28] el "symplin" y el límite de banda M lo más grande posible, es decir, $s \longrightarrow \infty$, $M \longrightarrow \infty$. Entonces los elementos de la diagonal de P_M en $\mathcal{H}_s^S$ presentan el siguiente comportamiento asintótico:

$$P_M^s(r) \equiv \langle z_k|P_M|z_k\rangle = \chi_{[0,r)}(r)\Theta(r_c - r) + O\left(\frac{1}{2s-1+M}\right)$$

donde χ_A es la función característica en el intervalo A, Θ es la función de Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases} .$$

y

$$r_c = \left(1 + \frac{2s-1}{M}\right)^{-1/2}$$

expresa un "radio crítico". Para $M \gg 2s$ tenemos que $r_c \leq 1$.

Si dibujamos $P_M^s(r)$ en función de r para diferentes valores de s y M tal que $r_c = \frac{1}{2}$. Podemos observar que $P_M^s(r)$ se acerca cada vez más a una función escalón cuando M y s crecen.

- Los coeficientes de la matriz de P_M en $\mathcal{H}_s^S$ tienen estructura circulante[29]. Es decir, se puede ver como una transformada de Fourier de los coeficientes λ_n.

$$C_l = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{M} \lambda_m e^{-2\pi i m l/N} .$$

[27] Ver Apéndice A: **DS21**.
[28] Ver Apéndice A: **DS18**.
[29] Ver Apéndice A: **DS19**.

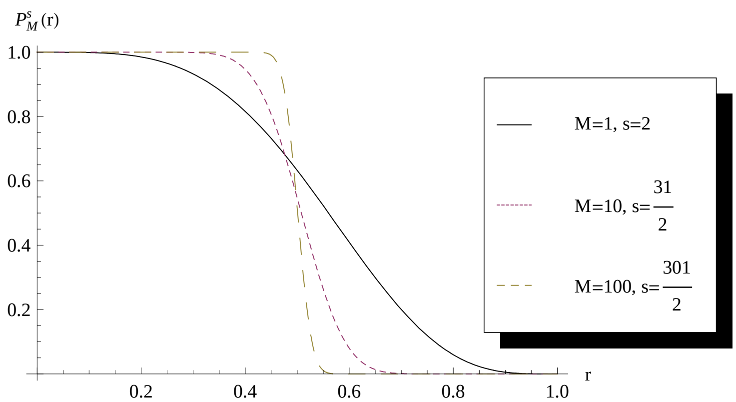

Figura 4.1: Representación de P_M^s como una función de r para diferentes valores de s y M, tal que $r_c = \frac{1}{2}$.

Capítulo 5

Teoremas de muestreo y Transformada Discreta de Fourier sobre el plano complejo

5.1. Introducción

Proporcionaremos fórmulas de reconstrucción y transformada de Fourier discreta para funciones de onda holomorfas en el espacio de Fock-Bargmann en la representación número-fase, a partir de un número finito N de muestras $\{\theta_k = 2\pi k/N\}_{k=0}^{N-1}$ para un número medio dado p de partículas. El subsistema de estados coherentes (CS) $\mathcal{S} = \left\{|z_k = \sqrt{p}e^{i\theta_k}\rangle\right\}$ es completo (un *frame*) para espacios de Hilbert truncados (número finito de partículas), y las fórmulas de reconstrucción son exactas. Para un número ilimitado de partículas, $\mathcal{S}$ es *casi completo* (un *pseudo-frame*), y se dará unas fórmulas parciales de reconstrucción junto a un estudio de aproximación promedio, que tiende exactamente, cuando $p < N$ y/o $N \longrightarrow \infty$.

Los operadores más simples usados para describir los sistemas mecano-cuánticos con un grado de libertad son el operador coordenada q y el operador momento p. Actúan en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ satisfaciendo las relaciones de conmutación de Heisenberg:

$$[q, p] = i\hbar I, \qquad [q, I] = [p, I] = 0.$$

Donde I es el operador identidad.

Podemos definir los operadores creación y destrucción de este grupo de la forma[1]:

$$a = \frac{q + ip}{\sqrt{2\hbar}}, \qquad a^\dagger = \frac{q - ip}{\sqrt{2\hbar}},$$

$$[a, a^\dagger] = I, \qquad [a, I] = [a^\dagger, I] = 0. \tag{5.1}$$

[1] †: Conjugación Hermítica. $\bar{\ }$: Conjugación compleja.

Los operadores $\{q, p, I\}$ (respectivamente $\left\{a, a^\dagger, I\right\}$) son los generadores de un álgebra de Lie $\mathcal{W}_1$ (Álgebra de Heisenberg-Weyl).

Definición 5.1 (Álgebra de Heisenberg-Weyl)**.**
El álgebra de Heisenberg-Weyl $\mathcal{W}_1$ es un álgebra de Lie de dimensión 3, con las relaciones de conmutación

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0,$$
$$e_1 \equiv \frac{i}{\sqrt{\hbar}}\, p, \qquad e_2 \equiv \frac{i}{\sqrt{\hbar}}\, q, \qquad e_3 \equiv iI.$$

En general, los elementos del álgebra $\mathcal{W}_1$, se pueden escribir como:

$$x \equiv (s; x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + s e_3, \qquad s, x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$
$$x = isI + \frac{i}{\hbar}(Pq - Qp) = isI + (\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a),$$
$$x_1 = \tfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, Q, \qquad x_2 = \tfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, P,$$
$$\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2\hbar}}\, (Q + iP) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + ix_2),$$
$$\bar{\alpha} = \tfrac{1}{\sqrt{2\hbar}}\, (Q - iP).$$

El conmutador de los elementos $x \equiv (s; x_1, x_2)$ y $y \equiv (t; y_1, y_2)$ está dado por:

$$[x, y] = B[x, y] e_3, \qquad B(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1\ .$$

$B(x, y)$ es la forma simpléctica standard sobre el plano (x_1, x_2).

Construimos el correspondiente grupo de Lie mediante la exponenciación de los elementos del álgebra

$$e^x = e^{isI} D(\alpha), \qquad D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a)},$$

$$e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A,B]} e^{(A+B)}\ . \tag{5.2}$$

Esta expresión es válida si[2] $\quad [A, [A, B]] = 0,\ [B, [A, B]] = 0.$

La ley del producto del grupo sería:

$$D(\alpha) D(\beta) = \exp(i\Im(\alpha\bar{\beta}) D(\alpha + \beta)),$$
$$D(\alpha_n) D(\alpha_{n-1}) \cdot \ldots \cdot D(\alpha_1) = \exp(i\delta) D(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_1),$$

donde

$$\delta \equiv \Im\left(\sum_{j>k} \alpha_j \bar{\alpha}_k\right).$$

[2]Demostración: [5], pág 9.

La fase $\Im(\alpha\bar{\beta})$ tiene un significado geométrico simple. $\Im(\alpha\bar{\beta}) = 2A(0,\beta,\alpha+\beta)$, donde $A(\alpha,\beta,\gamma)$ es el área del triángulo con vértices en los puntos α,β,γ. Y A es positivo si el ciclo $\alpha \longrightarrow \beta, \beta \longrightarrow \gamma, \gamma \longrightarrow \alpha$ es contrario a las agujas del reloj y en caso opuesto $A < 0$.

Los operadores $D(\alpha)$ son acotados, y su dominio de definición es denso en $\mathcal{H}$.

Los operadores $e^{it}D(\alpha)$ forma una representación del grupo parametrizado por tres números reales

$$g = (t; x_1, x_2),$$

o por un número real t y un número complejo α : $g(t;\alpha)$.

Este grupo se le denomina grupo de **Heisenberg-Weyl**, denotado por W_1. Se puede comprobar que la ley del producto en W_1 es:

$$(s; x_1, x_2)(t; y_1, y_2) = (s + t + B(x,y); x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$B(x,y) = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

El grupo W_1 pertenece a la clase de los grupos nilpotentes. Un ejemplo típico relevante para esta clase es el grupo de matrices triangulares con 1 en la diagonal principal

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices forman las representaciones más simples de dimensión finita no unitarias del grupo W_1. Los generadores del álgebra de Lie e_1, e_2, e_3 están representados como:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. Representaciones del grupo Heisenberg-Weyl

Vamos a describir las representaciones unitarias irreducibles de W_1. Todos los elementos de la forma $(s,0)$, forman el centro[3] de W_1. Por lo tanto, para cualquier representación irreducible unitaria $T(g)$ del grupo W_1, los operadores $T((s,0))$ forman una representación unitaria del subgrupo $\{(s,0)\}$, que está determinado por un número real λ:

$$T^{\lambda}((s,0)) = e^{i\lambda s I}.$$

Teorema 5.1. *Para un valor fijo de λ, ($\lambda \neq 0$), cualesquiera dos representaciones irreducibles unitarias del grupo W_1 son unitariamente equivalentes. Es decir, para cualquier dos sistemas de operadores $D(\alpha)$ y $\tilde{D}(\alpha)$, satisfaciendo el producto del grupo*

$$D(\alpha)D(\beta) = \exp(2i\Im(\alpha\bar{\beta}))D(\alpha)D(\beta),$$

[3]El centro es el conjunto de todos los elementos que conmutan con cada elemento de W_1.

existe un operador unitario U, tal que

$$\tilde{D}(\alpha) = U^\dagger D(\alpha) U.$$

Algo parecido ocurre con los operadores $\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}$, y $a^\dagger, a$ satisfaciendo las relaciones de conmutación

$$[a, a^\dagger] = I, \qquad [a, I] = [a^\dagger, I] = 0,$$
$$\tilde{a}^\dagger = U^\dagger a^\dagger U, \qquad \tilde{a} = U^\dagger a U.$$

Los operadores $a, a^\dagger$ no están acotados (como no lo están p y q).

Así que una representación irreducible unitaria de dimensión infinita del grupo W_1 está fijada con un número real $\lambda \neq 0$: $T(g) = T^\lambda(g)$. Las representaciones con $\lambda = 0$, son de dimensión 1, y están fijadas por un par de números reales: μ y ν.

$$T(g) = T^{\mu\nu}(g) = \chi_{\mu\nu}(g) I, \qquad \chi_{\mu\nu}(g) = \exp(i(\mu x_1 + \nu x_2)).$$

Vamos a describir ahora las representaciones $T^\lambda(g)$ explícitamente.

Los operadores q, p y $a^\dagger, a$ actúan en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Existe en $\mathcal{H}$ un vector $|0\rangle$ denominado vacío cumpliendo

$$a|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|0\rangle = 1.$$

La acción del operador creación $a^\dagger$ genera un conjunto de vectores normalizados a partir del vacío

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Los vectores $\{|n\rangle\}$ forman una base en $\mathcal{H}$. La acción de los operadores a y $a^\dagger$ en esta base está dada por

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{5.3}$$
$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle.$$

La justificación de lo anterior viene de la verificación de las relaciones de conmutación.

En la representación de coordenadas el vector $|\psi\rangle$ está representada con una función coordenada $\langle q|\psi\rangle = \psi(q)$, que es de cuadrado integrable

$$\int |\psi(q)|^2 dq < \infty.$$

La acción del operador de coordenadas $\hat{q}$ en la representación de coordenadas es justo la multiplicación por q, mientras que el operador momento $\hat{p}$ está representado con la diferenciación con respecto a q:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \; .$$

El vector de la base $|n\rangle$ está descrito por la función:

$$\langle q|n\rangle = \varphi_n(q) = (\pi\hbar)^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2} H_n\left(\frac{q}{\sqrt{\hbar}}\right) \exp\left(\frac{-q^2}{2\hbar}\right) ,$$

donde $H_n(q)$ es el polinomio de Hermite de grado n.

Los polinomios de Hermite verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$\frac{dH_n(q)}{dq} = 2nH_{n-1}(q), \qquad \left(2q - \frac{d}{dq}\right) H_n(q) = H_{n+1}(q),$$

$$H_n(q) = \left(2q - \frac{d}{dq}\right)^n H_0(q), \qquad H_0(q) \equiv 1,$$

$$H_n(q) = (-)^n \exp(q^2)\frac{d^n}{dq^n}\left(\exp(-q^2)\right).$$

La ecuación diferencial para los polinomios de Hermite es :

$$H_n'' - 2qH_n' + 2nH_n = 0.$$

En la representación de coordenadas la acción del operador $D(\alpha)$, $\alpha = \frac{(Q+iP)}{\sqrt{2\hbar}}$ está dado por:

$$D(\alpha)\varphi(q) = \exp\left(\frac{-iPQ}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{iPq}{\hbar}\right) \varphi(q-Q).$$

5.3. Estados coherentes

5.3.1. Estados coherentes del grupo Heisenberg-Weyl

Sea $T(g)$ una representación unitaria irreducible de W_1, y $|\psi_0\rangle$ un vector fijo en el espacio de representaciones $\mathcal{H}$. El estado correspondiente al vector $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ es estable bajo la acción de los operadores de la forma $T(s,0)$ ($\hat{a}|0\rangle = 0 \Longrightarrow e^{i\alpha\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$). El estado está representado por el conjunto de vectores de la forma $\exp(i\varphi)|\psi\rangle$, diferenciándose del vector $|\psi\rangle$ a través de una fase solamente, $|\exp(i\varphi)| = 1$. En otras palabras, el subgrupo de isotropía H para un estado arbitrario $|\psi_0\rangle$ contiene solamente elementos de la forma $(s,0)$.

Aplicando el operador representación

$$T(g) = T((t,\alpha)) = e^{it}D(\alpha).$$

a $|\psi_0\rangle$. El resultado es un conjunto de estados $\{|\alpha\rangle\}$

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|\psi_0\rangle, \qquad \text{donde} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Como el subgrupo de isotropía del estado ψ_0, es $H = \{h\}$, $h(t,0)$, para diferentes α tenemos diferentes estados. El sistema $\{|\alpha\rangle\}$ es justo un sistema de estados coherentes generalizados del tipo $\{T(g), |\psi_0\rangle\}$. Un caso importante es cuando tomamos como el elemento madre el vacío

$|0\rangle$ ($|\psi_0\rangle = |0\rangle$). Este es el caso de los estados coherentes estándar o canónicos.

Como $T(g)$ es irreducible, entonces el sistema de estados es completo. Estos estados no tienen porque ser mutuamente ortogonales.

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\psi_0|D^\dagger(\beta)D(\alpha)|\psi_0\rangle = \exp\left(i\Im(\alpha\bar{\beta})\right)\langle\psi_0|D(\alpha-\beta)|\psi_0\rangle,$$
$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = |\langle\psi_0|D(\alpha-\beta)|\psi_0\rangle|^2 \equiv \rho(\alpha-\beta),$$

$\rho(\alpha)$ tiene que ser distinta de cero, y además $\rho(\alpha-\beta)$ se trata de un *reproducing kernel*.

El operador $D(\alpha)$ transforma cualquier estado coherente en otro estado coherente

$$D(\alpha)|\beta\rangle = \exp\left(i\Im(\alpha\bar{\beta})\right)|\alpha+\beta\rangle. \tag{5.4}$$

La relación (5.4) determina la acción del grupo W_1 sobre el plano α.

$$(s;\beta)\alpha = \alpha+\beta.$$

$H = \{(t,0)\}$ actúa como la transformación identidad en el plano α. El grupo cociente W_1/H es el grupo de traslaciones del plano α.

La medida invariante en el plano α es

$$d\mu(\alpha) = Cd^2\alpha = Cd\alpha_1 d\alpha_2, \qquad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2.$$

C es una constante.

Sea $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ el operador proyección sobre el estado $|\alpha\rangle$. Consideremos el operador

$$\hat{A} = \int d\mu(\beta)|\beta\rangle\langle\beta|.$$

Es fácil ver que $\hat{A}$ conmuta con $D(\alpha), \forall\alpha\in\mathbb{C}$. Por lo tanto, por el lema de Schur este operador es proporcional al operador identidad

$$\hat{A} = d^{-1}\hat{I}.$$

Para encontrar la constante d, calculamos el valor medio del operador $\hat{A}$ sobre el estado coherente $|\alpha\rangle$.

$$d^{-1} = \langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle = \int |\langle\alpha|\beta\rangle|^2\, d\mu(\beta) = \int \rho(\beta)d\mu(\beta).$$

Como $\hat{A}$ es un operador acotado, la constante d es distinta de cero, así que el factor C en la medida puede ser escogido tal que[4] $d=1$.

$$\int d\mu(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{I}.$$

[4]Klauder J.R.: Ann. of Phys. 11,123 (1960).

La constante C está determinada por la condición

$$\int \rho(\alpha)d\mu(\alpha) = 1, \qquad \int d\mu(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle = |\beta\rangle.$$

Entonces el *reproducing kernel*[5] $K(\alpha,\beta) \equiv \langle\alpha|\beta\rangle$ cumple la propiedad:

$$\int K(\alpha,\beta)K(\beta,\gamma)d\mu(\beta) = K(\alpha,\gamma).$$

Un estado arbitrario $|\psi\rangle$ se puede expandir en términos de estados coherentes

$$|\psi\rangle = \int d\mu(\alpha)\psi(\alpha)|\alpha\rangle,$$

donde los coeficientes funcionales $\psi(\alpha)$ están dados por:

$$\psi(\alpha) = \langle\alpha|\psi\rangle.$$

La función $\psi(\alpha)$ determina el estado $|\psi\rangle$ completamente y se le llama el símbolo del estado $|\psi\rangle$. Evidentemente

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int |\psi(\alpha)|^2 \, d\mu(\alpha).$$

Los estados $\{|\alpha\rangle\}$, $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ forma el sistema de estados coherentes estándar. Es fácil ver que el estado $|\alpha\rangle$ es aniquilado por el operador

$$D(\alpha)\; a\; D^\dagger(\alpha).$$

Tenemos que

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Esta expresión se puede demostrar escribiendo el estado coherente $|\alpha\rangle$ en la forma de Glauber como a continuación se detalla[6]

$$a|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle =$$
$$= \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

El estado coherente estándar es un autoestado del operador de aniquilación, mientras que cualquier número complejo α podría ser un autovalor. No es difícil mostrar que el operador $a^\dagger$ no tiene autovectores en $\mathcal{H}$.

[5]Aronszajn A.: Trans. Amer. Math. Soc. 68,337 (1950).
Bergmann S. The kernel functions and conformal mapping. Math. Surv. No. 5, Amer. Math. Soc No. 4 (1950).

[6]Forma de Glauber: $|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$.

Usando la expresión (5.2) podemos expresar $D(\alpha)$ de diversas formas:

$$D(\alpha) = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\exp(\alpha a^\dagger)\exp(-\bar{\alpha}a) \quad \text{(Forma Normal o de Wick).}$$

$$D(\alpha) = \exp\left(\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp(-\bar{\alpha}a)\exp(\alpha a^\dagger) \quad \text{(Forma Antinormal o de anti-Wick).}$$

De las formas normales y antinormales tenemos:

$$a^\dagger D(\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{2}\right)D(\alpha), \qquad D(\alpha)a^\dagger = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{2}\right)D(\alpha),$$

$$aD(\alpha) = -\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}} - \frac{\bar{\alpha}}{2}\right)D(\alpha), \qquad D(\alpha)a = -\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}} + \frac{\alpha}{2}\right)D(\alpha).$$

Podemos también escribir $|\alpha\rangle$ como: $|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle$ que puede ser expresada como en la **forma de Glauber**

$$\boxed{|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.} \tag{5.5}$$

A partir de aquí obtenemos:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \bar{\alpha}\beta\right), \qquad \rho(\alpha) = |\langle\alpha|0\rangle|^2 = \exp\left(-|\alpha|^2\right),$$

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right).$$

5.4. Representación de Fock-Bargmann

En las representaciones convencionales de momento y coordenadas no se imponen condiciones de analiticidad sobre las funciones $\varphi(q)$ y $\tilde{\varphi}(p)$ correspondientes a un vector en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Pero existe una representación donde cualquier estado está descrito enteramente por una función analítica. Esta representación se denomina de **Fock-Bargmann**. En esta representación se pueden encontrar soluciones sencillas para un cierto número de problemas recurriendo a la teoría de las funciones analíticas.

Vamos a centrarnos en el caso de los estados coherentes usuales

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle,$$

donde $|0\rangle$ es el vector vacío tal que $a|0\rangle = 0$.

Sea $|\psi\rangle$ un vector arbitrario normalizado en $\mathcal{H}$. Entonces sabemos que el estado $|\psi\rangle$ está completamente determinado con su símbolo $\langle\alpha|\psi\rangle$.

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \qquad \langle\psi|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1.$$

De la forma de Glauber (5.5), tenemos

$$\langle\alpha|\psi\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\phi(\bar{\alpha}).$$

$$\phi(\bar{\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_n(\bar{\alpha}), \qquad U_n(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} z^n, \qquad C_n \equiv \langle n|\psi\rangle. \tag{5.6}$$

La serie (5.6) converge uniformemente en cualquier dominio compacto del plano-α complejo, gracias a que se verifica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1,$$

así que $\phi(\bar{\alpha})$ es una función analítica o anti-holomorfa en el plano complejo-α[7]

$$\|\phi\|^2 = \langle\phi|\phi\rangle = \int d\mu(z) \exp\left(-|z|^2\right) |\phi(z)|^2 < \infty. \tag{5.7}$$

El producto escalar de dos funciones $\phi_1(z)$ y $\phi_2(z)$ satisfaciendo la condición (5.7) definida como[8]

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \int \exp\left(-|z|^2\right) \bar{\phi}_1(z)\phi_2(z) d\mu(z). \tag{5.8}$$

Fock propuso un operador solución para las relaciones de conmutación de Heisenberg

$$[a, a^\dagger] = I, \qquad [a, I] = [a^\dagger, I] = 0.$$

$$a \longrightarrow \frac{d}{dz}\ , \qquad\qquad a^\dagger \longrightarrow z\ ,$$

en analogía a la solución de Schrödinger

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dq}, \qquad\qquad \hat{q} = q.$$

Su justificación viene dado por:

$$[a, a^\dagger]\phi = (aa^\dagger - a^\dagger a)\phi = \frac{d(z\phi)}{dz} - z\frac{d\phi}{dz} = \phi \Longrightarrow [a, a^\dagger] = \hat{I}.$$

[7]Vamos a etiquetar los $\alpha \in \mathbb{C}$ como $z \in \mathbb{C}$, ya que en este trabajo hemos utilizado más la última nomenclatura. Aunque en otras referencias bibliográficas utilizan más la primera.

[8]Esta forma de definir el producto escalar, viene influenciada por la estructura del símbolo $\langle\alpha|\psi\rangle$ del estado $|\psi\rangle$.

El espacio de la representación de Fock-Bargmann será denotado por $\mathcal{F}$. El producto escalar en este espacio está dado por (5.8). Una consecuencia de la desigualdad de Schwartz[9] es

$$|\phi(z)| \leq C \exp\left(\frac{|z|^2}{2}\right) \qquad \text{para cualquier } \phi(z) \in \mathcal{F}.$$

En la representación de Fock-Bargmann el operador $a^\dagger$ es la multiplicación con z, mientras que el operador a es la derivada con respecto a z. Se puede comprobar que $a^\dagger$ es conjugada de a para el producto escalar (5.8).

La forma de este producto escalar puede derivarse del requerimiento de que los operadores a y $a^\dagger$ sean conjugadas.

5.4.1. Propiedades de la representación de Fock-Bargmann

- La base ortonormal en $\mathcal{F}$ tiene una forma más sencilla que en la representación de coordenadas [10].

$$|n\rangle \longrightarrow \langle z|n\rangle = e^{-|z|^2/2}U_n(\bar{z}) = e^{-|z|^2/2}\frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}}\ .$$

- La correspondiente representación del estado coherente $|\alpha\rangle$ es

$$\langle z|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2} + \alpha\bar{z} - \frac{|z|^2}{2}\right).$$

  Esta expresión la obtenemos de la forma de Glauber

$$\langle z|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle z|n\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\bar{z}^n}{n!} = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\exp(\alpha\bar{z}).$$

- El equivalente a la δ de Dirac en el espacio $\mathcal{F}$, es decir, el *reproducing kernel* es:

$$\delta(z, z') = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z)\bar{U}_n(z') = \exp(z\bar{z}').$$

  Es fácil ver que para cualquier función analítica $f(z)$ en $\mathcal{F}$

$$f(z) = \int \delta(z, z') \exp\left(-|z'|^2\right) f(z')d\mu(z').$$

[9] $|\langle\alpha|\phi\rangle| \leq \|\phi\|\|\alpha\|$ (Desigualdad de Schwartz), con peso $\|\alpha\| = 1$:

$$|\langle\alpha|\phi\rangle| \leq 1 \Longrightarrow\ e^{-|z|^2/2}|\phi(\alpha)| \leq 1 \Longrightarrow\ |\phi(\alpha)| \leq e^{|z|^2/2}.$$

[10] $\langle z|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\psi\rangle\langle z|n\rangle, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1.$

Si consideramos el espacio $L^2(\mathbb{C}, e^{-|z|^2}d\mu)$ (el espacio de todas las funciones no necesariamente analíticas con medida $e^{-|z|^2}d\mu(z)$), satisfaciendo la condición

$$\|f\|^2 = \langle f|f\rangle = \int |f(z,\bar{z})|^2 \exp\left(-|z|^2\right) d\mu(z) < \infty,$$

se tiene que

$$f(z) = \int \exp\left(z\bar{z'} - |z'|^2\right) f(z', \bar{z'}) d\mu(z')$$

realiza una proyección del espacio $L^2(\mathbb{C}, e^{-|z|^2}d\mu)$ en $\mathcal{F}$.

- La relación entre la representación de coordenadas usual y la representación de Fock-Bargmann está dado por el *kernel* $\langle z|q\rangle$, satisfaciendo

$$a\langle q|z\rangle = z\langle q|z\rangle,$$

donde a es el operador destrucción actuando en el espacio q. Explícitamente, esta ecuación es[11]:

$$\left(\hbar\frac{d}{dq} + q - \sqrt{2\hbar}z\right)\langle q|z\rangle = 0,$$

dando[12]

$$K(q,z) = \langle q|z\rangle = (\pi\hbar)^{-1/4}\exp\left(-\frac{z^2}{2} + \sqrt{\frac{2}{\hbar}}zq - \frac{q^2}{2\hbar}\right).$$

A continuación se mostrará la acción de los operadores $D(\alpha)$ en la representación de coordenadas

$$D(\alpha) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(Pq - Qp)\right) = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}PQ\right)\exp\left(\frac{iPQ}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{-iQp}{\hbar}\right),$$

$$D(\alpha)\psi(q) = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}PQ\right)\exp\left(\frac{iPq}{\hbar}\right)\psi(q-Q),$$

y en la representación de Fock-Bargmann

$$D(\alpha)f(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\exp(\alpha z)f(z-\bar{\alpha}).$$

[11] $a \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\frac{d}{dq} + \frac{q}{\sqrt{2\hbar}}$

[12] Ver [5], pág. 22.

5.5. Estados coherentes canónicos y su restricción al círculo

Los *quantos* de oscilación de un campo electromagnético monocromático, fotones, están descritos por operadores escalera de creación y destrucción: $a^\dagger$ y a, con relación de conmutación:

$$[a, a^\dagger] = 1.$$

Sea el espacio de Hilbert (espacio de Fock o *espacio de número de ocupación*) $\mathcal{H}$, y $|n\rangle$ los auto-estados normalizados del operador hermítico *número* $\mathcal{N} = a^\dagger a$. Tenemos:

$$\mathcal{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1.$$

Estos estados pueden ser generados a partir del vacío de Fock $|0\rangle$, como:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \ .$$

Los estados coherentes $|z\rangle$, $z \in \mathbb{C}$, están definidos como autoestados del operador destrucción a,

$$a|z\rangle = z|z\rangle.$$

Estos estados pueden generarse a partir de la acción del operador unitario

$$U(z, \bar{z}) \equiv e^{za^\dagger - \bar{z}a} = e^{-z\bar{z}/2} e^{za^\dagger} e^{\bar{z}a},$$

sobre el vacío $|0\rangle$, es decir:

$$|z\rangle \equiv U(z, \bar{z})|0\rangle = e^{-z\bar{z}/2} e^{za^\dagger}|0\rangle = e^{-z\bar{z}/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{5.9}$$

Todos los resultados anteriores se pueden deducir fácilmente de la introducción de este capítulo.

Como a no es hermítico, no hay ninguna razón (en principio) para que el conjunto $\{|z\rangle, z \in \mathbb{C}\}$ sea un conjunto completo de estados ortonormales. Se puede comprobar fácilmente que el *Reproducing Kernel* o *overlapping kernel* para estos estados coherentes es:

$$C(z, z') = \langle z|z'\rangle = e^{-z\bar{z}/2} e^{-z'\bar{z}'/2} e^{\bar{z}z'}, \tag{5.10}$$

que no es cero para $z \neq z'$. El conjunto $\{|z\rangle, z \in \mathbb{C}\}$ es sobre-completo y define un *tight frame* en $\mathcal{H}$, con *resolución de la identidad*:

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |z\rangle\langle z| d^2 z, \tag{5.11}$$

donde $d^2z = d\mathrm{Re}(z)d\mathrm{Im}(z) = rdrd\theta$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}$ en las coordenadas polares $z = re^{i\theta}$. Usando la forma de Glauber, tenemos:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |z\rangle\langle z| d^2z = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{-z\bar{z}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^n \bar{z}^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle\langle m| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n,m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dr \frac{r^{n+m+1}}{\sqrt{n!m!}} e^{-r^2} |n\rangle\langle m| \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta(n-m)} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dr \frac{r^{2n+1}}{n!} e^{-r^2} |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I.$$

El número promedio de partículas p (bosones) en un estado coherente $|z\rangle$ es[13]

$$p = \langle z|\mathcal{N}|z\rangle = |z|^2$$

y la amplitud de probabilidad de encontrar n partículas en $|z\rangle$ es:

$$U_n(z) \equiv \langle n|z\rangle = \langle n|U(z,\bar{z})|0\rangle = e^{-z\bar{z}/2}\frac{1}{\sqrt{n!}} z^n. \tag{5.12}$$

De la misma forma, la amplitud de probabilidad de encontrar cualquier estado

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle \in \mathcal{H}$$

en el estado coherente $|z\rangle$ está dado por:

$$\Psi(z) \equiv \langle z|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{U_n(z)}.$$

Los coeficientes de “Fourier” a_n se pueden calcular por la siguiente fórmula integral[14]:

$$a_n = \langle n|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \Psi(z) U_n(z) d^2z. \tag{5.13}$$

[13]Volviendo a utilizar la forma de Glauber, tenemos:

$$\langle z|\mathcal{N}|z\rangle = e^{-|z|^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m z^n}{\sqrt{m!n!}} n\delta_{mn} = e^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n} n}{n!} = |z|^2 \ .$$

[14]Se puede demostrar fácilmente a partir de (5.11) y (5.12), y sabiendo que $\Psi(z) \equiv \langle z|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle z|n\rangle\langle n|\psi\rangle$, y que $a_n = \langle n|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \langle n|z\rangle\langle z|\psi\rangle d^2z$.

Podemos encontrar a_n de los valores $\Psi(z)$, tomando $z = \sqrt{p}e^{i\theta}$ para un valor fijo de número medio de partículas $p = |z|^2$ como:

$$a_n = \sqrt{\frac{n!}{p^n e^{-p}}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\Psi(\sqrt{p}e^{i\theta})d\theta. \tag{5.14}$$

Esto sugiere la posibilidad de reconstruir el estado ψ a partir de un número finito N de fases $\{\theta_k\}_{k=0}^{N-1}$ y un número medio fijo de partículas (pero arbitrario) p. Seguiremos con esta idea en la siguiente sección, y estudiaremos las condiciones bajo las cuales se puede dar una reconstrucción parcial o total de ψ a partir de N muestras $\{\Psi(z_k), z_k = \sqrt{p}e^{i\theta_k}\}_{k=0}^{N-1}$ y ver que es posible que el error de la aproximación de la reconstrucción parcial, tiende a cero en el límite $N \to \infty$.

Aquí no debatiremos el problema de la definición de los operadores fase, que se puede encontrar en las siguientes referencias bibliográficas ([57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]) y en el apéndice (D). Podemos salvar la dificultad de una buena definición del operador fase restringiendo nuestro espacio de Hilbert a un subespacio $\mathcal{H}_M$ of $\mathcal{H}$ (número finito de partículas). O también considerando sistemas cuánticos con un número promedio grande de partículas (es decir, estados semi-clásicos), en el que la incertidumbre de la fase (y número) son despreciables.

5.6. Estados coherentes en el círculo

Vamos a considerar el subconjunto C_r de estados coherentes sobre un círculo de radio r, es decir, $C_r = \left\{|re^{i\theta}\rangle, \theta \in [0, 2\pi)\right\}$. En este caso nuestro conjunto Q es C_r, y la medida es $dq = d\theta$. Lo primero tendríamos que comprobar la condición de *frame*

$$b\langle\psi|\psi\rangle \leq \int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq B\langle\psi|\psi\rangle,$$

con $\Psi(z) = \langle z|\psi\rangle$. Expandiendo el estado $|\psi\rangle$ en la base de estados números , $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n|n\rangle$; la condición anterior queda

$$b\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 \leq 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\lambda}_n|a_n|^2 \leq B\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 \tag{5.15}$$

donde $\bar{\lambda}_n = e^{-r^2}\frac{r^{2n}}{n!}$ y $2\pi\bar{\lambda}_n$ son los autovalores del *operador resolución* A, que es diagonal en la base de estados número [15]. La parte derecha de la desigualdad (5.15) se satisface con $B = 2\pi \max\left\{\bar{\lambda_n}\right\}$, que significa que A es un operador acotado. Como $\bar{\lambda}_n > 0$, la inversa existe, pero como $\bar{\lambda}_n$ va a cero cuando $n \longrightarrow \infty$, A^{-1} es un operador no acotado, y por lo tanto la desigualdad (5.15) no se cumple, pero el hecho de que el conjunto de estados coherentes sobre el círculo no constituya un *frame* sobre $\mathcal{H}$ no invalida la construcción de los siguientes apartados, pero pueden ocurrir problemas de convergencia y dominio cuando operamos con A^{-1} y con el *frame dual* $|\widetilde{re^{i\theta}}\rangle$, como por ejemplo con datos duales $\tilde{\Psi}(re^{i\theta})$. En efecto, los estados

[15]Recordar que $\bar{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{N}$ donde λ_n aparece en el caso discreto, en la expresión (5.18).

del *frame dual* $|\widetilde{re^{i\theta}}\rangle$ no son normalizables, ya que sus coeficientes de Fourier $\langle n|\widetilde{re^{i\theta}}\rangle \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Sin embargo, utilizarlos en nuestros cálculos teniendo un cuidado especial y analizando la validez de las expresiones finales.

Los coeficientes de Fourier a_n de ψ se pueden obtener como:

$$a_n = \langle n|\psi\rangle = \int_0^{2\pi} \Psi(re^{i\theta})\langle n|\widetilde{re^{i\theta}}\rangle d\theta \ ,$$

utilizando que $\langle n|\widetilde{re^{i\theta}}\rangle = \frac{1}{2\pi}\bar{\lambda}_n^{-1/2} e^{in\theta}$. Con esto obtenemos la expresión (5.14). Los *datos duales* puede calcularse usando la base de los estados número:

$$\tilde{\Psi}(re^{i\theta}) = \langle\widetilde{re^{i\theta}}|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\widetilde{re^{i\theta}}|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\lambda}_n^{-1/2}e^{-in\theta}a_n = \frac{e^{r^2/2}}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{z^n}a_n \ ,$$

donde $z = re^{i\theta}$. Usando esta expresión llegamos a que los *datos duales* $\tilde{\Psi}(z)$ están directamente relacionados con la *representación del círculo* [71, 72, 73, 74, 75, 69], $g(z)$, como:

$$\tilde{\Psi}(z) = \frac{e^{r^2/2}}{2\pi} z g(z) \ ,$$

así que las condiciones para la existencia de ambas funciones son las mismas.

5.7. Número Finito de Partículas

Vamos a trabajar con sistemas que tengan un número finito de partículas $M < \infty$, así que truncaremos nuestro espacio de Hilbert $\mathcal{H}_M \subset \mathcal{H}$ de $M+1$ dimensiones. Siguiendo la terminología introducida en [60, 61], denotamos como estados físicamente accesibles a aquellos que pueden ser obtenidos del estado vacío que actúan durante un tiempo finito con una fuente de energía finita y con una interacción finita. Estos estados pertenecen a $\mathcal{H}_M$ para algún entero M. Estos estados, llamados también estados físicos, están caracterizados con el hecho de que $\langle\mathcal{N}^q\rangle$ es finito, para un $q \in \mathbb{N}$ arbitrario y finito. Estos estados incluyen los estados coherentes, estados *squeezed*, estados del equilibrio térmico y en general estados Gaussianos [64].

Antes de discutir la reconstrucción de estados $\psi \in \mathcal{H}_M$ de un número finito de fases muestra, recordaremos algunos resultados análogos a los que se hicieron con $SU(1,1)$. La ventaja de usar *tight frames* para espacio de Hilbert de dimensión finita ha sido discutido en [65].

5.7.1. Reconstrucción exacta de estados truncados

En nuestro caso, elegimos de una forma conveniente nuestros puntos de muestreo, de tal forma, que el *operador resolución* $\mathcal{A}$ y el operador *reproducing kernel* $\mathcal{B}$ sea invertible y podamos encontrar una expresión explícita de esa inversa. Escogeremos un conjunto de N puntos distribuidos uniformemente en una circunferencia de radio $\sqrt{p}$:

$$\mathcal{Q} = \left\{z_k = \sqrt{p}e^{2\pi ik/N},\ k = 0, 1, \ldots, N-1\right\}, \tag{5.16}$$

Definimos el conjunto $\mathcal{S} = \{|z_k\rangle,\ k = 0, 1, \ldots, N-1\}$ como el subconjunto de estados coherentes asociados a los puntos de $\mathcal{Q}$.

$$\mathcal{H}^{\mathcal{S}} \equiv L\left(\{|z_0\rangle, |z_1\rangle, \ldots, |z_{N-1}\rangle\}\right),$$

es el subespacio de $\mathcal{H}$ generado por $\mathcal{S}$. Para un N finito, tenemos que $\mathcal{H}^{\mathcal{S}} \neq \mathcal{H}$, así que no podemos reconstruir exactamente cada función $\psi \in \mathcal{H}$ a partir de las N muestras (*datos*) $\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle$, pero probaremos que para funciones de banda limitada podemos siempre dar una fórmula exacta de reconstrucción.

Definición 5.2.
Definimos el subespacio $\mathcal{H}_M$ de funciones de banda limitada, con $M < \infty$ como:

$$\mathcal{H}_M \equiv L\left(\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |M\rangle\}\right). \tag{5.17}$$

El subespacio $\mathcal{H}_M$ es un subespacio vectorial de dimensión finita $M+1$ de $\mathcal{H}$.

Lema 5.1.
Para $N > M$ el operador "frame" $\mathcal{T} : \mathcal{H}^M \longrightarrow \mathbb{C}^N$ definido por $\mathcal{T}(\psi) = \{\langle z_k|\psi\rangle,\ z_k \in \mathcal{Q}\}$ es tal que el operador "resolution" $\mathcal{A} = \mathcal{T}^*\mathcal{T}$ es diagonal, $\mathcal{A} = diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_M)$, en la base (5.17) de $\mathcal{H}^M$, con[16]

$$\lambda_m(p) \equiv N\frac{e^{-p}}{m!}p^m,\ m = 0, \ldots, M. \tag{5.18}$$

$\mathcal{A}$ es invertible en $\mathcal{H}^M$, por lo tanto, denotando por $|\tilde{z}_k\rangle \equiv \mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle$ el "frame dual", la expresión

$$I_M = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k\rangle\langle\tilde{z}_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{z}_k\rangle\langle z_k| \tag{5.19}$$

nos da una "resolución de la identidad" en $\mathcal{H}^M$.

Teorema 5.2. *Dada*[17] *una función de banda limitada $\psi \in \mathcal{H}^M$ sobre el disco $\mathbb{C}$, y siendo el valor del límite de la banda M,*

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{M} a_m|m\rangle, \tag{5.20}$$

existe una fórmula de reconstrucción (2.8) de ψ

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \Xi_k(z)\Psi_k, \tag{5.21}$$

para $N > M$ partiendo de los datos $\Psi_k \equiv \Psi(z_k) = \langle z_k|\Psi\rangle$, y tomando nuestro conjunto anterior de muestreo (fases) (ver expresión (5.16)), obtenemos

$$\Xi_k(z) = \frac{1}{N}e^{(z_k\bar{z}_k - z\bar{z})/2}\sum_{m=0}^{M}(\overline{zz_k^{-1}})^m.$$

[16] La cantidad λ_m está bien definida para $m \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ y será usada también para el caso de un número infinito de partículas $M = \infty$. Notar también que $f(n;p) = \lambda_n(p)/N$ es la función densidad de la distribución de Poisson. Ver Apéndice A: **DHW1**.

[17] Ver Apéndice A: **DHW2**.

Los resultados siguientes son análogos a los que se obtuvieran para $SU(1,1)$.

- La ecuación[18] (5.21) puede ser interpretada como una fórmula de reconstrucción tipo *sinc*, donde las funciones $\Xi_k(z)$ juegan el papel con las funciones *sinc*, satisfaciendo las relaciones de ortogonalidad $\Xi_k(z_l) = P_{lk}$ donde el operador $P = \mathcal{T}\mathcal{T}_l^+$ es un proyector ortogonal sobre el subespacio de dimensión M de $\mathbb{C}^N$. En el caso de un muestreo crítico, $N = M + 1$, tenemos que $\Xi_k(z_l) = \delta_{lk}$, que corresponde a una fórmula de interpolación. Para el caso de un *sobre-muestreo*, $N > M+1$, se obtiene un proyector pues se parte de un conjunto de datos *sobre-completo* Ψ_k, $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$, que pueden ser incompatible con $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^M$.

Corolario 5.1 (Transformada de Fourier Discreta[19])**.** *Los coeficientes de Fourier a_m del desarrollo $|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{M} a_m|m\rangle$, para cualquier $\psi \in \mathcal{H}^M$, pueden determinarse en términos de los datos $\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle$, como*

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{N\lambda_m}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ikm/N}\Psi_k, \quad (m = 0, \ldots, M). \tag{5.22}$$

- Los coeficientes de Fourier a_m se obtienen como una transformada discreta de Fourier (rectangular) a partir de los datos $\Psi(z_k)$, con un factor de escala $1/\sqrt{\lambda_m}$. La expresión (5.21) nos da una discretización de (5.14).

5.8. Número infinito de partículas

En esta sección estudiaremos el caso más interesante y realista de estados con un número infinito de partículas. Antes de continuar, ver sección 2.10.2.

5.8.1. Reconstrucción parcial de estados y *aliasing*

En el apartado anterior hemos visto que, usando N fases de muestreo, podemos reconstruir completamente funciones de banda limitada $\psi \in \mathcal{H}^M$, para un número de partículas $M = N - 1$. Cuando se trata de la reconstrucción de una función $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n|n\rangle$ de banda ilimitada a partir de un número finito N de muestras, no podemos usar los resultados de la sección anterior, ya que el *operador resolución* $\mathcal{A}$ es no invertible[20].

El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita, y por tanto, la reconstrucción de una función arbitraria $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n|n\rangle$ a partir de un número finito de muestras va a estar siempre sometida a error. Como $|\psi\rangle$ es normalizable, los coeficientes de Fourier decrecen a cero, así que

[18] Ver Apéndice A: **DS6**

[19] Se demuestra de forma análoga en el Apéndice A: **DS7**.

[20] Mientras el operador $\mathcal{T} : \mathcal{H}_s \longrightarrow \mathbb{C}^N$ tiene la misma expresión que en la sección anterior, el operador $\mathcal{A}$ es una matriz de dimensión infinita dada por $\mathcal{A}_{mn} = \lambda_m^{1/2}\lambda_n^{1/2}\delta_{jj'}$, con $m = j \ mod \ N$ y $n = j' \ mod \ N$, que es una matriz diagonal por bloques $N \times N$.

si, $|\psi\rangle \notin \mathcal{H}_M$, y a_n decrece a cero lo suficientemente rápido; podremos considerar aproximadamente que es de banda limitada si la norma de $|\psi_M^{\perp}\rangle \equiv \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n|n\rangle$ es lo suficientemente pequeña comparada con la norma de $|\psi\rangle$, para un M apropiado.

Definición 5.3.
Vamos a definir

$$P_M = \sum_{m=0}^{M} |m\rangle\langle m|$$

como el proyector del subespacio truncado $\mathcal{H}^M$ para algún $M < \infty$. Denotaremos con ϵ_{M+1}^2 como la normalización de la distancia al cuadrado de una función

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n|n\rangle \in \mathcal{H} \tag{5.23}$$

con su proyección ortogonal

$$|\psi_M\rangle = P_M|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{M} a_n|n\rangle$$

sobre el subespacio $\mathcal{H}_M$, es decir:

$$\epsilon_{M+1}^2 \equiv \frac{\langle\psi|I - P_M|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n|^2}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2}. \tag{5.24}$$

En otras palabras[21], *ϵ_{M+1} es el seno del ángulo entre ψ y ψ_M.*

Esperamos que el error cometido cuando reconstruyamos ψ a partir de sus N muestras Ψ_k sea del orden de $\epsilon_N(\psi)$, que será lo suficientemente pequeño si los coeficientes de Fourier a_n decaen lo suficientemente rápido. De forma más exacta, si $|a_n| \leq \frac{C}{n^\alpha}$; para alguna constante C, con $\alpha > \frac{1}{2}$ y $n \geq N$.

$$\|\psi\|^2\epsilon_N^2(\psi) = \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 \leq C^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \leq \int_N^{\infty} \frac{C^2}{x^{2\alpha}}dx = \frac{C^2}{(2\alpha-1)}\frac{1}{N^{2\alpha-1}}, \tag{5.25}$$

decimos entonces, que $\epsilon_N^2(\psi) = O\left(\frac{1}{N^{2\alpha-1}}\right)$.

- Para el caso especial[22] en el que $|\psi\rangle$ es un estado físico, por ejemplo un estado coherente $|\zeta\rangle$, es decir, cuando $a_n = e^{-|\zeta|^2/2}\frac{\zeta^n}{\sqrt{n!}}$, tenemos que $\epsilon_N^2(\zeta) = 1 - \Gamma(N, |\zeta|^2)/\Gamma(N)$. Cuando N es muy grande, podemos obtener la expresión aproximada:

  $$\epsilon_N^2(\zeta) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\zeta|^2 < N \\ 1 & \text{si} \quad |\zeta|^2 > N \end{cases}.$$

  Esto significa que al tomar $M = N - 1$, y definiendo $p = |\zeta|^2$ como el número medio de partículas, $N > p$, entonces $|\zeta_M\rangle \simeq |\zeta\rangle$, y si $N < p$, entonces $|\zeta_M\rangle \simeq 0$. Este comportamiento es similar para estados físicos, y garantiza que la reconstrucción parcial se hace exacta para $N \longrightarrow \infty$.

[21] Ver Apéndice A: **DS8**.
[22] Ver Apéndice A: **DHW3**.

En el siguiente teorema, daremos una fórmula de reconstrucción parcial para funciones $\psi \in \mathcal{H}$, y daremos una cota del error cometido.

Teorema 5.3. *Dada*[23] *una función $\psi \in \mathcal{H}$, existe una reconstrucción parcial de ψ, en términos del alias*

$$\hat{\Psi}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} L_k(z)\Psi_k, \tag{5.26}$$

a partir de N datos Ψ_k, tomando los puntos de muestreo de (5.16), con el error[24]

$$\epsilon_\psi^2(p,N) \equiv \epsilon_\psi^2(\mathcal{H}^S) \leq \frac{\nu_0(p,N)}{1+\nu_0(p,N)} + 2\epsilon_N(\psi)\sqrt{1-\epsilon_N^2(\psi)} + \epsilon_N^2(\psi)\frac{(2+\nu_0(p,N))}{1+\nu_0(p,N)}, \tag{5.27}$$

con $\nu_0(p,N) \equiv \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{(uN)!}p^{uN}$. Las funciones de interpolación de Lagrange (2.11) adoptan la siguiente forma:

$$L_k(z) = \frac{1}{N} e^{(z_k\bar{z}_k - z\bar{z})/2} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{j+qN} \left(\overline{zz_k^{-1}}\right)^{j+qN} \tag{5.28}$$

donde

$$\hat{\lambda}_j = \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{j+qN}, \qquad (j = 0, \ldots, N-1),$$

son los autovalores del operador discreto "overlapping kernel" $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$ (con coeficientes $\mathcal{B}_{kl} = \langle z_k | z_l \rangle$) y λ_n dado en (5.18), pero ahora para $n \in \mathbb{N}^* \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Se puede comprobar de forma sencilla[25] que $\lim_{N\to\infty} \nu_0(p,N) = 0$, $\forall p > 0$. Esto implica que el error (5.27) va a cero para $N \to \infty$.

Para obtener el orden de magnitud de este error, daremos primero el comportamiento asintótico de $\nu_0(p,N)$ para N grandes.

Proposición 5.1.
La cantidad $\nu_0(p,N)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico[26] *(como una función de N):*

$$\nu_0(p,N) = \frac{1}{N!}p^N + O(N^{-2N-1/2}), \tag{5.29}$$

para

$$p < p_0(N) = \left(\frac{(2N)!}{N!}\right)^{\frac{1}{N}} = \frac{4N}{e}\left(1 + \frac{\ln 2}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right).$$

---

[23] Ver Apéndice A: **DS12**. Se demuestra de forma análoga.

[24] $\epsilon_\psi(\mathcal{H}^S) = \frac{\|\psi - \hat{\psi}\|}{\|\psi\|} = \sqrt{\frac{\langle\psi|I - P_S|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}}$.

[25] Se comprueba de forma análoga al realizado en el Apéndice A: **DS13**.

[26] Ver Apéndice A: **DHW5**.

- Usando la expresión asintótica (5.29), el error cuadrático (5.27) tiende a cero cuando $N \longrightarrow \infty$, con el comportamiento asintótico[27]

$$\epsilon_\psi^2(p,N) \leq 2\epsilon_N\sqrt{1-\epsilon_N^2} + 2\epsilon_N^2 + O(N^{-2N-1/2})$$

para $p < p_0(N)$. Así que, la reconstrucción de ψ mediante $\hat{\psi}$ es exacta en este límite.

Corolario 5.2 (Transformada Discreta de Fourier[28])**.** *Los coeficientes de Fourier a_n del desarrollo (5.23) se puede obtener de forma aproximada con las transformaciones de Fourier sobre el hiperboloide:*

$$\hat{a}_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\hat{\lambda}_{n \; mod \; N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi nk/N} \Psi_k \; . \tag{5.30}$$

- La expresión de los coeficientes de Fourier $\hat{a}_n$ heredan una especie de *periodización* del a_n original[29].

$$\hat{a}_{n+pN} = \sqrt{\frac{\lambda_{n+pN}}{\lambda_n}}\, \hat{a}_n \; , \quad \forall p \in \mathbb{N} \; .$$

Este es el análogo para el hiperboloide del típico efecto *aliasing* para señales de banda ilimitada sobre la recta real.

Podríamos pensar que para el caso $\epsilon_N(\psi) = 0$, podemos reconstruir los resultados de la sección 4.3.1 (funciones de banda limitada). Pero veremos que este no es el caso. Antes, tenemos que realizar un proceso de truncación y filtrado de $|\hat{\psi}\rangle$ en (5.26) para obtener la fórmula de reconstrucción (4.9) para funciones $\psi \in \mathcal{H}_M$ ($|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{M} a_m|m\rangle$). Si $M = N-1$, la operación de truncación será:

$$|\hat{\psi}_M\rangle \equiv P_M|\hat{\psi}\rangle = \sum_{m=0}^{M} \hat{a}_n|n\rangle,$$

si a continuación reescalamos los coeficientes de Fourier[30]:

$$|\hat{\psi}_M^R\rangle \equiv R|\hat{\psi}_M\rangle = \sum_{m=0}^{M} \frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_n}\hat{a}_n|n\rangle \; .$$

Podemos encontrar la fórmula de reconstrucción para $\hat{\Psi}_M^R(z) = \langle z|RP_M|\hat{\psi}\rangle$ de la expresión (5.21). Para funciones de banda limitada, encontramos que el error cuadrático se puede acotar de la siguiente forma[31]:

$$\frac{\|\psi - \hat{\psi}_M^R\|^2}{\|\psi\|^2} \leq \epsilon_N^2 + \frac{\langle\psi_M^\perp|P_S P_M R^2 P_M P_S|\psi_M^\perp\rangle}{\|\psi\|^2} \leq \epsilon_N^2 + \epsilon_N^2(1+\nu_0(r,N))^2. \tag{5.31}$$

---

[27] Ver Apéndice A: **DS15**.
[28] Ver Apéndice A: **DS16**.
[29] Ver Apéndice A: **DS17**.
[30] Ver Apéndice A: **DS20**.
[31] Ver Apéndice A: **DS22**.

Un enfoque alternativo para el muestreo de funciones ψ para ϵ_{M+1} muy pequeños ($\epsilon_{M+1} \ll 1$), para las que se tiene

$$\|\psi - P_M\psi\|^2 = \epsilon_{M+1}^2 \|\psi\|^2 \ll \|\psi\|^2.$$

Consiste en utilizar la fórmula de reconstrucción (5.21) para $\psi_M = P_M\psi$, por lo que nos daría una buena aproximación de ψ, de manera similar a lo realizado en [40], sección 4. El problema es que, en general, los datos originales $\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle$ para ψ y los datos truncados (desconocidos) $\Psi_{M,k} = \langle z_k|P_M|\psi\rangle$ para ψ_M son diferentes, a menos que $\langle z_k|P_M = \langle z_k| \quad (\forall k = 0, \ldots, N-1)$, que es equivalente[32] a $\langle z_k|P_M|z_k\rangle = 1 \quad (\forall k = 0, \ldots, N-1)$. La siguiente proposición estudia las condiciones bajo las cuales este requerimiento se cumple.

Proposición 5.2.
Para[33] M grandes, los elementos de la diagonal de P_M en $\mathcal{H}^S$ tienen el siguiente comportamiento:

$$P_M(p) \equiv \langle z_k|P_M|z_k\rangle \simeq \begin{cases} 1 & si \quad p < p_c - \sigma_c \\ 0 & si \quad p > p_c + \sigma_c \end{cases}$$

(es decir, una aproximación de la función escalón de Heaviside), donde

$$p_c = M + 1,\ \sigma_c = \sqrt{M+1}\ ,$$

que representan el número promedio de partículas crítico y la desviación standard, respectivamente.

Si dibujamos $P_M(p)$ en función de p para diferentes valores de M. Podemos observar que $P_M(r)$ se acerca cada vez más a una función escalón cuando M crece.

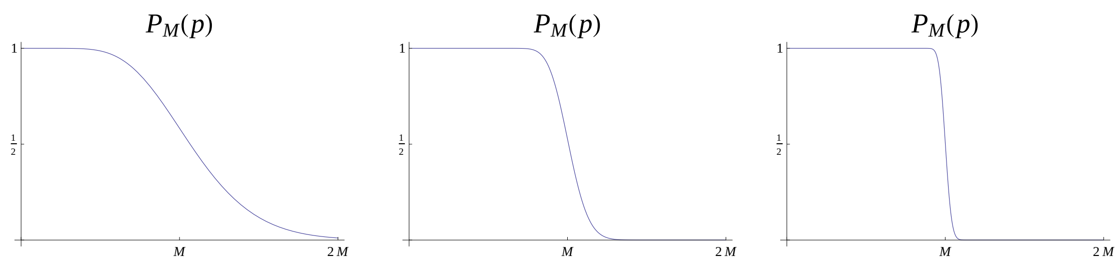

Figura 5.1: $P_M(p)$ como una función de p para tres valores distintos de M: 10, 100 y 1000.

- Los coeficientes de la matriz de P_M en $\mathcal{H}^S$ tienen estructura circulante[34]. Es decir, se pueden ver como una transformada de Fourier de los coeficientes λ_n. Tienen la expresión $\langle z_k|P_M|z_l\rangle = C_{k-l}(p)$, donde

[32]Ver Apéndice A: **DS21**.
[33]Ver Apéndice A: **DS18**.
[34]Ver Apéndice A: **DS19**.

$$C_l(p) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{M} \lambda_m e^{-2\pi iml/N} \ .$$

Nótese que $C_{N-l} = C_l^*$, por lo tanto, C_l son elementos independientes para $l = 0, \dots, \frac{N}{2}$.

5.9. Conclusiones

La restricción de estados coherentes discretos en el círculo nos da una forma alternativa de considerar funciones en la representación de Fock-Bargmann. Para espacios de Hilbert truncados, este subconjunto de estados coherentes finitos nos da un *tight frames* finito con propiedades interesantes. La falta de exactitud en el caso general aún nos permite una reconstrucción con un cierto error que tiende a cero para $N \longrightarrow \infty$. También hemos probado que un tratamiento casi exacto es posible cuando el número de muestras de fase N es más grande que el número de partículas p para estados físicos.

La reconstrucción de estados cuánticos es importante en Óptica Cuántica, Computación cuántica y Teoría de la Información. Los estados cuánticos son reconstruidos usando medidas sobre un conjunto de estados cuánticos idénticos.

Apéndice A

Demostraciones

A.1. Demostraciones de $SU(2)$

D1: Vamos a justificar que $e^{(zJ_- - \bar{z}J_+)}e^{-i\varphi J_3} \in SU(2)$.

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (J_+)^2 = (J_-)^2 = 0.$$

$$J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (J_3)^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

$$J_+J_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_-J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{J_+, J_-\} = I \quad \text{(proyectores)}.$$

$$e^{-i\varphi J_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-i\varphi)^n J_3^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}(-i\varphi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

$$e^{zJ_- - \bar{z}J_+} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(zJ_- - \bar{z}J_+)^n.$$

$$(n \text{ par}) \longrightarrow (zJ_- - \bar{z}J_+)^n = (-z\bar{z})^{n/2} I.$$

$$(n \text{ impar}) \longrightarrow (zJ_- - \bar{z}J_+)^n = (-z\bar{z})^{(n-1)/2}(zJ_- - \bar{z}J_+).$$

Por lo que:

$$e^{(zJ_- - \bar{z}J_+)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-z\bar{z})^k I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-z\bar{z})^k (zJ_- - \bar{z}J_+) =$$

$$= I\cos|z| + \tfrac{1}{|z|}\sin|z|(zJ_- - \bar{z}J_+) = \begin{pmatrix} \cos|z| & \frac{-\bar{z}}{|z|}\sin|z| \\ \frac{z}{|z|}\sin|z| & \cos|z| \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$e^{(zJ_- - \bar{z}J_+)}e^{-i\varphi J_3} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos|z| & -e^{i\varphi/2}\frac{\bar{z}}{|z|}\sin|z| \\ e^{-i\varphi/2}\dfrac{z}{|z|}\sin|z| & e^{i\varphi/2}\cos|z| \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Y asociamos:

$$\zeta_1 \equiv e^{-i\varphi/2}\cos|z|, \qquad \zeta_2 \equiv -e^{i\varphi/2}\frac{z}{|z|}\sin|z|.$$

D2:

$$(J_2)^n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}I & \text{si } n \text{ es par.} \\ \frac{1}{2^n}J_2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}.$$

$$e^{-i\theta J_2} = I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{-i\theta}{2}\right)^{2k} + i\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{-i\theta}{2}\right)^{2k+1} =$$

$$= I\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$e^{-i\phi J_3}e^{-i\theta J_2}e^{-i\varphi J_3} = \begin{pmatrix} e^{\frac{-i(\phi+\varphi)}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & e^{\frac{-i(\phi-\varphi)}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{\frac{i(\phi-\varphi)}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & e^{\frac{i(\phi+\varphi)}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \in SU(2).$$

D3:

$$1 = \langle z|z\rangle = \bar{\mathcal{N}}_s\mathcal{N}_s\sum_{n,m=0}^{2s}\bar{z}^m z^n\sqrt{\binom{2s}{n}\binom{2s}{m}}\delta_{nm} = \bar{\mathcal{N}}_s\mathcal{N}_s\sum_{n=0}^{2s}(z\bar{z})^n\binom{2s}{n} =$$

$$= \bar{\mathcal{N}}_s\mathcal{N}_s(1+z\bar{z})^{2s} = 1 \Longrightarrow \mathcal{N}_s = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}z}}\right)^{2s} \equiv \mathcal{N}^{2s}.$$

D4: Vamos a utilizar la descomposición del estado coherente (3.12).

$$\frac{2s+1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}|z\rangle\langle z|\frac{d^2z}{(1+z\bar{z})^2} = \frac{2s+1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\sum_{n,m=0}^{2s}\frac{z^n\bar{z}^m}{n!m!}(J_-)^n|s,s\rangle\langle s,s|(J_+)^m\frac{dRe(z)dIm(z)}{(1+z\bar{z})^{2s+2}} = \spadesuit$$

$$|z\rangle = \left(\frac{1}{z\bar{z}+1}\right)^s\sum_{n=0}^{2s}z^n(J_-)^n|s,s\rangle, \quad \langle z| = \left(\frac{1}{z\bar{z}+1}\right)^s\sum_{n=0}^{2s}\bar{z}^n(J_+)^n\langle s,s|.$$

$$\spadesuit = \frac{2s+1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\sum_{n,m=0}^{2s}z^n\bar{z}^m\sqrt{\binom{2s}{n}\binom{2s}{m}}|s,s-n\rangle\langle s,s-m|\frac{dRe(z)dIm(z)}{(1+z\bar{z})^{2s+2}} =$$

$$\left(z = re^{i\theta},\ dxdy = rdrd\theta,\ \boxed{\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{nm}} \right)$$

$$= \frac{2s+1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} drr \sum_{n,m=0}^{2s} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \sqrt{\binom{2s}{n}\binom{2s}{m}} \frac{1}{(1+r^2)^{2s+2}} |s, s-n\rangle\langle s, s-m| =$$

(Haciendo el cambio de variable $x = r^2,\ dx = 2rdr$)

$$= (2s+1)\sum_{n=0}^{2s}\binom{2s}{n}\int_0^{\infty} dx \frac{x^n}{(1+x)^{2s+2}} |s, s-n\rangle\langle s, s-n|.$$

La función beta la podemos expresar de la forma[1]:

$$\frac{m!n!}{(m+n+1)!} = \int_0^{\infty} \frac{x^m}{(1+x)^{m+n+2}} dx.$$

Entonces a partir de

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)^{2s+2}} dx = \frac{1}{(2s+1)\binom{2s}{n}},$$

$$\sum_{n=0}^{2s} |s, s-n\rangle\langle s, s-n| = \sum_{m=-s}^{s} |s, m\rangle\langle s, m| = I.$$

Tenemos demostrado lo que queríamos.

<u>D5</u>:

$$U(\theta, \phi) = e^{-i\phi J_3} e^{-i\theta J_2}.$$

$$e^{-i\theta J_2}|s, m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-i\theta)^n J_2^n |s, m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-\theta}{2}\right)(J_+ - J_-)^n |s, m\rangle.$$

$$J_2|s, m\rangle = \alpha_+(m)|s, m+1\rangle - \alpha_-(m)|s, m-1\rangle, \qquad \text{donde}$$

$$\alpha_\pm(m) \equiv \frac{1}{2i}\sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} \quad (\text{recordar} \quad J_2 = \tfrac{1}{2i}(J_+ - J_-)).$$

Los coeficientes $\alpha_\pm$ cumplen la propiedad: $\alpha_-(m) = \alpha_+(m-1)$.

Con lo que $|\theta, \phi; m\rangle = \sum_{-s \le i \le s} a_i |s, i\rangle$ (sobrecompleto).

<u>D6</u>: Cumple la condición:

$$\forall \psi \in \mathcal{H}_s, \quad \frac{1}{\|\psi\|^2}\sum_{m=-s}^{s} \langle\psi|\theta, \phi; m\rangle\langle\theta, \phi; m|\psi\rangle = constante, \quad (\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle).$$

[1] Ver Ecuación (10.61), p.614; [8]

D7:

Tenemos que comprobar: $\mathcal{O} = U(\theta', \phi')\mathcal{O}U^*(\theta', \phi')$.

$$U'\mathcal{O}U'^* = \int U(\theta', \phi')U(\theta, \phi)|s, m\rangle\langle s, m|U^*(\theta, \phi)U^*(\theta', \phi')d\Omega =$$

$$= \int U(\theta'', \phi'')|s, m\rangle\langle s, m|U^*(\theta'', \phi'')d\Omega'' = \int |\theta'', \phi''\rangle\langle\theta'', \phi''|d\Omega'' = 0.$$

Por ser $d\Omega$ una medida invariante sobre $\mathbb{S}^2$.

$$Tr(\mathcal{O}) = \sum_{m=-s}^{s} \langle s, m|\mathcal{O}|s, m\rangle = \int \sum_{m=-s}^{s} \langle\theta, \phi|s, m\rangle\langle s, m|\theta, \phi\rangle d\Omega =$$

$$= \int \langle\theta, \phi| \sum_{m=-s}^{s} |s, m\rangle\langle s, m||\theta, \phi\rangle d\Omega = \int d\Omega = 4\pi.$$

D8:

$$\int d\Omega\, Y_l^m(\theta, \phi)(Y_{l'}^m)^*(\theta, \phi) = \frac{2l+1}{4\pi} \int d\Omega\, \langle l, m|\theta, \phi, 0\rangle\langle\theta, \phi, 0|l', m'\rangle =$$

$$= \langle l, m|l', m'\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

D9:

$$\langle\theta, \phi; 0|j, m\rangle = \langle j, 0|U^*(\theta, \phi)|j, m\rangle = \langle j, 0|e^{i\theta J_2}e^{i\phi J_3}|j, m\rangle =$$

$$\langle j, 0|e^{i\theta J_2}|j, m\rangle e^{i\phi m} = \left(\langle j, m|e^{-i\theta J_2}|j, 0\rangle\right) e^{i\phi m}.$$

$$(d^j_{m0}(\theta))^* e^{i\phi m} = e^{-im\phi}(D^j_{m0}(\phi, \theta))^* e^{i\phi m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} Y_j^m(\theta, \phi).$$

Hemos utilizado las matrices de Wigner, y alguna de sus propiedades:

$$D^j_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im'\alpha} d^j_{m'm}(\beta) e^{-im\gamma} \qquad \text{con} \quad d^j_{m'm}(\beta) = \langle j, m'|e^{-i\beta J_2}|j, m\rangle.$$

Defino $\qquad D^j_{m'm}(\alpha, \beta) \equiv D^j_{m'm}(\alpha, \beta, 0) \Longrightarrow D^l_{m0}(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \left(Y_l^m\right)^* (\beta, \alpha).$

D10:

$$\langle z|s, m\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}z}}\right)^{2s} \sum_{m'=-s}^{s} \bar{z}^{s+m'} \sqrt{\binom{2s}{s+m'}} \langle s, m'|s, m\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}z}}\right)^{2s} (\bar{z})^{s+m} \sqrt{\binom{2s}{s+m}}.$$

D11:

$$\langle z|z'\rangle = \left(\frac{1}{1+z\bar{z}}\right)^{s}\left(\frac{1}{1+z'\bar{z}'}\right)^{s}\sum_{m,m'=-s}^{s}(\bar{z})^{s+m}(z')^{s+m'}\sqrt{\binom{2s}{s+m}\binom{2s}{s+m'}}\langle s,m|s,m'\rangle =$$

$$= \frac{1}{(1+z\bar{z})^{s}(1+z'\bar{z}')^{s}}\sum_{m=-s}^{s}(\bar{z}z')^{s+m}\binom{2s}{s+m} =$$

$$= \frac{1}{(1+z\bar{z})^{s}(1+z'\bar{z}')^{s}}\sum_{n=0}^{2s}(\bar{z}z')^{n}\binom{2s}{n} = \frac{(1+z'\bar{z})^{2s}}{(1+z\bar{z})^{s}(1+z'\bar{z}')^{s}}.$$

D12: A partir de

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = B_{lm}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha}(\cos\theta + i\sin\theta\sin(\alpha+\phi))^{l}\, d\alpha \equiv B_{lm}I_{lm}(\theta,\phi).$$

$$B_{lm} = \frac{1}{4\pi l!}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi}(l-m)!(l+m)!} \quad , \qquad K(\theta,\phi;z) =$$

$$= (1+z\bar{z})^{-j}\sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\sum_{m=-j}^{j}\sqrt{\binom{2j}{j+m}}z^{j+m}B_{jm}\int_0^{2\pi} d\alpha\; e^{-im\alpha}(\cos\theta + i\sin\theta\sin(\alpha+\phi))^{j} =$$

$$= (1+z\bar{z})^{-j}z^{j}\frac{\sqrt{(2j)!}}{2\pi j!}\sum_{m=-j}^{j}z^{m}\int_0^{2\pi} d\alpha\; e^{-im\alpha}(\cos\theta + i\sin\theta\sin(\alpha+\phi))^{j}.$$

$$I_{jm}(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{j}\binom{j}{n}(\cos\theta)^{j-n}(i\sin\theta)^{n}\int_0^{2\pi} d\alpha\; e^{-im\alpha}\sin^{n}(\alpha+\phi).$$

$$\sin^{n}(\alpha+\phi) = \frac{1}{2i}^{n}\left(e^{(\alpha+\phi)i} - e^{-(\alpha+\phi)i}\right)^{n} = \frac{1}{(2i)^{n}}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}e^{(n-p)(\alpha+\phi)i}(-1)^{p}e^{-p(\alpha+\phi)i}.$$

$$I_{jm}(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{j}2^{-n}\binom{j}{n}(\cos\theta)^{j}\tan^{n}\theta\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^{p}e^{(n-2p)\phi i}\int_0^{2\pi} d\alpha\; e^{(n-2p-m)i\alpha} =$$

$$= \sum_{n=0}^{j} 2^{-n} \binom{j}{n} (\cos\theta)^j \tan^n\theta \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p e^{(n-2p)\phi i} 2\pi \delta_{m,n-2p} =$$

$$= 2\pi (\cos\theta)^j \sum_{n=0}^{j} \binom{j}{n} \left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)^n e^{n\phi i} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(-e^{-2\phi i}\right)^p \delta_{m,n-2p}.$$

$$K(\theta,\phi;z) = \frac{(1+z\bar{z})^{-j}}{j!}(z\cos\theta)^j\sqrt{(2j)!}\sum_{n=0}^{j}\binom{j}{n}\left(\frac{z\tan\theta}{2}e^{\phi i}\right)^n \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(-\frac{e^{-2\phi i}}{z^2}\right)^p.$$

A partir de $\quad (1+x)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p,\quad$ tenemos

$$K(\theta,\phi;z) = \frac{(1+z\bar{z})^{-j}}{j!}(z\cos\theta)^j\sqrt{(2j)!}\sum_{n=0}^{j}\binom{j}{n}\left(\frac{ze^{i\phi}\tan\theta}{2}\right)^n\left(1-\frac{e^{-2i\phi}}{z^2}\right)^n =$$

$$(1+z\bar{z})^{-j}\frac{\sqrt{(2j)!}}{j!}(z\cos\theta)^j\left(1+\frac{1}{2}\left(ze^{i\phi}\tan\theta-\frac{e^{-i\phi}\tan\theta}{z}\right)\right)^j =$$

$$= (1+z\bar{z})^{-j}\frac{\sqrt{(2j)!}}{2^j j!}\left(2z\cos\theta + z^2\sin\theta e^{i\phi} - \sin\theta e^{-i\phi}\right)^j.$$

<u>**D13**</u>: A partir de

$$\langle z|s,m\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}z}}\right)^{2s}(\bar{z})^{s+m}\sqrt{\binom{2s}{s+m}},\quad \psi = \sum_{n=0}^{2s}\psi_n|s,n-s\rangle.$$

Obtenemos

$$\mathcal{T}_{kn} = \langle z_k|s,n-s\rangle = 2^{-s}e^{-2\pi ink/N}\sqrt{\binom{2s}{n}};\quad (k=0,\ldots,N-1),(n=0,\ldots,2s).$$

El operador resolución lo obtenemos a partir de $\mathcal{T}_{kn}$ y de la relación de ortogonalidad:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ik(n-m)/N} = \begin{cases} N & \text{si} \quad n = m \; mod \; N \\ 0 & \text{si} \quad n \neq m \; mod \; N \end{cases} = N\delta_{n,m\; modN}. \tag{A.1}$$

Como estamos en el caso (***Sobre-muestreo***) $N \geq 2s+1 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ik(n-m)/N} = N\delta_{nm}$.

$$\mathcal{A} = \sum_{q_k\in\mathcal{Q}} |q_k\rangle\langle q_k|,\quad (\mathcal{A}_{nm}) \equiv \langle n|\mathcal{A}|m\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\langle n|z_k\rangle\langle z_k|m\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{T}_{km}\mathcal{T}^*_{kn} = 2^{-2s}\sqrt{\binom{2s}{n}\binom{2s}{m}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ik(n-m)/N} = N2^{-2s}\binom{2s}{n}\delta_{nm}.$$

Por lo que los coeficientes de $\mathcal{A}$ son: $\boxed{\mathcal{A}_{nm} = N2^{-2s}\binom{2s}{n}\delta_{nm}}$.

Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es diagonal con elementos no nulos en la diagonal, así que es invertible y podemos construir un *dual frame*, y una pseudoinversa para $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}_l^+ \equiv \mathcal{A}^{-1}\mathcal{T}^*.$$

Por lo que podemos construir un *dual frame* $|\tilde{z}_k\rangle \equiv \mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle$, donde

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{z}_k\rangle\langle z_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k\rangle\langle\tilde{z}_k| = I.$$

D14: **(a)**: Sabiendo que $\mathcal{F}_N$ es la matriz de Fourier estándar y que además se cumple la siguiente propiedad:

$$\mathcal{F}_{N,2s+1} = \mathcal{F}_N\, i_{N,2s+1}.$$

(b): A partir de $\mathcal{F}^*_{MN}\mathcal{F}_{NM} = I_M$ y de $p_{MN}i_{NM} = I_M$, tenemos que:

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}^*\mathcal{T} = (D^{1/2}_{2s+1}\, p_{2s+1,N}\mathcal{F}_N)(i_{N,2s+1}\mathcal{F}^*_N\, D^{1/2}_{2s+1}) = D.$$

(c): A partir de $B^{\uparrow} = i_{NM}\, B\, p_{MN} \equiv \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{N\times N}$, obtenemos:

$$\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^* = (\mathcal{F}_N\, i_{N,2s+1}\, D^{1/2}_{2s+1})(D^{1/2}_{2s+1}\, p_{2s+1,N}\, \mathcal{F}^*_N) = (\mathcal{F}_N\, i_{N,2s+1}\, D_{2s+1}\, p_{2s+1,N}\, \mathcal{F}^*_N) = \mathcal{F}_N\mathcal{A}^{\uparrow}\mathcal{F}^*_N.$$

D15:

$$P = \mathcal{T}\mathcal{T}_l^+ = \mathcal{T}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{T}^* = \mathcal{F}_N\, i_{N,2s+1}\, D^{1/2}\, D^{-1}\, D^{1/2}\, p_{2s+1,N}\, \mathcal{F}^*_N =$$
$$= \mathcal{F}_N\, i_{N,2s+1}\, p_{2s+1,N}\, \mathcal{F}^*_N = \mathcal{F}_N\, P_{2s+1}\, \mathcal{F}^*_N.$$

Hemos considerado

$$i_{NM}p_{MN} = P_M \equiv \left(\begin{array}{c|c} I_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{N\times N},$$

donde $P_{2s+1} = (I_{2s+1})^{\uparrow} = \left(\begin{array}{c|c} I_{2s+1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{N\times N}$. Está claro que P es un proyector ortogonal.

A partir de $p_{2s+1,N}\, i_{N,2s+1} = I_{2s+1}$,

$$P\mathcal{T} = (\mathcal{F}_N\, i_{N,2s+1}\, p_{2s+1,N}\mathcal{F}^*_N)(\mathcal{F}_N\, i_{N,2s+1}D^{1/2}) = \mathcal{F}_N\, i_{N,2s+1}\, p_{2s+1,N}\, i_{N,2s+1}\, D^{1/2} = \mathcal{T}.$$

D16: A partir de la identidad

$$I_{2s+1} = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k\rangle\langle\tilde{z}_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{z}_k\rangle\langle z_k|.$$

Cualquier $\psi \in \mathcal{H}_s$ puede ser escrita como $|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(z_k)|\tilde{z}_k\rangle$.

Entonces $\Psi(z) = \langle z|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(z_k)\langle z|\tilde{z}_k\rangle$, como $|\tilde{z}_k\rangle = \mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle$, tenemos que:
A partir de

$$\lambda_n = N2^{-2s}\binom{2s}{n}, \quad |z_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{2s} z_k^n \lambda_n^{1/2}|s, n-s\rangle, \quad (k = 0, \ldots, N-1).$$

$$\mathcal{A}|s, n-s\rangle = \lambda_n|s, n-s\rangle, \quad \mathcal{N}^{2s} = (1+z\bar{z})^{-s}, \quad \langle z|s, n-s\rangle = \mathcal{N}^{2s}(\bar{z})^n\sqrt{\binom{2s}{n}}.$$

$$\langle z|\tilde{z}_k\rangle = \langle z|\mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle = \frac{2^s}{N}\mathcal{N}^{2s}\sum_{n=0}^{2s}(\bar{z}z_k^{-1})^n \equiv \Xi(zz_k^{-1}), \quad (k = 0, \ldots, N-1).$$

D17:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^{s} a_m|s, m\rangle = \sum_{n=0}^{2s} a_{n-s}|s, n-s\rangle \Longrightarrow \langle z_k|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{2s} a_{n-s}\mathcal{T}_{kn} = \Psi(z_k).$$

Si lo expresamos en forma matricial

$$(\mathcal{T}) \in \mathcal{M}_{N,2s+1}, \quad (a) \in \mathcal{M}_{2s+1,1}, \quad (\Psi) \in \mathcal{M}_{N,1}.$$

$$\mathcal{T}a = \Psi \Longrightarrow \mathcal{T}^*\mathcal{T}a = \mathcal{T}^*\Psi \Longrightarrow a = (\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{-1}\mathcal{T}^*\Psi \equiv \mathcal{T}_l^+\Psi.$$

$$\mathcal{T}_l^+ \text{ (pseudoinversa)}, \quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{T}^*\mathcal{T} \Longrightarrow a = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{T}^*\Psi.$$

$$a_{n-s} = \sum_{m=0}^{2s}\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}_{nm}^{-1}\mathcal{T}_{mk}^*\Psi(z_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{2s} \lambda_m^{-1}\delta_{mn}2^{-s}\binom{2s}{m}^{1/2} e^{i2\pi km/N}\Psi(z_k) = \frac{2^s}{N}\binom{2s}{n}^{-1/2}\sum_{k=0}^{N-1}\Psi(z_k)e^{2\pi ikn/N}.$$

D18:

$$\mathcal{T}_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\lambda_n}e^{-i2\pi kn/N} \Leftrightarrow \mathcal{T} = \mathcal{F}_{N,2s+1}\; D^{1/2} = \mathcal{F}_N\; i_{N,2s+1}\; D^{1/2}.$$

A partir de

$$\mathcal{F}_{MN}^*\mathcal{F}_{NM} = I_M, \quad p_{MN}i_{NM} = I_M, \quad i_{MN}p_{NM} = P_N \equiv \left(\begin{array}{c|c} I_N & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{M\times M} = (I_N)^{\uparrow}.$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}^*\mathcal{T} = (D_{2s+1}^{1/2}\ p_{2s+1,N}\ \mathcal{F}_N^*)(\mathcal{F}_N\ i_{N,2s+1}\ D_{2s+1}^{1/2}) = D.$$

A partir de:

$$B^{\uparrow} = i_{NM}\ B\ p_{MN} \equiv \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{N\times N}.$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^* = (\mathcal{F}_N\ i_{N,2s+1}\ D_{2s+1}^{1/2})(D_{2s+1}^{1/2}\ p_{2s+1,N}\ \mathcal{F}_N^*) = \mathcal{F}_N\ i_{N,2s+1}\ D_{2s+1}\ p_{2s+1,N}\ \mathcal{F}_N^* = \mathcal{F}_N\ D_N^{\uparrow}\ \mathcal{F}_N^*.$$

Entonces $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^* = \mathcal{F}_N\ \mathcal{A}^{\uparrow}\ \mathcal{F}_N^*$.

D19:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k\rangle\langle\tilde{z}_k|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k\rangle.$$

$$\langle z_l|z_k\rangle = \sum_{n=0}^{2s}\langle z_l|s, n-s\rangle\langle s, n-s|z_k\rangle = \sum_{n=0}^{2s}\mathcal{T}_{ln}\mathcal{T}_{kn}^* \equiv \mathcal{T}\mathcal{T}^* \equiv \mathcal{B}.$$

Si proyectamos con $\langle z_l|$, tenemos

$$\langle z_l|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\Gamma(k)\langle z_l|z_k\rangle \longrightarrow \Psi = \mathcal{B}\Gamma.$$

$$\Gamma \in \mathcal{M}_{N,1}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^* \quad \text{tiene estructura de matriz circulante.}$$

Usando la diagonalización de $\mathcal{B}$: $\mathcal{B} = \mathcal{F}_N\ D^{\uparrow}\ \mathcal{F}_N^*$, podemos construir la pseudoinversa $\mathcal{B}^+ = \mathcal{F}_N\ (D^{-1})^{\uparrow}\ \mathcal{F}_N^*$.

$$(D^{\uparrow})^{-1} = (D^{-1})^{\uparrow} = \left(\begin{array}{c|c} D^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{N\times N}, \quad \mathcal{F}_{NM}^*\mathcal{F}_{NM} = I_M.$$

$$\Gamma = \mathcal{B}^+\Psi = \mathcal{F}_N(D^{-1})^{\uparrow}\mathcal{F}_N^*\Psi = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1} e^{-i2\pi nm/N}(D^{-1})_{mp}^{\uparrow}e^{i2\pi pq/N\Psi_q} = \spadesuit$$

$$\left((\mathcal{F}_N)_{nm} = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-i2\pi nm/N}, \quad (D^{-1})_{pq} = \delta_{pq}\lambda_q^{-1} \quad (p, q = 0, \ldots, 2s) \right)$$

$$\spadesuit = \frac{1}{N}\sum_{p,m=0}^{2s}\sum_{q=0}^{N-1} e^{-i2\pi nm/N}e^{i2\pi pq/N}\Psi_q(D^{-1})_{mp} = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{2s}\sum_{q=0}^{N-1} e^{-i2\pi p(n-q)/N}\Psi_q\lambda_p^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{q=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{p=0}^{2s}\lambda_p^{-1}e^{-i2\pi p(n-q)/N}\right)\Psi_q \equiv \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{q=0}^{N-1}\Delta(n-q)\Psi_q.$$

D20:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \psi(z_k)|\tilde{z}_k\rangle \Longrightarrow \langle \tilde{z}_l|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(z_k)\langle \tilde{z}_l|\tilde{z}_k\rangle \longrightarrow \Gamma = \tilde{\mathcal{B}}\Psi,$$

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Gamma(z_k)|z_k\rangle \Longrightarrow \langle z_l|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Gamma(z_k)\langle z_l|z_k\rangle \longrightarrow \Psi = \mathcal{B}\Gamma,$$

$$\Longrightarrow \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{+} = \Delta.$$

D21:

$$\Delta(k) = \frac{2^{2s}}{N^{3/2}} \sum_{n=0}^{2s} \binom{2s}{n}^{-1} e^{-i2\pi nk/N}.$$

A partir de las propiedades de los coeficientes binomiales $\binom{m}{n}$, es decir: $\binom{m}{n}$ es estrictamente creciente en m para $n \geq 1$. Y si fijamos m, estos coeficientes crecen con $n = 0, 1, 2, \ldots, Floor[m/2]$. También sabemos que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, por lo que estos coeficientes crecen hacia dentro del triángulo de Tartaglia. Por lo que, nos quedamos con el primer término y el último de la suma.

D22: Vamos a mostrar que los autovalores $\hat{\lambda}_k$ de $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$ son todos estrictamente positivos, y además, que $\mathcal{B}$ es invertible. Llamo $M \equiv 2s+1$,

$$D = diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_{2s}),\ \mathcal{T} = \mathcal{F}_{NM}D^{1/2} \Longrightarrow\ \mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^* = \mathcal{F}_{NM}D\mathcal{F}^*_{NM}.$$

Que nos dice que $\mathcal{B}$ es diagonalizable[2].

$$\bar{M} = Min\,\{\bar{q}N:\ \bar{q}N \geq M\} \quad \text{con} \quad \bar{q} = Ceiling\left(\frac{M}{N}\right).$$

$$\mathcal{F}_{N\bar{M}} = \left(\mathcal{F}_N|\overset{\bar{q}}{\cdots}|\mathcal{F}_N\right).$$

Haciendo una extensión de D a $D^{\uparrow} \in \mathcal{M}_{\bar{M}}(\mathbb{K})$,

$$\mathcal{B} = \mathcal{F}_{N\bar{M}}D^{\uparrow}\mathcal{F}^*_{N\bar{M}} = \left(\mathcal{F}_N|\overset{\bar{q}}{\cdots}|\mathcal{F}_N\right)_{N\times\bar{M}} \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{\bar{M}\times\bar{M}} \left(\begin{array}{c} \mathcal{F}^*_N \\ \hline \mathcal{F}^*_N \\ \hline \vdots\ \bar{q}\text{ veces} \\ \hline \mathcal{F}^*_N \end{array}\right).$$

Utilizamos que $\mathcal{F}_{NM} = \mathcal{F}_{N\bar{M}}i_{\bar{M}M}$, $\mathcal{F}^*_{NM} = p_{M\bar{M}}\mathcal{F}^*_{N\bar{M}}$. Y además, que $D^{\uparrow} = i_{\bar{M}M}Dp_{M\bar{M}}$.

[2] Ver Apéndice (C)

Ahora defino:

$$A_p = diag(\tau_{pN}, \dots, \tau_{(p+1)N-1}), \quad (p = 0, \dots, \bar{q}-1) \quad \text{donde} \quad \tau_l = \begin{cases} \lambda_l & 0 \le l \le M-1 \\ 0 & M \le l \le \bar{M} \end{cases}.$$

$$\mathcal{B} = \left(\mathcal{F}_N | \overset{\bar{q}}{\cdots} |\mathcal{F}_N\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A_1 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{\bar{q}-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathcal{F}_N^* \\ \hline \vdots\, \bar{q} \\ \hline \mathcal{F}_N^* \end{array}\right) = \left(\mathcal{F}_N | \overset{\bar{q}}{\cdots} |\mathcal{F}_N\right) \left(\begin{array}{c} A_0\mathcal{F}_N^* \\ \hline \vdots\, \bar{q} \\ \hline A_{\bar{q}-1}\mathcal{F}_N^* \end{array}\right) =$$

$$= \mathcal{F}_N \left(\sum_{l=0}^{\bar{q}-1} A_l\right) \mathcal{F}_N^* \equiv \mathcal{F}_N \hat{D} \mathcal{F}_N^*.$$

$\hat{D}$ es una matriz diagonal, $\hat{D} = diag(\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1})$.

$\hat{\lambda}_0 = \lambda_0 + \lambda_N + \lambda_{2N} + \cdots + \lambda_{(\bar{q}-1)N},\ \hat{\lambda}_1 = \lambda_1 + \lambda_{N+1} + \lambda_{2N+1} + \cdots + \lambda_{(\bar{q}-1)N+1}, \dots,$

$\dots, \hat{\lambda}_{N-1} = \lambda_{N-1} + \lambda_{2N-1} + \cdots + \lambda_{\bar{q}N-1} \Longrightarrow \hat{\lambda}_k = \sum_{l=0}^{\bar{q}-1} \lambda_{k+lN}.$

Entonces como: $\lambda_n \equiv N2^{-2s}\binom{2s}{n}, \quad (n = 0, \dots, 2s) \Longrightarrow$

$$\hat{\lambda}_k = \sum_{l=0}^{\bar{q}-1} \lambda_{k+lN} = N2^{-2s} \sum_{l=0}^{\bar{q}-1} \binom{2s}{k+lN}.$$

Por lo que todos los autovalores son estrictamente positivos, y por lo tanto, $\mathcal{B}$ es invertible.

D23:

Como $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^* \Longrightarrow I_N = \mathcal{T}(\mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1}) \equiv \mathcal{T}\mathcal{T}_r^+, \qquad \mathcal{T} \in \mathcal{M}_{N\times M}$ (con $M \equiv 2s+1$).
Vamos a demostrar de $P_S = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T}$ es un proyector :

$P_S^2 = (\mathcal{T}_r^+\mathcal{T})(\mathcal{T}_r^+\mathcal{T}) = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T} = P_S,$
$P_S^* = (\mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{T})^* = \mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{T} = P_S, \quad \mathcal{B}$ es autoadjunto.

D24: Del operador resolución (3.17), cualquier $\psi \in \mathcal{H}_s$ tiene un único *alias* $\hat{\psi} = P_S\psi$ que pueda escribirse como

$$|\hat{\psi}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle z_k|\psi\rangle |\tilde{z}_k\rangle \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(z_k)|\tilde{z}_k\rangle \Longrightarrow \hat{\Psi}(z) = \langle z|\hat{\psi}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(z_k)\langle z|\tilde{z}_k\rangle.$$

Usando que $|\tilde{z}_k\rangle = \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{B}_{lk}^{-1}|z_l\rangle$.

Usando la descomposición del estado coherente en la base ortonormal $\{|s, n-s\rangle\}$:

$$|z\rangle = \left(\frac{1}{1+z\bar{z}}\right)^s \sum_{n=0}^{2s} z^n \sqrt{\binom{2s}{n}} |s, n-s\rangle, \quad \lambda_n = N 2^{-2s} \binom{2s}{n}.$$

$$|z_l\rangle = 2^{-s} \sum_{n=0}^{2s} e^{2\pi i l n/N} \sqrt{\binom{2s}{n}} |s, n-s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{2s} \lambda_n^{1/2} e^{2\pi i l n/N} |s, n-s\rangle \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \langle z|\tilde{z}_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{B}_{lk}^{-1} \sum_{n=0}^{2s} \lambda_n^{1/2} e^{2\pi i l n/N} \langle z|s, n-s\rangle.$$

$$\langle z|s, n-s\rangle = \left(\tfrac{1}{1+z\bar{z}}\right)^s (\bar{z})^n \sqrt{\binom{2s}{n}} \equiv \mathcal{N}^{2s}(z,\bar{z})(\bar{z})^n \sqrt{\binom{2s}{n}}.$$

Como $\mathcal{B} = \mathcal{F}_N \hat{D} \mathcal{F}_N^*$, con $\hat{D} = diag(\hat{\lambda}_0, \ldots, \hat{\lambda}_{N-1})$:

$\mathcal{F}_{kl} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i2\pi k l/N}$, $(k, l = 0, \ldots, N-1)$, y además $\mathcal{F}_N^* \mathcal{F}_N = I_N \Longrightarrow \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{F}_N \hat{D}^{-1} \mathcal{F}_N^*$,

$$\mathcal{B}_{lk}^{-1} = \sum_{n,m=0}^{N-1} \mathcal{F}_{ln} \hat{D}_{nm}^{-1} \mathcal{F}_{mk}^* = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{F}_{ln} \hat{\lambda}_n^{-1} \mathcal{F}_{nk}^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\lambda}_n^{-1} e^{i2\pi n(k-l)/N}.$$

$$\langle z|\tilde{z}_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\lambda}_n^{-1} e^{i2\pi n(k-l)/N}\right] \sum_{m=0}^{2s} \lambda_m^{1/2} e^{2\pi i l m/N} \mathcal{N}^{2s} (\bar{z})^m \sqrt{\binom{2s}{m}} =$$

$$= \frac{1}{N} 2^s \mathcal{N}^{2s} \sum_{p=0}^{N-1} \hat{\lambda}_p^{-1} \left(\sum_{m=0}^{2s} \lambda_m \delta_{m=p \; mod(N)} \; z_k^p (\bar{z})^m \right) =$$

$$= \frac{1}{N} 2^s \mathcal{N}^{2s} \sum_{p=0}^{N-1} \hat{\lambda}_p^{-1} \sum_{l=0}^{\bar{q}-1} \lambda_{p+lN} (\overline{z z_k^{-1}})^{p+lN} \equiv \hat{\Xi}(z z_k^{-1}).$$

<u>D25</u>: La demostración es similar a la dada en la Proposición 3.1, salvo que $\mathcal{B}$ es ahora no-singular, y ahora no necesitamos pseudoinversa.

$\Psi = \mathcal{B}\Gamma$, y si usamos la diagonalización de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{F}_N \hat{D} \mathcal{F}_N^* \Longrightarrow \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{F}_N \hat{D}^{-1} \mathcal{F}_N^* \Longrightarrow \Gamma = \mathcal{B}^{-1}\Psi = \mathcal{F}_N \hat{D}^{-1} \mathcal{F}_N^* \Psi.$$

A partir de aquí, y haciendo un desarrollo análogo al ya mencionado en la Proposición 3.1, obtenemos que $\Gamma = \Delta * \Psi$, puede expresarse como un producto de convolución entre los datos y el filtro.

D26:

$$\langle z_k|\hat{\psi}\rangle = \sum_{n=0}^{2s} \hat{a}_{n-s}\langle z_k|s, n-s\rangle \Leftrightarrow \Psi(k) = \sum_{n=0}^{2s} \mathcal{T}_{kn}\hat{a}_{n-s}.$$

Con $\mathcal{T}_{kn} = \langle z_k|s, n-s\rangle = 2^{-s}\sqrt{\binom{2s}{n}} e^{-i2\pi kn/N}; \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1),\ (n = 0, 1, \ldots, 2s).$

$\mathcal{T}_r^+ = \mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1},\ \mathcal{T}\mathcal{T}_r^+ = I_N,$ (ya que $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$), $P_S = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T}$ (Proyector).

Tomando la expresión matricial

$\Psi = \mathcal{T}\hat{a} \longrightarrow \mathcal{T}_r^+\Psi = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T}\hat{a} = P_S\hat{a} = \hat{a},$

$$P_S a = \hat{a} \Longrightarrow \hat{a} = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T}a = \mathcal{T}_r^+\Psi = \mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1}\Psi \equiv \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{T}_{kn}^*\mathcal{B}_{kl}^{-1}\Psi(l) = \spadesuit$$

(Como $\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{F}_N \hat{D}^{-1} \mathcal{F}_N^*$).

$$\spadesuit = 2^{-s}\sqrt{\binom{2s}{n}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi kn/N} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{B}_{kl}^{-1}\Psi(l) = \spadesuit$$

$$(\mathcal{B}_{kl}^{-1} = \sum_{r=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{F}_{kr}\hat{\lambda}_r^{-1}\delta_{rj}\mathcal{F}_{lj}^* = \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{F}_{kj}\hat{\lambda}_j^{-1}\mathcal{F}_{lj}^* = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} e^{-i2\pi j(k-l)/N},$$

$$\mathcal{F}_N = (\mathcal{F}_{nm}) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i2\pi nm/N}).$$

$$\spadesuit = \frac{2^{-s}}{N}\sqrt{\binom{2s}{n}} \sum_{l=0}^{N-1}\Psi(l)\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}e^{i2\pi jl/N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k(n-j)/N} = (\lambda_n\hat{\lambda}_n^{-1})\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=0}^{N-1}\Psi(l)e^{i2\pi nl/N}.$$

D27: *a*) A partir del teorema 3.2, si identificamos los datos $\zeta_k = \Phi(z_k)$ y $\hat{\Xi}(zz_k^{-1}) = \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{lk}^{-1}\Phi_l(z)$.

$$\Phi(z) = \hat{\Psi}(z) = \langle z|\hat{\psi}\rangle \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_k \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{lk}^{-1}\Phi_l(z).$$

$$(\beta) = \begin{pmatrix} \beta_{00} & \cdots & \beta_{0N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{N-10} & \cdots & \beta_{N-1N-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} \beta_{00} & \cdots & \beta_{N-10} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{0N-1} & \cdots & \beta_{N-1N-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{adjunto} \text{ Posición (l,k)} \mapsto$$

$$\mapsto (-1)^{k+l} \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{00} & \cdots & \beta_{k-10} & \beta_{k+10} & \cdots & \beta_{N-10} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{0l-1} & \cdots & \beta_{k-1l-1} & \beta_{k+1l-1} & \cdots & \beta_{N-1l-1} \\ \hline \beta_{0l+1} & \cdots & \beta_{k-1l+1} & \beta_{k+1l+1} & \cdots & \beta_{N-1l+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{0N-1} & \cdots & \beta_{k-1N-1} & \beta_{k+1N-1} & \cdots & \beta_{N-1N-1} \end{array}\right).$$

Que es equivalente a

$$\text{Posición (l,k)} \longrightarrow (-1)^{k+l} \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{00} & \cdots & \beta_{0l-1} & \beta_{0l+1} & \cdots & \beta_{0N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{k-10} & \cdots & \beta_{k-1l-1} & \beta_{k-1l+1} & \cdots & \beta_{k-1N-1} \\ \hline \beta_{k+10} & \cdots & \beta_{k+1l-1} & \beta_{k+1l+1} & \cdots & \beta_{k+1N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{N-10} & \cdots & \beta_{N-1l-1} & \beta_{N-1l+1} & \cdots & \beta_{N-1N-1} \end{array}\right).$$

Entonces

$$\beta^{-1}_{lk} = \frac{(-1)^{k+l}}{\det \beta} \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{00} & \cdots & \beta_{0l-1} & \beta_{0l+1} & \cdots & \beta_{0N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{k-10} & \cdots & \beta_{k-1l-1} & \beta_{k-1l+1} & \cdots & \beta_{k-1N-1} \\ \hline \beta_{k+10} & \cdots & \beta_{k+1l-1} & \beta_{k+1l+1} & \cdots & \beta_{k+1N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{N-10} & \cdots & \beta_{N-1l-1} & \beta_{N-1l+1} & \cdots & \beta_{N-1N-1} \end{array}\right).$$

Y por otro lado

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\det\beta}\det\begin{pmatrix} 0 & \Phi_0(z) & \cdots & \Phi_{N-1}(z) \\ \zeta_0 & \mathcal{B}_{00} & \cdots & \mathcal{B}_{0N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{N-1} & \mathcal{B}_{N-10} & \cdots & \mathcal{B}_{N-1N-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^{k+1}\zeta_k \det\left(\begin{array}{ccc} \Phi_0(z) & \cdots & \Phi_{N-1}(z) \\ \beta_{00} & \cdots & \beta_{0N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{k-10} & \cdots & \beta_{k-1N-1} \\ \hline \beta_{k+10} & \cdots & \beta_{k+1N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{N-10} & \cdots & \beta_{N-1N-1} \end{array}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^{k+1}\zeta_k \sum_{l=0}^{N-1}(-1)^l \Phi_l(z) \det\left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{00} & \cdots & \beta_{0l-1} & \beta_{0l+1} & \cdots & \beta_{0N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{k-10} & \cdots & \beta_{k-1l-1} & \beta_{k-1l+1} & \cdots & \beta_{k-1N-1} \\ \hline \beta_{k+10} & \cdots & \beta_{k+1l-1} & \beta_{k+1l+1} & \cdots & \beta_{k+1N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{N-10} & \cdots & \beta_{N-1l-1} & \beta_{N-1l+1} & \cdots & \beta_{N-1N-1} \end{array}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\zeta_k \sum_{l=0}^{N-1}\beta^{-1}_{lk}\Phi_l(z).$$

b)

$$\Phi_k(z) \equiv \langle z|z_k\rangle \implies \Phi_k(z_l) = \langle z_l|z_k\rangle\beta_{lk}.$$

Como $\quad \Phi(z) = \sum_{k=0}^{N-1}\zeta_k \sum_{l=0}^{N-1}\beta^{-1}_{lk}\Phi_l(z) \implies \Phi(z_k) = \sum_{p=0}^{N-1}\zeta_p \sum_{l=0}^{N-1}\beta^{-1}_{lp}\beta_{kl} =$

$$= \sum_{p=0}^{N-1}\zeta_p\delta_{kp} = \zeta_k.$$

<u>D28</u>: Queremos que los $|z\rangle^J$, estén normalizados, es decir, ${}^J\langle z|z\rangle^J = 1$.

$$|z\rangle^J = U^{(J)}(z,\bar{z})|\gamma\rangle^J = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\bigoplus_{s=0}^{J} U^{(J)}(z,\bar{z})|s,s\rangle = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\bigoplus_{s=0}^{J}|z\rangle^s \implies$$

$$\implies {}^J\langle z|z\rangle^J = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\bigoplus_{s',s=0}^{J} {}^{s'}\langle z|z\rangle^s = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\bigoplus_{s',s=0}^{J}\delta_{s's}{}^{s'}\langle z|z\rangle^s = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\bigoplus_{s=0}^{J}{}^{s}\langle z|z\rangle^s = \frac{J+1}{J+1} = 1.$$

Y ahora vamos a justificar $I_{\mathcal{H}^{(J)}}$:

$$ {}^J\langle z|I_{\mathcal{H}^{(J)}}|z\rangle^J = \sum_{s=0}^{J}\sum_{m=-s}^{s} {}^J\langle z|s,m\rangle\langle s,m|z\rangle^J = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\sum_{s=0}^{J}\sum_{m=-s}^{s}\bigoplus_{s',s''=0}^{J} {}^{s'}\langle z|s,m\rangle\langle s,m|z\rangle^{s''} = $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\sum_{s=0}^{J}\sum_{m=-s}^{s} {}^s\langle z|s,m\rangle\langle s,m|z\rangle^s = \spadesuit $$

(Como $\quad {}^s\langle z|s,m\rangle\langle s,m|z\rangle^s = \binom{2s}{s+m}(1+z\bar{z})^{-2s}(z\bar{z})^{2(s+m)}$

$n \equiv m+s,\ z\bar{z} \equiv r^2,\ (1+r^2)^{2s} = \sum_{n=0}^{2s}\binom{2s}{n} r^{2n}$).

$$ \spadesuit = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\sum_{s=0}^{J}\sum_{n=0}^{2s} {}^s\langle z|s,n-s\rangle\langle s,n-s|z\rangle^s = \frac{1}{J+1}\sum_{s=0}^{J} 1 = 1. $$

Y por último, demostraremos el *kernel* para varios spines

$$ C^{(J)}(z,z') \equiv {}^J\langle z|z'\rangle^J = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\bigoplus_{s',s=0}^{J} {}^{s'}\langle z|z'\rangle^s = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\bigoplus_{s=0}^{J} {}^s\langle z|z'\rangle^s \equiv $$

$$ \equiv \frac{1}{\sqrt{J+1}}\sum_{s=0}^{J} C^{(s)}(z,z') = \frac{1}{J+1}\sum_{s=0}^{J}\frac{(1+z'\bar{z})^{2s}}{(1+z\bar{z})^s(1+z'\bar{z}')^s}. $$

D29:

Como $C^{(J)}(z,z') = \frac{1}{J+1}\sum_{s=0}^{J} C_s(z,z') \equiv \frac{1}{J+1}\sum_{s=0}^{J}\mathcal{B}^s = \mathcal{F}_N\left(\frac{1}{J+1}\sum_{s=0}^{J} D^{\uparrow}_{2s+1}\right)\mathcal{F}^*_N =$
$= \mathcal{F}_N\tilde{D}^{\uparrow}_{2J+1}\mathcal{F}^*_N.$

Donde $\tilde{D}_{2J+1}$ es una matriz diagonal con autovalores

$$ \tilde{\lambda}_n = \frac{1}{J+1}\sum_{s=Ceiling(n/2)}^{J}\lambda^s_n\ , \qquad (n = 0,1,\ldots,2J). $$

Entonces, $\det\mathcal{B}^{(J)} = \det\left(\mathcal{F}_N\tilde{D}^{\uparrow}_{2J+1}\mathcal{F}^*_N\right) \neq 0 \Longrightarrow$ El rango $\mathcal{B}^{(J)}$ es $2J+1$.
Ya que el $rango(\tilde{D}^{\uparrow}_{2J+1}) = 2J+1$.

D30: A partir de las ecuaciones (3.20),(3.10),(3.11) y de (3.19), tenemos:

$$ |z\rangle^J = \frac{1}{\sqrt{J+1}}\sum_{s=0}^{J}\mathcal{N}_s(z,\bar{z})e^{zJ_-}|s,s\rangle = $$

$$ \frac{1}{\sqrt{J+1}}\sum_{s=0}^{J}\mathcal{N}_s(z,\bar{z})\sum_{n=0}^{2s} z^n\binom{2s}{n}^{1/2}|s,s-n\rangle \qquad \text{con} \qquad \mathcal{N}_s(z,\bar{z}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}}\right)^{2s}. $$

Como hicimos el muestreo

$$z_k^{(s')} = r_{s'} e^{2\pi i k/(2s'+1)}, \quad (s' = 0, \ldots, J), (k = 0, \ldots, 2s').$$

A partir de la expresión (C.1) y $\mathcal{T}_{kn}^{(s',s)} = \langle z_k^{(s')} | s, n-s \rangle$:

$$\langle z_k^{(s')}| = \frac{1}{\sqrt{J+1}} \sum_{s''=0}^{J} \mathcal{N}_{s''} \sum_{n'=0}^{2s''} \left(\bar{z}_k^{(s')}\right)^{n'} \sqrt{\binom{2s''}{n'}} \langle s'', s''-n'|,$$

$$\mathcal{T}_{kn}^{(s',s)} = \tfrac{1}{\sqrt{J+1}} \mathcal{N}_s r_{s'}^n e^{-2\pi i k n/(2s'+1)} \sqrt{\binom{2s}{n}},$$

$$\mathcal{T}_{kn}^{(s',s)} = \frac{1}{\sqrt{J+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+r_{s'}^2}} \right)^{2s} r_{s'}^n e^{-2\pi i k n/(2s'+1)} \sqrt{\binom{2s}{n}}. \tag{A.2}$$

Por otro lado

$$(\mathcal{F}_{2s'+1,2s+1})_{nm} = \frac{1}{\sqrt{2s'+1}} e^{-i2\pi nm/(2s'+1)}, \quad (n = 0, \ldots, 2s'), (m = 0, \ldots, 2s).$$

$$\mathcal{T}_{kn}^{(s',s)} = \frac{1}{\sqrt{2s'+1}} \sum_{l=0}^{2s} e^{-i2\pi kl/(2s'+1)} \left(D_{ln}^{(s',s)} \right)^{1/2}. \tag{A.3}$$

Si comparamos ambas expresiones (A.2) y (A.3), tenemos:

$$D_{ln}^{(s',s)} = \delta_{ln} \frac{1}{J+1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+r_{s'}^2}} \right)^{2s} (2s'+1) r_{s'}^{2n} \binom{2s}{n} \equiv \delta_{ln} \lambda_n^{(s',s)}$$

D31:

Como $\quad |\tilde{z}_m\rangle = \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{lm}^{-1} |z_l\rangle, \quad$ y $\quad \Psi_m = \langle z_m | \psi \rangle,$

$$\Phi_k = \langle \theta_0, \phi_k | \psi \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \langle \theta_0, \phi_k | \tilde{z}_m \rangle \langle z_m | \psi \rangle = \sum_{l,m=0}^{N-1} \mathcal{K}_{kl} \beta_{lm}^{-1} \Psi_m.$$

D32:

$$\omega_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{j} \left(-1 + e^{i4\pi n/N}\right)^p \binom{j}{p} \left(2 e^{i2\pi n/N} \cot\theta_0\right)^{j-p} e^{-i2\pi kn/N} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{j} \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} (-1)^{p-r} e^{i4\pi nr/N} \binom{j}{p} (2\cot\theta_0)^{j-p} e^{i2\pi n(j-p)/N} e^{-i2\pi kn/N} =$$

$$= \sum_{p=0}^{j} \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} \binom{j}{p} (-1)^{p-r} (2\cot\theta_0)^{j-p} N \delta_{p=(j-k+2r) mod\ N} =$$

$$= N \sum_{p=(j-k+2r) mod\ N} \binom{p}{r} \binom{j}{p} (-1)^{p-r} (2\cot\theta_0)^{j-p}.$$

Utilizando una demostración por reducción al absurdo, vamos a justificar que $\lambda = 0$, es decir, como sabemos que $j = \frac{N-1}{2}$ y que $(p = 0, \ldots, \frac{N-1}{2})$, y además, $p = \frac{N-1}{2} - k + 2r + \lambda N$. Si cojo el máximo valor de $2r$, tenemos que $p = \frac{N-1}{2} - k + 2p + \lambda N \Longrightarrow p = k - \frac{N-1}{2} - \lambda N$,si $\lambda > 0$, tenemos, tomando $k = N - 1$, $p = \frac{N-1}{2} - \lambda N < 0$!(*contradicción*)!

Partimos de la máxima expresión de p, es decir, $p = k - \frac{(N-1)}{2} - \lambda N$, ahora si $\lambda < 0$ $(\tilde{\lambda} \equiv -\lambda)$, $p = k - \frac{N-1}{2} + \lambda \tilde{N}$, si $k = 0 \Longrightarrow p = -\frac{N-1}{2} + \tilde{\lambda} N \Longrightarrow p \geq \frac{N+1}{2} > \frac{N-1}{2}$!(*contradicción*)!$\Longrightarrow \lambda = 0$.

D33: Usando la definición (3.8), tenemos

$$\langle \theta_0, \phi_k | j, m \rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} Y_j^m(\theta_0, \phi_k),$$

$$\Phi_k = \sum_{m=-j}^{j} a_m \langle \theta_0, \phi_k | j, m \rangle = \sum_{m,m'=-j}^{j} a_m \langle \theta_0, \phi_k | j, m' \rangle \langle j, m' | j, m \rangle =$$
$$= \sum_{m=-j}^{j} \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} Y_j^m(\theta_0, \phi_k) a_m.$$

D34: Haciendo el cambio en los índices $m = n - j$, $(n = 0, \ldots, 2j)$, tenemos que la expresión (3.28) queda en forma matricial

$$\vec{\Phi} = \mathcal{Y}(\theta_0)\vec{a} = \mathcal{Y}(\theta_0) D^{-1/2} \mathcal{F}_N^* \vec{\Phi}.$$

D35:

$$\mathcal{Y}_j^{n-j}(\frac{\pi}{2}, \phi_k) = e^{im\phi_k} P_j^{n-j}(0).$$

$$P_j^{n-j}(0) = \frac{2^{n-j}}{\sqrt{\pi}} \cos(n\pi/2) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\Gamma\left(j - \frac{1}{2}n + 1\right)} \Longrightarrow \quad \text{Si } n \text{ es impar } \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0,$$

$$P_j^{n-j}(0) = 0 \Longrightarrow \mathcal{Y}_j^{n-j}(\pi/2, \phi_k) = 0.$$

A.2. Demostraciones de $SU(1,1)$

DS1:

$$A \equiv zK_+ - \bar{z}K_- = \begin{pmatrix} 0 & z \\ \bar{z} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^n = \begin{cases} |z|^n I & n \in \text{par} \\ \\ |z|^{n-1} A & n \in \text{impar} \end{cases} ,$$

$$e^{zK_+ - \bar{z}K_-} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} |z|^{2k} A = \begin{pmatrix} \cosh|z| & \frac{z}{|z|}\sinh|z| \\ \frac{\bar{z}}{|z|}\sinh|z| & \cosh|z| \end{pmatrix},$$

$$K_0^n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} I & n \in \text{par} \\ \\ \frac{1}{2^n} K_0 & n \in \text{impar} \end{cases} \longrightarrow e^{i\varphi K_0} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix},$$

$$e^{zK_+ - \bar{z}K_-} e^{i\varphi K_0} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2}\cosh|z| & \frac{z}{|z|} e^{-i\varphi/2}\sinh|z| \\ \frac{\bar{z}}{|z|} e^{i\varphi/2}\sinh|z| & e^{-i\varphi/2}\cosh|z| \end{pmatrix} \in SU(1,1).$$

DS2:

$$e^{zK_+}|s,0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n (K_+)^n |s,0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \binom{2s+n-1}{n}^{1/2} |s,n\rangle.$$

Como $\mathcal{N}_s e^{zK_+}|s,0\rangle = |z\rangle$, entonces

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_s z^n \binom{2s+n-1}{n}^{1/2} |s,n\rangle,$$

$$\langle z|z\rangle = 1 \Longrightarrow \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathcal{N}_s^2 \bar{z}^m z^n \binom{2s+n-1}{n}^{1/2} \binom{2s+m-1}{m}^{1/2} \delta_{nm} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_s^2 |z|^{2n} \binom{2s+n-1}{n} = 1.$$

A partir de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} x^n = (1-x)^{-p}$, tenemos

$$1 = \mathcal{N}_s^2 \left(1-|z|^2\right)^{-2s} \Longrightarrow \mathcal{N}_s = \left(1-|z|^2\right)^{s}.$$

DS3: Esta demostración es análoga a la realizada en la demostración de $SU(2)$ (**D4**). Hay que recordar, que para el caso de $SU(1,1)$, tenemos que $z = \tanh(\tau/2)e^{i\alpha} \in \mathbb{D}_1 \Longrightarrow |z| \leq 1$.

$$\frac{2s-1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_1} |z\rangle\langle z| \frac{d^2z}{(1-z\bar{z})^2} =$$

$$\frac{2s-1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_1} \sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{n,m=0}^{\infty} z^n\bar{z}^m \mathcal{N}_s^2 \sqrt{\binom{2s+n-1}{n}\binom{2s+m-1}{m}} |s,n\rangle\langle s,m| \frac{dRe(z)dIm(z)}{(1-z\bar{z})^2} =$$

$$= \frac{2s-1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 drr \sum_{n,m=0}^{\infty} r^{n+m}e^{i(n-m)\theta} \sqrt{\binom{2s+n-1}{n}\binom{2s+m-1}{m}} (1-r^2)^{2s-2}|s,n\rangle\langle s,m| =$$

$$= 2(2s-1)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2s+n-1}{n}\int_0^1 dx x^n(1-x)^{2s-2}|s,n\rangle\langle s,n| = \sum_{n=0}^{\infty}|s,n\rangle\langle s,n| = 1.$$

Hemos utilizado

$$z = re^{i\theta},\ dxdy = rdrd\theta,\ x = r^2, dx = 2rdr, r \in (0,1),$$

$$\int_0^1 t^m(1-t)^n dt = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Esta última expresión se puede mirar en [8], Ecuación 10.60a, página 614.

DS4: A partir de la ecuación (4.2) y de $z_k = re^{2\pi ik/N}$ obtenemos:

$$\mathcal{T}_{kn} = \langle z_k|s,n\rangle = \sqrt{\binom{2s+n-1}{n}}(1-r^2)^s r^n e^{-2\pi ikn/N} \equiv \sqrt{\lambda_n}\mathcal{F}_{kn}, \qquad \text{(A.4)}$$

donde $\mathcal{F}$ expresa la matriz rectangular de Fourier (Ver Apéndice C.1):

$$\mathcal{F}_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-i2\pi kn/N}, \quad (k = 0,\ldots,N-1),\ (n = 0,\ldots,M).$$

Entonces, los elementos de matriz del *operador resolución* será

$$\mathcal{A}_{nm} = \sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{T}_{nk}^*\mathcal{T}_{km} = \sqrt{\lambda_n\lambda_m}\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{F}_{nk}^*\mathcal{F}_{km} = \lambda_n\delta_{nm}.$$

Hemos usado las relaciones de ortogonalidad de las matrices rectangulares de Fourier (RFM). Ver apéndice C.1 y la expresión de ortogonalidad (A.1), y el hecho de que $N > M$. Como $\mathcal{A}$ es diagonal, con elementos en la diagonal $\lambda \neq 0$, entonces es invertible, y podemos construir un *frame dual* y la pseudoinversa por la izquierda de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_l^+ \equiv \mathcal{A}^{-1}\mathcal{T}^*$, que nos daría una *resolución de la identidad* como en la ecuación (2.9).

DS5: De la *Resolución de la identidad* (5.19), podemos escribir para cualquier $\psi \in \mathcal{H}_s^M$ como

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\Psi_k|\tilde{z}_k\rangle, \qquad \text{y por lo tanto, } \Psi(z) = \langle z|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\Psi_k\langle z|\tilde{z}_k\rangle.$$

A partir de $|\tilde{z}_k\rangle = \mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle$, $\mathcal{A}|s,n\rangle = \lambda_n|s,n\rangle$, y de la expresión

$$|z_k\rangle = (1-r^2)^s \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\binom{2s+n-1}{n}} z_k^n |s,n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e^{2\pi i k n/N}|s,n\rangle, \qquad \text{(A.5)}$$

obtenemos que

$$\langle z|\tilde{z}_k\rangle = \langle z|\mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{M} \lambda_n^{-1/2} e^{2\pi i k n/N}\langle z|s,n\rangle,$$

y utilizando la expresión (4.2) y la definición (4.6) de λ_m, obtenemos

$$\langle z|\tilde{z}_k\rangle = \Xi_k(z).$$

DS6: Para $z = z_l$, y $M = N-1$ (caso crítico), tenemos:

$$\Xi_k(z_l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M} e^{-2\pi i(l-k)m/N} = \delta_{lk}.$$

Ya que la suma de la raíces N-ésimas de la unidad es cero.

Se va a demostrar que $\mathcal{T}\mathcal{T}_l^+ = P_{lk}$ a partir de

$$\Xi_k(z_l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M} e^{-2\pi i(l-k)m/N}.$$

Tomando en cuenta que

$$\mathcal{F}_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i2\pi k n/N},\ \mathcal{T}_{kn} = \sqrt{\lambda_n}\mathcal{F}_{kn},\ \mathcal{A}^{-1}_{nm} = \lambda_n^{-1}\delta_{nm} \quad \text{con} \quad (n,m = 0,\ldots,M).$$

$$P_{lk} = \mathcal{T}\mathcal{T}_l^+ = \sum_{n,m=0}^{M} \mathcal{T}_{ln}\mathcal{A}^{-1}_{nm}\mathcal{T}^*_{mk} = \sum_{n,m=0}^{M} \lambda_n^{1/2}\mathcal{F}_{ln}\delta_{nm}\lambda_n^{-1}\lambda_m^{1/2}\mathcal{F}^*_{mk} =$$

$$= \sum_{n=0}^{M} \mathcal{F}_{ln}\mathcal{F}^*_{nk} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{M} e^{-2\pi i(l-k)n/N} = \Xi_k(z_l).$$

DS7: Tomando el producto con $\langle z_k|$ en la expresión (4.8) de $|\psi\rangle$, y sabiendo que $\mathcal{T}_{kn} = \langle z_k|s,n\rangle$, tenemos

$$\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{M}\langle z_k|s,m\rangle = \sum_{m=0}^{M} \mathcal{T}_{km}a_m.$$

De forma análoga a lo realizado en la demostración **D18** (Apéndice A). Definimos $\Psi_k \equiv \Psi(z_k)$. Sean las matrices

$$(\mathcal{T}) \in \mathcal{M}_{N,M+1}, \quad (a) \in \mathcal{M}_{M+1,1}, \quad (\Psi) \in \mathcal{M}_{N,1}.$$

$$\mathcal{T}_l^+ \text{ (pseudoinversa)}, \quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{T}^*\mathcal{T} \Longrightarrow a = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{T}^*\Psi.$$

$$\mathcal{A}^{-1} = diag(\lambda_0^{-1}, \lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_M^{-1}),\ \mathcal{T}_{kn} = \sqrt{\lambda_n}\mathcal{F}_{kn} \Longrightarrow \mathcal{T}_{nk}^* = \sqrt{\lambda_n}\mathcal{F}_{nk}^*.$$

$$a_n = \sum_{m=0}^{M}\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}_{nm}^{-1}\mathcal{T}_{mk}^*\Psi_k = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M} \lambda_n^{-1}\lambda_m^{1/2}\delta_{nm}\mathcal{F}_{mk}^*\Psi_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_n^{-1/2}\mathcal{F}_{nk}^*\Psi_k = \frac{1}{\sqrt{N\lambda_n}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi kn/N}\Psi_k, \quad (n = 0, \ldots, M).$$

DS8: Definamos α como el ángulo que comprende $|\psi\rangle$ y $|\psi_M\rangle$. Además, $|\psi_M\rangle \perp |\psi^\perp\rangle$.

$$|\psi\rangle = |\psi_M\rangle + |\psi^\perp\rangle = P_M|\psi\rangle + |\psi^\perp\rangle, \quad \epsilon_{M+1}^2 \equiv \frac{\langle\psi|I - P_M|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi|\psi^\perp\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \epsilon_{M+1}^2\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi^\perp\rangle = \langle\psi^\perp|\psi^\perp\rangle \Longrightarrow \epsilon_{M+1} = \frac{\|\psi^\perp\|}{\|\psi\|} \equiv \sin\alpha.$$

DS9: Vamos a ver que $\mathcal{B}$ es diagonalizable y a obtener sus autovalores $\hat{\lambda}_k$.

Sabemos que estos autovalores son estrictamente positivos, y $\mathcal{B}$ es invertible. Esto nos da que $\mathcal{B}$ tiene estructura circulante (Ver C.2).

Si usamos la siguiente expresión para estados coherentes

$$\mathcal{B}_{kl} = \langle z_k|z_l\rangle = \left(\frac{1 - r^2}{1 - r^2 e^{2\pi i(l-k)/N}}\right)^{2s} \equiv C_{l-k}, \tag{A.6}$$

donde se aprecia su estructura circulante. Los autovalores de $\mathcal{B}$ se calcula fácilmente con la fórmula:

$$\hat{\lambda}_k = \hat{D}_{kk} = (\mathcal{F}^*\mathcal{B}\mathcal{F})_{kk} = \frac{1}{N}\sum_{n,m=0}^{N-1} e^{i2\pi kn/N}C_{m-n}e^{-i2\pi mk/N}. \tag{A.7}$$

Si expandimos el denominador de (A.6) en términos de coeficientes binomiales

$$C_l = (1 - r^2)^{2s}\sum_{q=0}^{\infty}\binom{q + 2s - 1}{q} r^{2q}e^{2\pi ilq/N},$$

entonces,

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{N}\sum_{n,m=0}^{N-1} e^{i2\pi kn/N}(1-r^2)^{2s}\sum_{q=0}^{\infty}\binom{q+2s-1}{q} r^{2q}e^{2\pi i(m-n)q/N}e^{-i2\pi mk/N} =$$

$$= \frac{(1-r^2)^{2s}}{N}\sum_{q=0}^{\infty}\binom{q+2s-1}{q} r^{2q}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi n(k-q)/N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi im(q-k)/N}.$$

A partir de las relaciones de ortogonalidad para matrices de Fourier rectangulares (A.1), y de la definición de (4.6),

$$\hat{\lambda}_k = \frac{(1-r^2)^{2s}}{N}\sum_{q=0}^{\infty}\binom{q+2s-1}{q} r^{2q}N^2\delta_{(q-k)\ mod\ N} =$$

$$= N(1-r^2)^{2s}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{k+lN+2s-1}{k+lN} r^{2(k+lN)} \equiv \sum_{l=0}^{\infty}\lambda_{k+lN}.$$

Es evidente que $\hat{\lambda}_k > 0,\ \forall k = 0,1,\ldots,N-1$, así que $\mathcal{B}$ es invertible.

<u>DS10</u>: Si definimos $\mathcal{T}_r^+ = \mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1}$, es fácil comprobar que $\mathcal{T}\mathcal{T}_r^+ = I_N$ (identidad en $\mathbb{C}^N$). También es fácil comprobar que P_S es un proyector ortogonal:

$$P_S = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T} \Longrightarrow P_S^2 = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T}\mathcal{T}_r^+\mathcal{T} = \mathcal{T}_r^+\mathcal{T} = P_S,$$

$$P_S^* = (\mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{T})^* = \mathcal{T}^*\mathcal{B}^{-1}\mathcal{T} = P_S.$$

Ya que $\mathcal{B}$ es autoadjunto ($\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$). Se puede apreciar fácilmente a partir de su descomposición $\mathcal{B} = \mathcal{F}\hat{D}\mathcal{F}^*$.

Los coeficientes matriciales del proyector P_S son calculados de la siguiente forma:

$$P_{mn}(r,N) = \sum_{k,l=0}^{N-1}\mathcal{T}_{ml}^*\mathcal{B}_{lk}^{-1}\mathcal{T}_{kn}.$$

La inversa de $\mathcal{B}$ se puede obtener:

$$\mathcal{B}_{lk}^{-1} = (\mathcal{F}\hat{D}^{-1}\mathcal{F}^*)_{lk} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}e^{i2\pi j(k-l)/N}. \qquad \text{(A.8)}$$

A partir de $\mathcal{T}_{kn} = \sqrt{\lambda_n}\mathcal{F}_{kn}$ (Ver (A.13)), y usando las relaciones de ortogonalidad (A.1) para RFM (matrices rectangulares de Fourier), obtenemos:

$$P_{mn}(r,N) = \sum_{k,l=0}^{N-1} \lambda_m^{1/2} \mathcal{F}^*_{ml} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} e^{i2\pi j(k-l)/N} \lambda^{1/2} \mathcal{F}_{kn} =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} (\lambda_m \lambda_n)^{1/2} \sum_{k,l=0}^{N-1} e^{i2\pi j(k-l)/N} e^{i2\pi ml/N} e^{-i2\pi kn/N} =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} (\lambda_m \lambda_n)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k(j-n)/N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{i2\pi l(m-j)/N} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} \delta_{j=n \ mod \ N} \delta_{j=m \ mod \ N}.$$

Hemos tenido en cuenta que

$$\mathcal{T}_{kn} = \sqrt{\lambda_n} \mathcal{F}_{kn} \longrightarrow \mathcal{T}^*_{nk} = \sqrt{\lambda_n} \mathcal{F}^*_{kn}.$$

Si $j = n \ mod \ N$ y $j = m \ mod \ N \Longrightarrow n = m \ mod \ N$, por lo que:

$$P_{mn}(r,N) = \hat{\lambda}^{-1}_{n \ mod \ N} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} \ \delta_{n=m \ mod \ N}.$$

Todos los términos de la suma son cero, salvo el valor $j = n \ mod \ N \Leftrightarrow j = n+pN, \ p \in \mathbb{Z}$. Como $m,n \in \mathbb{N}^*$, obtenemos que P_{mn} es una matriz diagonal por bloques de orden $N \times N$.

DS11: Vamos a demostrar que $\nu_n(r,N)$ es estrictamente decreciente para $s > 1/2$. Como $\nu_n(r,N) = \frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_n} - 1$, nos podemos centrar en el estudio de la monotonía, sin perder generalidad:

$$\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_n} = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n+uN}}{\lambda_n} = 1 + \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+uN}}{\lambda_n} = 1 + \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\binom{2s-1+n+uN}{n+uN}}{\binom{2s-1+n}{n}} r^{2uN}.$$

Nos centraremos en la monotonía de

$$a_n \equiv \frac{\binom{2s-1+n+uN}{n+uN}}{\binom{2s-1+n}{n}}, \tag{A.9}$$

que traslada la monotonía a $\nu_n(r,N)$.

Por lo que, vamos a estudiar el comportamiento de $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$, vamos a suponer que $a_{n+1} \geq a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \ s > 1/2, \ u \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(n+1)(2s+n+uN)}{(n+1+uN)(2s+n)} \geq 1 \Longrightarrow s \leq \frac{1}{2} \quad (\mathit{Contradicción}).$$

Entonces, como hemos demostrado por *reducción al absurdo*:

$$a_{n+1} < a_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \Longrightarrow \nu_n(r,N) \quad \text{es estrictamente decreciente.}$$

DS12: A partir de las expresiones (A.8) y (2.10) y viendo que:

$$\langle z|z_l\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle z|s,n\rangle\langle s,n|z_l\rangle$$

y utilizando (2.11), y la expresión (4.2), y la relación de ortogonalidad (A.1), podemos obtener (4.20):

$$L_k(z) = \langle z|\tilde{z}_k\rangle = \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{B}_{lk}^{-1}\langle z|z_l\rangle = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} e^{2\pi i j(k-l)/N}\langle z|z_l\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} e^{2\pi i j(k-l)/N} \sum_{p=0}^{\infty}\langle z|s,p\rangle\langle s,p|z_l\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} e^{2\pi i j(k-l)/N} \sum_{p=0}^{\infty} \binom{2s-1+p}{p} (1-z\bar{z})^s (1-z_l\bar{z}_l)^s (\bar{z}z_l)^p =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{\infty} \delta_{p,j \; mod \; N} \hat{\lambda}_j^{-1} r^{p-j} z_k^j \lambda_p (1-z_k\bar{z}_k)^{-s} r^{-2p} (1-z\bar{z})^s (\bar{z})^p =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{1-z\bar{z}}{1-z_k\bar{z}_k}\right)^s \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{j+qN} \left(\overline{z z_k^{-1}}\right)^{j+qN}.$$

Hemos utilizado que

$$p = j + qN \quad (q \in \mathbb{N}^*).$$

Como $\quad (1-z_l\bar{z}_l)^s = (1-z_k\bar{z}_k)^s = (1-r^2)^s, \quad$ por ser $\quad z_l = re^{2\pi i l/N}$. Además,

$$e^{2\pi i j(k-l)/N} z_l^p = r^{p-j} e^{2\pi i l(p-j)/N} z_k^j, \qquad \binom{2s-1+p}{p} (1-z_k\bar{z}_k)^s = \frac{1}{N}\lambda_p (1-z_k\bar{z}_k)^{-s} r^{-2p},$$

$$z_k^j = r^{2j}\bar{z}_k^{-j}, \quad r^{qN} z_k^j r^{-2(j+qN)} \bar{z}^{j+qN} = (\bar{z}_k^{-1})^{j+qN}.$$

Ahora vamos a demostrar la expresión de error (4.19).

Descomponemos $|\psi\rangle$ en términos de $|\psi_{N-1}\rangle \equiv P_{N-1}|\psi\rangle$, y $|\psi_{N-1}^{\perp}\rangle \equiv (I - P_{N-1})|\psi\rangle$, podemos escribir, a partir de la definición de error (2.12)

$$\epsilon_\psi^2(r,N)\|\psi\|^2 = \langle\psi|(I-P_S)|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle - \langle\psi|P_S|\psi\rangle.$$

$$|\psi\rangle = |\psi_{N-1}^\perp\rangle + |\psi_{N-1}\rangle,$$

$$\langle\psi|P_S|\psi\rangle = \langle\psi_{N-1}^\perp|P_S|\psi_{N-1}^\perp\rangle + \langle\psi_{N-1}|P_S|\psi_{N-1}\rangle + \langle\psi_{N-1}^\perp|P_S|\psi_{N-1}\rangle + \langle\psi_{N-1}|P_S|\psi_{N-1}^\perp\rangle.$$

$$z \equiv \langle\psi_{N-1}|P_S|\psi_{N-1}^\perp\rangle, \quad P_S^* = P_S \quad \text{(es autoadjunto (Lema (4.3)))}.$$

$$z^* + z = 2Re(z).$$

$$\langle\psi|P_S|\psi\rangle = \langle\psi_{N-1}|P_S|\psi_{N-1}\rangle + 2Re\left(\langle\psi_{N-1}|P_S|\psi_{N-1}^\perp\rangle\right) + \langle\psi_{N-1}^\perp|P_S|\psi_{N-1}^\perp\rangle.$$

Vamos acotar los términos.

♠ Para la acotación del primer término utilizamos la expresión (4.17) y

$$|\psi_{N-1}\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a_n|s,n\rangle, \quad \langle m|P_S|n\rangle = P_{mn}(r,N).$$

Y vamos a utilizar el Lema (4.4) y la definición (4.11)

$$\langle\psi_{N-1}|P_S|\psi_{N-1}\rangle = \sum_{m,n=0}^{N-1} a_m^* a_n \langle m|P_S|n\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 \frac{1}{1+\nu_n(r,N)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{1+\nu_0(r,N)} \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = \frac{(1-\epsilon_N^2)\|\psi\|^2}{1+\nu_0(r,N)}.$$

$$\text{Como} \quad \epsilon_N^2 = \frac{\sum_{n=N}^\infty |a_n|^2}{\|\psi\|^2}, \quad \text{por ser} \quad \psi = \sum_{n=0}^\infty a_n|s,n\rangle \longrightarrow \|\psi\|^2 = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2,$$

$$\epsilon_N^2\|\psi\|^2 = \|\psi\|^2 - \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = (1-\epsilon_N^2)\|\psi\|^2.$$

♠ Vamos acotar el segundo término:

$$-2Re(\langle\psi_{N-1}|P_S|\psi_{N-1}^\perp\rangle) \leq 2|\langle\psi_{N-1}|P_S|\psi_{N-1}^\perp\rangle| \leq 2\|\psi_{N-1}\|\|P_S\psi_{N-1}^\perp\|.$$

$$\|\psi_{N-1}\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = \|\psi\|^2 - \|\psi\|^2\epsilon_N^2 = (1-\epsilon_N^2)\|\psi\|^2,$$

$$\|P_S\psi_{N-1}^\perp\|^2 = \langle\psi_{N-1}^\perp|P_S|\psi_{N-1}^\perp\rangle = \sum_{n=N}^\infty \frac{|a_n|^2}{1+\nu_n(r,N)} \leq \sum_{n=N}^\infty |a_n|^2 = \epsilon_N^2\|\psi\|^2.$$

Es fácil de demostrar que

$$\frac{1}{1+\nu_n(r,N)} \leq 1, \qquad (\forall n = 0,\ldots,N-1).$$

Por lo que

$$-2Re(\langle\psi_{N-1}|P_S|\psi_{N-1}^{\perp}\rangle) \leq 2\epsilon_N\sqrt{1-\epsilon_N^2}\|\psi\|^2.$$

Hemos utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. Y el hecho de que P_S es un proyector ortogonal ($P_S^* = P_S, P_S^2 = P_S$).

♠ Vamos acotar el tercer término:

$$-\langle\psi_{N-1}^{\perp}|P_S|\psi_{N-1}^{\perp}\rangle \leq \langle\psi_{N-1}^{\perp}|P_S|\psi_{N-1}^{\perp}\rangle \leq \|\psi_{N-1}^{\perp}\|\|P_S\psi_{N-1}^{\perp}\|.$$

$$\|\psi_{N-1}^{\perp}\|^2 = \sum_{n=N}^{\infty}|a_n|^2 = \|\psi\|^2\epsilon_N^2,$$

$$\|P_S\psi_{N-1}^{\perp}\|^2 = \langle\psi_{N-1}^{\perp}|P_S|\psi_{N-1}^{\perp}\rangle = \sum_{n=N}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{1+\nu_n(r,N)} \leq \epsilon_N^2\|\psi\|^2.$$

Por lo que,

$$-\langle\psi_{N-1}^{\perp}|P_S|\psi_{N-1}^{\perp}\rangle \leq \epsilon_N^2\|\psi\|^2.$$

Entonces nos quedaría al final el error acotado de la siguiente forma:

$$\epsilon_\psi^2(r,N) \leq 1 - \frac{(1-\epsilon_N^2)}{1+\nu_0(r,N)} + 2\sqrt{1-\epsilon_N^2} + \epsilon_N^2.$$

Operando de forma sencilla tenemos lo que queríamos demostrar:

$$\epsilon_\psi^2(r,N) \leq \frac{\nu_0(r,N)}{1+\nu_0(r,N)} + 2\epsilon_N\sqrt{1-\epsilon_N^2} + \epsilon_N^2\frac{(2+\nu_0(r,N))}{1+\nu_0(r,N)}.$$

DS13: Sabiendo que

$$\nu_0(r,N) = \sum_{u=1}^{\infty}\binom{2s-1+uN}{uN}r^{2uN}, \qquad x \equiv uN.$$

$$(x\to\infty): \qquad r^{2x}\binom{2s-1+x}{x} = r^{2x}\frac{(2s-1+x)!}{(2s-1)!(x)!} =$$

$$= r^{2x}\frac{1}{(2s-1)!}\prod_{j=1}^{2s-1}(j+x) \overset{(N\to\infty)}{\simeq} \frac{1}{(2s-1)!}x^{2s-1}r^{2x} =$$

$$= \frac{1}{(2s-1)!}e^{-x\left(-(2s-1)\frac{\ln x}{x}+2\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)} \overset{(x\to\infty)}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \lim_{N\to\infty}\nu_0(r,N) = 0.$$

Hay que mencionar que este resultado es válido para cualquier valor de s.
Considerando que el $\lim_{N\to\infty} \epsilon_N = 0$, se comprueba de forma trivial que $\epsilon_\psi(r,N) \longrightarrow 0$ cuando $N \to \infty$.

DS14: Si tomamos

$$\nu_0(r,N) = \sum_{u=1}^{\infty} a_u \equiv \sum_{u=1}^{\infty} \binom{2s-1+uN}{uN} r^{2uN} = \binom{2s-1+N}{N} r^{2N} + \binom{2s-1+2N}{2N} r^{4N} + \dots$$

$$\frac{a_{u+1}}{a_u} = r^{2N} \frac{(2s-1+uN+N) \cdot \overset{2s-1}{\cdots} (uN+N+1)}{(2s-1+uN) \cdot \overset{2s-1}{\cdots} (uN+1)} =$$

$$= r^{2N} \prod_{j=1}^{2s-1} \frac{(u+1)N+j}{(uN+j)} = r^{2N} \prod_{j=1}^{2s-1} \left(1 + \frac{N}{j+uN}\right) \equiv r^{2N} h(u).$$

$h(u)$ es estrictamente decreciente en $u \implies \frac{a_{u+1}}{a_u}$, $\forall u \in \mathbb{N}$ (estrictamente decreciente). Entonces, para $u \in \mathbb{N}$ genérico, buscamos un r_0 que cumpla esta condición

$$\frac{a_{u+1}}{a_u} < \frac{a_2}{a_1} < 1.$$

Que nos garantiza que todos los sumandos de $\nu_0(r,N)$ va tomando valores más pequeños. Vamos a encontrar el valor r_0:

$$\frac{a_2}{a_1} = r^{2N} h(1) < 1 \implies r < \left(\frac{1}{h(1)}\right)^{1/(2N)} \equiv r_0.$$

$$r_0 = \prod_{j=1}^{2s-1} \left(1 + \frac{1}{1+jx}\right)^{-\frac{x}{2}}, \qquad \text{con} \quad (x \equiv \frac{1}{N}).$$

$$\left(1 + \frac{1}{1+jx}\right)^{-\frac{x}{2}} \simeq 1 - \frac{x}{2}\ln 2 + O(x^2).$$

$$r_0 \simeq \prod_{j=1}^{2s-1} \left(1 - \frac{x}{2}\ln 2 + O(x^2)\right) = \left(1 - \frac{x}{2}\ln 2 + O(x^2)\right)^{2s-1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{2s-1} \binom{2s-1}{m} \left(-\frac{x}{2}\ln 2 + O(x^2)\right)^m = \sum_{m=0}^{2s-1} \binom{2s-1}{m} x^m \left(-\frac{1}{2}\ln 2 + O(x)\right)^m \simeq$$

$$\simeq 1 - \frac{x(2s-1)\ln 2}{2} + O(x^2) = 1 - \frac{(2s-1)\ln N}{2N} + O(1/N^2).$$

Y el comportamiento asintótico de $\nu_0(r,N)$ será obtenido a partir de la fórmula de Stirling:

$$x! = \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}\exp\left(-x+\frac{\theta}{12x}\right), \quad (x>0, 0<\theta<1).$$

Para N grandes podemos tomar una buena aproximación con $\theta=0$.

$$\binom{2s-1+2N}{2N} r^{4N} \simeq \frac{r^{4N}}{(2s-1)!}e^{-2s+1}x^{-2s+1}\left(1+(2s-1)x\right)^{1/x+2s-1/2} \qquad (\text{con } x\equiv \tfrac{1}{2N}).$$

Como $\qquad (1+(2s-1)x)^{1/x+2s-1/2} \simeq e^{2s-1}(1+s(2s-1)x+O(x^2)).$

Entonces tenemos

$$\binom{2s-1+2N}{2N} r^{4N} \simeq \frac{r^{4N}}{(2s-1)!}x^{-2s+1}(1+s(2s-1)x+O(x^2)) = O(N^{2s-1}r^{4N}).$$

DS15: A partir de (4.19), tenemos:

$$\epsilon_\psi^2 \leq 2\epsilon_N\sqrt{1-\epsilon_N^2} + \frac{(1+\epsilon_N^2)\nu_0+2\epsilon_N^2}{1+\nu_0} = 2\epsilon_N\sqrt{1-\epsilon_N^2}+1+\epsilon_N^2+\frac{\epsilon_N^2-1}{1+\nu_0}.$$

Ya que $\dfrac{1}{1+\nu_0} \simeq 1-\nu_0$.

$$\epsilon_\psi^2 \leq 2\epsilon_N\sqrt{1-\epsilon_N^2}+1+\epsilon_N^2+(\epsilon_N^2-1)(1-\nu_0) = 2\epsilon_N\sqrt{1-\epsilon_N^2}+2\epsilon_N^2+(1-\epsilon_N^2)\nu_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ \epsilon_\psi^2 \leq 2\epsilon_N\sqrt{1-\epsilon_N^2}+2\epsilon_N^2+O\left(r^{2N}N^{2s-1}\right).$$

Hemos utilizado $\nu_0(r,N) = O(r^{2N}N^{2s-1})$.

DS16: A partir de la definición

$$\hat{a}_n = \langle s,n|\hat{\psi}\rangle = \langle s,n|P_S|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\langle s,n|\tilde{z}_k\rangle\Psi_k = \sum_{l,k=0}^{N-1}\langle s,n|z_l\rangle\mathcal{B}_{lk}^{-1}\Psi_k.$$

Hemos utilizado la expresión (4.14) del proyector P_S, y además

$$\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle, \qquad |\tilde{z}_k\rangle = \sum_{l=0}^{N-1}\mathcal{B}_{lk}^{-1}|z_l\rangle.$$

Y utilizando las relaciones de ortogonalidad (A.1), y las expresiones (A.13) y (A.8), es decir,

$$\mathcal{T}_{ln}^* = \langle s,n|z_l\rangle = \sqrt{\lambda_n}\mathcal{F}_{nl}^*, \quad \mathcal{F}_{nl}^* = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{i2\pi ln/N}\ (l=0,\ldots,N-1), \quad \mathcal{B}_{lk}^{-1} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}e^{i2\pi j(k-l)/N};$$

tenemos

$$\hat{a}_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{N\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} e^{i2\pi jk/N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-i2\pi l(j-n)/N} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\lambda}_j^{-1} e^{i2\pi jk/N} \delta_{j=n\ mod\ N} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\hat{\lambda}_{n\ mod\ N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k e^{i2\pi nk/N}.$$

Que se deduce fácilmente, sabiendo que $j = n + pN$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ y $(j = 0, \ldots, N-1)$.

DS17:

$$\Psi_k = \langle z_k|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle z_k|s,m\rangle\langle s,m|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{1/2} \mathcal{F}_{km} a_m.$$

A partir de (4.22) y de las relaciones de ortogonalidad (A.1).

$$\hat{a}_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\hat{\lambda}_n} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi nk/N} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} \mathcal{F}_{km} a_m = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\hat{\lambda}_n} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} a_m \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}_{nk}^* \mathcal{F}_{km} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\hat{\lambda}_n} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} a_m \delta_{m=n\ mod\ N} \Longrightarrow \hat{a}_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\hat{\lambda}_n} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{n+qN}^{1/2} a_{n+qN}.$$

A partir de (4.22):

$$\hat{a}_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\hat{\lambda}_n} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi nk/N} \Psi_k\ , \quad \hat{a}_{n+pN} = \frac{\sqrt{\lambda_{n+pN}}}{\hat{\lambda}_{n+pN}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi nk/N} \Psi_k,$$

$$\frac{\hat{a}_n}{\hat{a}_{n+pN}} = \frac{\lambda_n^{1/2} \hat{\lambda}_{n+pN}}{\hat{\lambda}_n \lambda_{n+pN}^{1/2}} \Longrightarrow \frac{\hat{\lambda}_{n+pN}}{\hat{\lambda}_n} \hat{a}_{n+pN} = \sqrt{\frac{\lambda_{n+pN}}{\lambda_n}} \hat{a}_n.$$

Y a partir de (A.7), se puede deducir de forma trivial que

$$\hat{\lambda}_n = \hat{\lambda}_{n+pN} \Longrightarrow \hat{a}_{n+pN} = \sqrt{\frac{\lambda_{n+pN}}{\lambda_n}}\, \hat{a}_n.$$

DS18: Usando la expresión (A.13), tenemos:

$$\mathcal{T}_{kn} = \langle z_k|s,n\rangle = \sqrt{\binom{2s+n-1}{n}} (1-r^2)^s r^n e^{-2\pi ikn/N}, \qquad (k = 0, \ldots, N-1; n = 0, \ldots, M).$$

$$P_M^s(r) \equiv \langle z_k|P_M|z_k\rangle = \sum_{m=0}^{M} \mathcal{T}_{km} \mathcal{T}_{mk}^* = (1-r^2)^{2s} \sum_{m=0}^{M} \binom{2s+m-1}{m} r^{2m}.$$

Tomamos $p \equiv r^2$, entonces,

$$\frac{\partial P_M^s(p)}{\partial p} = (1-p)^{2s-1}\left[(-2s)\sum_{m=0}^{M}\binom{2s+m-1}{m}p^m + (1-p)\sum_{m=1}^{M}\binom{2s+m-1}{m}mp^{m-1}\right] \equiv$$

$$\equiv (1-p)^{2s-1}A,$$

$$A = (-2s)\sum_{m=0}^{M}\binom{2s+m-1}{m}p^m + \sum_{m=1}^{M}\binom{2s+m-1}{m}mp^{m-1} - \sum_{m=1}^{M}\binom{2s+m-1}{m}mp^m =$$

$$= -2s - \sum_{m=1}^{M}(2s+m)p^m\binom{2s+m-1}{m} + \sum_{m=1}^{M}\binom{2s+m-1}{m}mp^{m-1} =$$

$$= -2s - \sum_{m=1}^{M}(2s+m)p^m\binom{2s+m-1}{m} + \sum_{m=0}^{M-1}\binom{2s+m}{m+1}(m+1)p^m =$$

$$= -(2s+M)p^M\binom{2s+M-1}{M} + \sum_{m=1}^{M-1}p^m\left[\binom{2s+m}{m+1}(m+1) - (2s+m)\binom{2s+m-1}{m}\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial P_M^s(p)}{\partial p} = -(1-p)^{2s-1}(2s+M)p^M\binom{2s+M-1}{M}.$$

Ya que

$$\binom{2s+m}{m+1} = \frac{(2s+m)}{m+1}\binom{2s+m-1}{m},$$

$$\frac{\partial P_M^s(p)}{\partial p} = -(1-p)^{2s-1}(2s+M)p^M\binom{2s+M-1}{M} = -(2s+M)B(2s+M-1,p),$$

donde $B(2s-1+M,p)$ es una distribución binomial. Por lo que $\frac{\partial P_M^s(p)}{\partial p}$ es una distribución binomial salvo un factor $(2s+M)$. Si calculamos un máximo de $B(2s-1+M,p)$ obtenemos el punto crítico

$$p_c = \frac{1}{(1+\frac{2s-1}{M})}.$$

Usando el *Teorema del Límite Central* para $2s-1+M \longrightarrow \infty$, y la distribución de la delta de Dirac como límite de una distribución normal, y sabiendo también que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Theta'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx,$$

$f(x)$ es una función cualquiera, $\Theta(x)$ la función de Heaviside, y $\delta(x)$ la delta de Dirac. Se puede ver que la derivada de la función de Heaviside es la delta de Dirac, desde la visión de distribuciones. Por lo que concluimos nuestra demostración.

<u>DS19</u>:

$$\langle z_k|P_M|z_l\rangle = \sum_{m=0}^{M}\langle z_k|s,m\rangle\langle s,m|z_l\rangle = \sum_{m=0}^{M}\mathcal{T}_{km}\mathcal{T}^*_{ml} =$$

$$= \sum_{m=0}^{M}\lambda_m^{1/2}\mathcal{F}_{km}\lambda_m^{1/2}\mathcal{F}^*_{lm} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{M}\lambda_m e^{-i2\pi m(k-l)/N} \equiv C_{k-l} \equiv C_l.$$

$$\mathcal{F}_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-i2\pi kn/N}, \qquad \lambda_m = N(1-r^2)^{2s}\binom{2s+m-1}{m}r^{2m},$$

$(k = 0,\ldots,N-1;\ n,m = 0,\ldots,M)$.

Notar que $C_{N-l} = C_l^*$, por tanto, solamente hay estos elementos independientes:

$$C_l, \quad (l = 0,\ldots,\frac{N}{2}).$$

<u>DS20</u>: Utilizamos $\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_n}$ como coeficiente de reescalamiento, ya que como:

$$\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_n} \equiv 1+\nu_n(r,N), \quad P_{mn}(r,N) \equiv \langle s,m|P_S|s,n\rangle = \frac{\lambda_n}{\hat{\lambda}_n}\delta_{mn},$$

con $(m,n = 0,\ldots,N-1)$. Ver ecuaciones (4.16) y (4.17).

Para poder expresar los coeficientes de Fourier, es necesario hacer ese reescalamiento. Al ser P_S un proyector ($P_S^2 = P_S$), entonces tenemos que $|\hat{\psi}\rangle = P_S|\hat{\psi}\rangle$.

$$\hat{a}_m = \langle s,m|\hat{\psi}\rangle = \langle s,m|P_S|\hat{\psi}\rangle = \langle s,m|P_S|\hat{\psi}_M^R\rangle = \sum_{n=0}^{M}\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_n}\hat{a}_n\frac{\lambda_n}{\hat{\lambda}_n}\delta_{mn} = \hat{a}_m.$$

Entonces podemos utilizar la función de banda limitada reescalada $|\hat{\psi}_M^R\rangle$.

<u>DS21</u>: Se demuestra fácilmente que a partir de

$$\langle z_k|P_M = \langle z_k| \Longrightarrow \langle z_k|P_M|z_k\rangle = \langle z_k|z_k\rangle = 1.$$

Hemos utilizado la expresión (A.5). Y viceversa[3],

$$\begin{aligned}\Psi_{M,k} &= \langle z_k|P_M|\psi\rangle = \sum_{q=0}^{N-1}\langle z_k|P_M|z_q\rangle\langle\tilde{z}_q|\psi\rangle = \\ &= \sum_{q=0}^{N-1}\Gamma(q)\langle z_k|z_q\rangle = \Psi_k.\end{aligned}$$

[3]Ver demostración **D21**.

$$P_M|s,n\rangle = \sum_{m=0}^{M} |s,m\rangle\langle s,m|s,n\rangle = |s,n\rangle \quad (n=0,\ldots,M).$$

DS22:

$$\|\psi - \hat{\psi}_M^R\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle + \langle\hat{\psi}_M^R|\hat{\psi}_M^R\rangle - 2\Re\left(\langle\psi|\hat{\psi}_M^R\rangle\right). \tag{A.10}$$

$|\hat{\psi}_M^R\rangle = RP_M P_S|\psi\rangle = RP_M P_S|\psi_M\rangle + RP_M P_S|\psi_M^\perp\rangle.$

$P_M|\psi_M\rangle = |\psi_M\rangle, \qquad P_S \equiv P_{mn}(r,N) = \langle s,m|P_S|s,n\rangle = \dfrac{\sqrt{\lambda_m\lambda_n}}{\hat{\lambda}_{n\ mod\ N}}\delta_{n,m\ mod\ N},$
$(m,n=0,\ldots,M).$

En la primera caja de la matriz (P_S) tenemos que $m=n$, por lo que obtenemos una matriz diagonal (R_M^{-1}) definida de la forma :

$$(P_S)_{1^{\text{a}}\text{ caja}} = (R_M^{-1}) \equiv \left(\frac{\lambda_n}{\hat{\lambda}_n}\delta_{mn}\right), \qquad (m,n=0,\ldots,M).$$

$$(P_S) = \left(\begin{array}{c|c} R_M^{-1} & * \\ \hline * & * \end{array}\right), \qquad (P_M) = \left(\begin{array}{c|c} I_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad (R) = \left(\begin{array}{c|c} R_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

I_M: Matriz identidad de orden M.

$$[R,P_M]=0, \qquad P_M P_S R P_M = P_M. \tag{A.11}$$

Es fácil demostrar las expresiones de (A.11) de la siguiente forma:

$$(R)(P_M) = \left(\begin{array}{c|c} R_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = (P_M)(R),$$
$$(P_M)(P_S)(R)(P_M) = \left(\begin{array}{c|c} I_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} R_M^{-1} & * \\ \hline * & * \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} R_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = P_M.$$

a) Utilizando las expresiones (A.11) podemos obtener:

$$\begin{aligned}\langle\hat{\psi}_M^R|\hat{\psi}_M^R\rangle &= \langle\psi_M|P_S P_M R^2 P_M P_S|\psi_M\rangle + \langle\psi_M^\perp|P_S P_M R^2 P_M P_S|\psi_M^\perp\rangle + \\ &+ 2\Re\left(\langle\psi_M|P_S P_M R^2 P_M P_S|\psi_M^\perp\rangle\right).\end{aligned}$$

$*$ $\langle\psi_M|P_S P_M R^2 P_M P_S|\psi_M\rangle = \langle\psi_M|P_M P_S R P_M R P_M P_S|\psi_M\rangle = \langle\psi_M|RP_M P_S|\psi_M\rangle.$

$*$ $2\Re\left(\langle\psi_M|P_S P_M R^2 P_M P_S|\psi_M^\perp\rangle\right) = 2\Re\left(\langle\psi_M|RP_M P_S|\psi_M^\perp\rangle\right).$

$$-2\Re\left(\langle\psi|\hat{\psi}_M^R\rangle\right) = -2\Re\left(\langle\psi|RP_M P_S|\psi\rangle\right) = -2\Re\left(\langle\psi_M|RP_M P_S|\psi_M\rangle\right) +$$

$$-2\Re\left(\langle\psi_M^\perp|RP_M P_S|\psi_M^\perp\rangle + \langle\psi_M^\perp|RP_M P_S|\psi_M\rangle + \langle\psi_M|RP_M P_S|\psi_M^\perp\rangle\right).$$

b) Sumando las expresiones desarrolladas de la ecuación (A.10) y considerando que $P_M|\psi_M^\perp\rangle = 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|\psi - \hat{\psi}_M^R\|^2 &= \langle\psi|\psi\rangle + \langle\psi_M|RP_MP_S|\psi_M\rangle + \langle\psi_M^\perp|P_SP_MR^2P_MP_S|\psi_M^\perp\rangle - \\
&\quad -2\Re\left(\langle\psi_M|RP_MP_S|\psi_M\rangle\right) = \\
&= \langle\psi|\psi\rangle - \langle\psi_M|P_SP_MR|\psi_M\rangle + \langle\psi_M^\perp|P_SP_MR^2P_MP_S|\psi_M^\perp\rangle = \\
&= \langle\psi|\psi\rangle - \langle\psi_M|\psi_M\rangle + \langle\psi_M^\perp|P_SP_MR^2P_MP_S|\psi_M^\perp\rangle = \\
&= \langle\psi_M^\perp|\psi_M^\perp\rangle + \langle\psi_M^\perp|P_SP_MR^2P_MP_S|\psi_M^\perp\rangle.
\end{aligned}$$

c) A partir de la definición de error:

$$\frac{\langle\psi|(I-P_M)|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \epsilon_N^2 \Longrightarrow \langle\psi|\psi_M^\perp\rangle = \langle\psi_M^\perp|\psi_M^\perp\rangle = \epsilon_N^2\langle\psi|\psi\rangle.$$

Al final tenemos el resultado que buscábamos

$$\frac{\|\psi - \hat{\psi}_M^R\|^2}{\|\psi\|^2} = \epsilon_N^2 + \frac{\langle\psi_M^\perp|P_SP_MR^2P_MP_S|\psi_M^\perp\rangle}{\|\psi\|^2}.$$

Ahora demostraremos la acotación. Definimos lo primero el operador $A \equiv RP_MP_S$.

$$\||\psi_M^\perp\rangle\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle\epsilon_N^2\ , \qquad A = \left(\begin{array}{c|c} I_M & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\langle\psi_M^\perp|A^*A|\psi_M^\perp\rangle = \|A|\psi_M^\perp\rangle\|^2 \leq \|A\|^2\||\psi_M^\perp\rangle\|^2. \tag{A.12}$$

La norma de un operador lineal acotado se define como:

$$\|A\| = \sup_{|\psi\rangle\in\mathcal{H}}\left(\frac{\|A|\psi\rangle\|}{\||\psi\rangle\|}\right).$$

Se puede demostrar fácilmente[4] que: $\|A\| \leq \|R\|\|P_M\|\|P_S\|$.

Definimos una delta de Kronëcker especial de la forma:

$$\delta_{0\leq n\leq M} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{si} \quad n > M \end{cases}.$$

[4]Sean dos operadores lineales acotados A y B.

$$\|AB\| = \sup_{|\psi\rangle\in\mathcal{H}}\left(\frac{\|A(B|\psi\rangle)\|}{\||\psi\rangle\|}\right) \leq \|A\| \sup_{|\psi\rangle\in\mathcal{H}}\left(\frac{\|B|\psi\rangle\|}{\||\psi\rangle\|}\right) = \|A\|\|B\|.$$

De forma análoga se puede demostrar para el producto de tres operadores acotados lineales.

$$R|\psi\rangle = \lambda_R|\psi\rangle \Longrightarrow \|R\| = \sup(\lambda_R) = 1 + \nu_0(r, N).$$
$$\lambda_R = \left\{ \frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_n} \delta_{0\leq n\leq M} \right\} = \{1 + \nu_n(r, N)\}_{0\leq n\leq M} .$$

$$P_M|\psi\rangle = \lambda_M|\psi\rangle,\ \lambda_M = \delta_{0\leq n\leq M} \Longrightarrow \|P_M\| = 1.$$

A partir de (4.15), y si utilizamos la norma infinita, $\|P_S\|_\infty = 1$, es fácil de ver

$$1 + \nu_n = \frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{n+qN},$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_{n+uN}\lambda_n}}{\sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{n+qN}} = \sqrt{\frac{\lambda_{n+uN}}{\lambda_n}} \frac{1}{1 + \nu_n} \leq 1.$$

A.3. Demostraciones del grupo de Heisenberg-Weyl

DHW1: Los elementos de matriz de $\mathcal{T}$ son:

$$\mathcal{T}_{kn} = \langle z_k|n\rangle = e^{-p/2} \frac{p^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{-2\pi ikn/N} \equiv \sqrt{\lambda_n} \mathcal{F}_{kn} \tag{A.13}$$

donde $\mathcal{F}$ expresa la matriz rectangular de Fourier (Ver Apéndice C.1)

$$\mathcal{F}_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i2\pi kn/N}, \quad (k = 0, \ldots, N-1),\ (n = 0, \ldots, M).$$

Entonces, los elementos de matriz del *operador resolución* será

$$\mathcal{A}_{nm} \equiv \langle n|\mathcal{A}|m\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{T}^*_{nk} \mathcal{T}_{km} = \sqrt{\lambda_n\lambda_m} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}^*_{nk} \mathcal{F}_{km} = \lambda_n \delta_{nm}.$$

Hemos usado las relaciones de ortogonalidad de las matrices rectangulares de Fourier (RFM). Ver apéndice C.1 y la expresión de ortogonalidad (A.1), y el hecho de que $N > M$. Como $\mathcal{A}$ es diagonal, con elementos en la diagonal $\lambda_n \neq 0$, entonces es invertible, y podemos construir un *frame dual* y la pseudoinversa por la izquierda de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_l^+ \equiv \mathcal{A}^{-1}\mathcal{T}^*$, que nos daría una *resolución de la identidad* como en la ecuación (2.9).

DHW2: De la *Resolución de la identidad* (5.19), podemos escribir para cualquier $\psi \in \mathcal{H}^M$ como

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k |\tilde{z}_k\rangle, \qquad \text{y por lo tanto, } \Psi(z) = \langle z|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k \langle z|\tilde{z}_k\rangle.$$

A partir de $|\tilde{z}_k\rangle = \mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle$, $\mathcal{A}|n\rangle = \lambda_n|n\rangle$, y de la expresión

$$|z_k\rangle = e^{-p/2}\sum_{n=0}^{M}\frac{p^{n/2}e^{2\pi ikn/N}}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{M}\sqrt{\lambda_n}e^{2\pi ikn/N}|n\rangle, \tag{A.14}$$

obtenemos que

$$\langle z|\tilde{z}_k\rangle = \langle z|\mathcal{A}^{-1}|z_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{M}\lambda_n^{-1/2}e^{2\pi ikn/N}\langle z|n\rangle,$$

y utilizando la expresión (5.12) y la definición (5.18) de λ_m, obtenemos

$$\langle z|\tilde{z}_k\rangle = \Xi_k(z).$$

DHW3: A partir de (5.24), se observa fácilmente que

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 = 1 \Longrightarrow \epsilon_N^2(\zeta) = 1 - \sum_{n=0}^{M}|a_n|^2.$$

$$\Gamma(a,x) = \int_x^{\infty} e^{-t}t^{a-1}dt, \quad \Gamma(n,x) = (n-1)!\, e^{-x}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!} \quad (n=1,2,\ldots), \quad \Gamma(N) = (N-1)!$$

$\Gamma(n,x)$: Funciones de Gamma incompletas[5].

Cuando N es muy grande, tenemos que a partir de

$$\Gamma(N,|\zeta|^2) = \int_{|\zeta|^2}^{\infty} e^{-t}t^{N-1}dt,$$

se deduce fácilmente que

$$\begin{array}{l} |\zeta|^2 > N \longrightarrow \Gamma(N,|\zeta|^2) \simeq 0, \\ |\zeta|^2 < N \longrightarrow \Gamma(N,|\zeta|^2) \simeq 1. \end{array}$$

DHW4: A partir de las expresiones (A.8) y (2.10) y viendo que:

$$\langle z|z_l\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle z|n\rangle\langle n|z_l\rangle$$

y utilizando (2.11), y la expresión (5.12), y la relación de ortogonalidad (A.1), podemos

[5] Ver [8], p.602,620.

obtener (5.28):

$$\begin{aligned}
L_k(z) &= \langle z|\tilde{z}_k\rangle = \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{B}_{lk}^{-1}\langle z|z_l\rangle = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}e^{2\pi ij(k-l)/N}\langle z|z_l\rangle = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}e^{2\pi ij(k-l)/N}\sum_{m=0}^{\infty}\langle z|m\rangle\langle m|z_l\rangle = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}e^{2\pi ij(k-l)/N}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-(z\bar{z}+z_k\bar{z}_k)/2}\frac{1}{m!}\bar{z}^m z_l^m = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-(z\bar{z}+z_k\bar{z}_k)/2}\frac{1}{m!}\bar{z}^m e^{2\pi il(m-j)/N}z_k^j p^{(m-j)/2} = \\
&= e^{-(z\bar{z}+z_k\bar{z}_k)/2}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\bar{z}^m\delta_{m,j\ mod\ N}z_k^j p^{(m-j)/2} = \\
&= e^{-(z\bar{z}+z_k\bar{z}_k)/2}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\bar{z}^{j+qN}}{(j+qN)!}z_k^j p^{qN/2} = \\
&= e^{-(z\bar{z}+z_k\bar{z}_k)/2}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}\sum_{q=0}^{\infty}\lambda_{j+qN}p^{-(j+qN)}\bar{z}^{j+qN}z_k^j p^{qN/2} = \\
&= e^{-(z\bar{z}+z_k\bar{z}_k)/2}\sum_{j=0}^{N-1}\hat{\lambda}_j^{-1}\sum_{q=0}^{\infty}\lambda_{j+qN}(\overline{zz_k^{-1}})^{j+qN}
\end{aligned}$$

Hemos utilizado que

$$p = j + qN \quad (q \in \mathbb{N}^*), \quad U_n(z) = \langle n|z\rangle = e^{-z\langle z|/2}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad \lambda_m = \frac{Ne^{-p}}{m!}p^m.$$

$$e^{2\pi ij(k-l)/N}z_l^m = e^{2\pi il(m-j)/N}z_k^j p^{(m-j)/2}.$$

$$z_k^j = p^j(\bar{z}_k)^{-j}, \quad p^{-qN/2}(\bar{z}_k)^{-j} = p^{-j/2}e^{2\pi ijk/N}p^{-qN/2} = (\bar{z}_k)^{-(j+qN)},$$

$$p^{-(j+qN)}(\bar{z})^{j+qN}z_k^j p^{qN/2} = p^{-qN/2}(\bar{z})^{j+qN}(\bar{z}_k)^{-j} = (\bar{z})^{j+qN}(\bar{z}_k)^{-(j+qN)} = (\overline{zz_k^{-1}})^{j+qN}.$$

La demostración de la parte del error es idéntica a la realizada en la demostración DS12.

DHW5: Esta demostración es análoga a la de (DS14). Aquí utilizamos

$$\nu_0(p,N)=\sum_{u=1}^{\infty}p^{uN}\frac{1}{(uN)!},\quad a_u\equiv\frac{1}{(uN)!}p^{(uN)},$$

$$\frac{a_{u+1}}{a_u}=p^N\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{j+uN}\equiv p^N h(u).$$

$$p_0=\left(\tfrac{(2N)!}{N!}\right)^{1/N}\simeq\tfrac{N}{e}2^{2+1/(2N)}=\tfrac{4N}{e}\left[1+\tfrac{\ln 2}{2N}+O\left(\tfrac{1}{N^2}\right)\right].$$

Y ahora para acotar $\nu_0(p,N)$, tenemos

$$\frac{1}{(2N)!}p^{2N}\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2N)^{-(2N+1/2)}e^{2N}p^{2N}=O(N^{-2N-1/2}).$$

DHW6:

$$P_M(p)\equiv\langle z_k|P_M|z_k\rangle=\sum_{m=0}^{M}\mathcal{T}_{km}\mathcal{T}^*_{mk}=e^{-p}\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{m!}p^m,$$

$$\frac{dP_M(p)}{dp}=-e^{-p}\frac{p^M}{M!}=-Q_M(p).$$

$Q_M(p)$ es una distribución de Erlang-$M+1$ (distribución gamma para un entero M), con valor promedio $p_c\equiv\int_0^\infty pQ_M(p)dp=M+1$ y variancia $\sigma_c^2=\int_0^\infty(p-p_c)^2Q_M(p)dp=M+1$. La distribución de Erlang-$M+1$ converge a la distribución Normal $\mathcal{N}(p_c,\sigma_c^2)$ para valores grandes de M. Además, se sabe que la distribución Delta de Dirac δ es el límite de la gaussiana $\delta(x-\mu)=\lim_{\sigma\longrightarrow 0}\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Esto implica que $\mathcal{N}(p_c,\sigma_c^2)\simeq\frac{1}{p_c}\delta\left(\frac{p-p_c}{p_c}\right)$ para valores grandes de M, que significa que $P_M(p)$ se aproxima a la función de Heaviside para M grandes. A esto se le llama *droplet* en el estudio del efecto Hall cuántico (ver [66] para una demostración alternativa en este contexto).

Apéndice B

Pseudoinversa y mínimos cuadrados

B.1. Pseudoinversa Moore-Penrose

La pseudoinversa A^+ de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es una generalización de la matriz inversa. Se utiliza normalmente en la resolución por mínimos cuadrados de sistemas de ecuaciones.

Definición B.1 (Pseudoinversa).
La pseudoinversa A^+ de una matriz, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define como la única matriz que satisface las cuatro condiciones siguientes:

1. $AA^+A = A$ *(AA^+ no tiene porque ser la matriz identidad).*
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(AA^+)^* = AA^+$ *(AA^+ es hermítica).*
4. $(A^+A)^* = A^+A$ *(A^+A es hermítica).*

donde M^* es la hermítica y traspuesta (adjunta) de una matriz M. Para matrices cuyos elementos sean reales tenemos que $M^* = M^t$.

Proposición B.1.

- *La pseudoinversa existe y es única para cualquier matriz A, es decir, existe una matriz A^+ que satisface las cuatro condiciones de la definición. Si A tiene coeficientes reales entonces A^+ también los tiene.*
- *Si la matriz A es invertible, la pseudoinversa y la inversa coinciden: $A^+ = A^{-1}$.*
- *La pseudoinversa de la matriz cero es su traspuesta.*
- *La pseudoinversa de la pseudoinversa es la matriz original: $(A^+)^+ = A$.*
- $(A^t)^+ = (A^+)^t$.
- $\bar{A}^+ = \overline{A^+}$.

- $(A^*)^+ = (A^+)^*$.
- $(\alpha A)^+ = \alpha^{-1}A^+, \ \forall \alpha \neq 0$.

NOTA:

El *rango-colummna* de una matriz A es el número máximo de columnas linealmente independientes de A. Y el *rango-fila* es el número máximo de filas linealmente independientes de A.

El rango de una matriz $m \times n$ es como mucho el $min(m, n)$. Una matriz que tiene como rango el máximo posible se dice que tiene *rango-completo*, en caso contrario es *rango-deficiente*.

- Si A y B son matrices tal que AB está definido, y A tiene sus columnas ortonormales ($A^*A = I$), o B tiene sus filas ortonormales ($BB^* = I$) o A es de *rango-columna completo*, y B es de *rango-fila completo*, entonces
$$(AB)^+ = B^+A^+ \ .$$
- AA^+ es el proyector ortogonal en el rango de A (El espacio expandido con los vectores columnas de A).
- Si la pseudoinversa de A^*A se conoce, entonces podemos obtener A^+ de la forma:
$$A^+ = (A^*A)^+A^* \ , \qquad A^+ = A^*(AA^*)^+ \ .$$
- **Identidades**
  - $A^+ = A^+(A^+)^*A^*$.
  - $A^+ = A^*(A^+)^*A^+$.
  - $A = (A^+)^*A^*A$.
  - $A = AA^*(A^+)^*$.
  - $A^* = A^*AA^+$.
  - $A^* = A^+AA^*$.
- Si A tiene columnas ortonormales ($A^*A = I$) o filas ortonormales ($AA^* = I$), entonces
$$A^+ = A^* \ .$$
- Si las columnas de A son linealmente independientes, entonces A^*A es invertible. En este caso, tenemos
$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* \ ,$$
entonces se sigue que A^+ es la inversa por la izquierda de A : $A^+A = I$.
- Si las filas de A son linealmente independientes, entonces AA^* es invertible. En este caso, tenemos
$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} \ .$$
Se sigue que A^+ es una inversa por la derecha de A : $AA^+ = I$.

- Si las columnas y filas son linealmente independientes (eso ocurre en las matrices regulares cuadradas), la pseudoinversa es justo la inversa

$$A^+ = A^{-1} .$$

- Es posible definir la pseudoinversa para escalares y vectores. Si x es un escalar

$$x^+ \equiv \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^{-1} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases} .$$

Si x es un vector

$$x^+ \equiv \begin{cases} 0^t & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{x^*}{x^* x} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases} .$$

- **Matrices circulantes**
Si C es una matriz circulante, y $\mathcal{F}$ la matriz Fourier, entonces

$$C = \mathcal{F}\Sigma\mathcal{F}^* , \qquad C^+ = \mathcal{F}\Sigma^+\mathcal{F}^* .$$

- **La pseudoinversa de una matriz**
Vamos a utilizar la inversa de matrices regulares. Sea k el rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces A puede ser descompuesto como $A = BC$, donde B es una matriz $m \times k$ y C es una matriz $k \times n$. Entonces

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* .$$

Si A tiene el máximo rango por filas, así que $k = m$, entonces B puede escogerse como la matriz identidad, y esta expresión se reduce a

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} .$$

Similarmente, si A tiene el máximo rango por columnas (es decir, $k = n$), tenemos

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* .$$

B.2. Problema de los mínimos cuadrados

Consideremos un sistema *sobre-determinado*

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\beta_j = y_i , \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) ,$$

m ecuaciones lineales, y n coeficientes desconocidos $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ como $m > n$, escrito en forma matricial, tenemos

$$X\beta = y ,$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{pmatrix} , \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} , \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} .$$

Sea el conjunto de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ tomados de forma experimental, y una función modelo $y = f(x, \beta)$, con $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Debemos encontrar los parámetros β_j con $(j = 1, \dots, n)$, tal que la función modelo se minimice

$$f(x, \beta) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \phi_j(x) ,$$

donde ϕ_j puede ser no lineal con respecto a la variable x.

Con $y_i = f(x_i, \beta)$, $\forall i = 1, \dots, m$. Existen más puntos que parámetros a determinar. Por lo cual, como esto no es posible en la práctica, escogeremos los valores de los β_j tal que hagamos mínimas los valores posibles de la suma de cuadrados de las diferencias

$$r_i(\beta) = y_i - f(x_i, \beta) , \qquad (i = 1, 2, \dots, m) .$$

Hay que minimizar $S(\beta)$:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{m} r_i^2(\beta) ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 2 \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} = 0 , \qquad (j = 1, 2, \dots, n) ,$$

como

$$r_i = y_i - \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \beta_j , \qquad f(x_i, \beta) = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \beta_j ,$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} = - \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \frac{\partial \beta_k}{\partial \beta_j} = - \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \delta_{kj} = -X_{ij} ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = -2 \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \beta_k \right) X_{ij} = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} X_{ij} X_{ik} \beta_k , \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

En forma matricial

$$(X^t X) \beta = X^t y.$$

La solución algebraica de esta ecuación es

$$\beta = (X^t X)^{-1} X^t y \equiv X^+ y ,$$

donde X^+ es la pseudoinversa de Moore-Penrose de X.

Apéndice C

Matrices rectangulares de Fourier y circulantes

C.1. Matrices Rectangulares de Fourier

Sea $N, M \in \mathbb{N}$, y sea $\mathcal{F}_{NM} \in \mathcal{M}_{N\times M}$:

$$(\mathcal{F}_{NM})_{nm} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i2\pi nm/N} \ , \ (n = 0, 1, \ldots, N-1) \ , \ (m = 0, 1, \ldots, M-1) \ .$$

Estas matrices se denominan **Matrices de Fourier Rectángulares (RFM)**.

Para $N = M$, tenemos las matrices de Fourier *standard* $\mathcal{F}_N$. Se van a estudiar las propiedades de estas matrices en los casos: $N > M$ y $N < M$.

C.1.1. Caso $N > M$ (*sobre-muestreo*)

Sea $i_{NM} : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^N$ (**inclusión**)

$$i_{NM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_M \\ 0 \end{pmatrix}_{N\times M} , \qquad i_{NM}\, x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}_{N\times 1} , \quad (\forall x \in \mathbb{C}^M) \ .$$

Incluye un vector $x \in \mathbb{C}^M$ en las M primeras filas de un vector de $\mathbb{C}^N$, el resto son ceros.

Sea $p_{MN} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^M$ (**proyección**),

$$p_{MN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_M & | & 0 \end{pmatrix}_{M\times N} , \qquad p_{MN}\, x = \begin{pmatrix} x_M \end{pmatrix}_{M\times 1} , \quad \forall x \in \mathbb{C}^N \ .$$

$$x_M = (x_1, \dots, x_M)^t, \qquad x \in \mathbb{C}^N, \qquad x \equiv (x_1, \dots x_M, \dots, x_N)^t \,.$$

Proyecta un vector $x \in \mathbb{C}^N$, en un vector de $\mathbb{C}^M$, que tiene los M primeros componentes de x.

$$\boxed{p_{MN} = (i_{NM})^*}\,, \quad \boxed{p_{MN} i_{NM} = I_M}\,, \quad \boxed{i_{NM} p_{MN} = P_M \equiv \begin{pmatrix} I_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{N\times N}}\,.$$

Dadas las matrices cuadradas A, B actuando sobre $\mathbb{C}^N$ y $\mathbb{C}^M$, respectivamente. Definimos las matrices cuadradas $A^{\downarrow}$ y $B^{\uparrow}$ como:

La matriz $\boxed{A^{\downarrow} = p_{MN} A i_{NM}}$, $\qquad (A \in \mathcal{M}_{N\times N},\ B \in \mathcal{M}_{M\times M})$.

La matriz $A^{\downarrow}$, trunca la matriz $A \in \mathcal{M}_{N\times N}$ en una matriz $M \times M$

$$A^{\downarrow} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & \dots & A_{MM} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1M} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{M1} & \dots & \mathbf{A}_{MM} & \dots & A_{MN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{MN} & \dots & A_{NM} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$\boxed{B^{\uparrow} = i_{NM}\ B\ p_{MN} \equiv \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{N\times N}}\,, \quad P_M = (I_M)^{\uparrow}\,.$$

Proposición C.1.
*Matrices de Fourier rectangulares (**RFM**).*

(a) $\mathcal{F}_{NM} = \mathcal{F}_N\, i_{NM}, \qquad \mathcal{F}^*_{NM} = p_{MN} \mathcal{F}^*_N\,.$

(b) $\mathcal{F}^*_{NM} \mathcal{F}_{NM} = I_M, \qquad \mathcal{F}_{NM} \mathcal{F}^*_{NM} = \mathcal{F}_N\, P_M\, \mathcal{F}^*_N\,.$

C.1.2. Caso $N < M$ (submuestreo)

$$\boxed{p_{NM} i_{MN} = I_N}\,, \quad \boxed{i_{MN} p_{NM} = P_N \equiv \left(\begin{array}{c|c} I_N & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{N\times N} = (I_N)^{\uparrow}}\,.$$

$$\mathcal{F}_{NM} = \left(\mathcal{F}_N \,\middle|\, \mathcal{F}_N \,\middle|\, \overset{q \text{ veces}}{\dots} \,\middle|\, \mathcal{F}_N \,\middle|\, \mathcal{F}_{Np} \right), \tag{C.1}$$

$$\mathcal{F}^*_{NM} = \left(\begin{array}{c} \mathcal{F}^*_N \\ \hline \mathcal{F}^*_N \\ \hline \vdots \text{ q veces} \\ \hline \mathcal{F}^*_N \\ \hline \mathcal{F}^*_{Np} \end{array}\right). \tag{C.2}$$

$$p = M \; mod \, N, \quad q = M \; div \, N \; ,$$

p es el resto de M/N, y q es el cociente de M/N. Es decir, $p = M - qN$ ($q \in \mathbb{N}^*$).

Sea $\bar{M}$ el múltiplo más pequeño de N que es mayor o igual a M.

$$\bar{M} = Min\,\{\bar{q}N: \; \bar{q}N \geq M\}\,, \quad \bar{q} = Ceiling(M/N)\;.$$

$$\boxed{\bar{q} = Ceiling(M/N) = \left\{ \begin{array}{ll} q & p = 0 \\ q+1 & p \neq 0 \end{array} \right. .}$$

$$\mathcal{F}_{N\bar{M}} = \left(\; \mathcal{F}_N \; \middle| \; \mathcal{F}_N \; \middle| \; \overset{\bar{q} \text{ veces}}{\ldots} \; \middle| \; \mathcal{F}_N \; \right) \; . \tag{C.3}$$

Proposición C.2.

(a) $\mathcal{F}_{NM} = \mathcal{F}_{N\bar{M}}\, i_{\bar{M}M}, \qquad \mathcal{F}^*_{NM} = p_{M\bar{M}} \mathcal{F}^*_{N\bar{M}}\;.$

(b) $\mathcal{F}_{NM}\mathcal{F}^*_{NM} = q\; I_N + \mathcal{F}_N\; P_p\; \mathcal{F}^*_N\;, \qquad \mathcal{F}^*_{NM}\mathcal{F}_{NM} = (\hat{I}_{\bar{M}})^{\downarrow} \equiv \hat{I}_M\;,$

donde

$$\hat{I}_{\bar{M}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_N & I_N & \overset{\bar{q}\text{ times}}{\ldots} & I_N \\ \hline I_N & I_N & \ldots & I_N \\ \hline \vdots \; \bar{q} \text{ times} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline I_N & I_N & \ldots & I_N \end{array} \right)_{\bar{M} \times \bar{M}} .$$

C.2. Matrices circulantes

El operador *overlapping kernel* $\mathcal{B}$ tiene estructura de matriz circulante

$$\mathcal{B}_{kl} = \langle z_k | z_l \rangle = \frac{1}{2^{2s}} \left(1 + e^{2\pi i(l-k)/N}\right)^{2s} = \mathcal{C}_{l-k}, \quad (k,l = 0, \ldots, N-1), \tag{C.4}$$

donde $\mathcal{C}_n = \frac{1}{2^{2s}} \left(1 + e^{2\pi i n/N}\right)^{2s}$.

$$\mathcal{B} = \mathrm{circ}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{N-1}) = \left(\begin{array}{cccc} \mathcal{C}_0 & \mathcal{C}_1 & \ldots & \mathcal{C}_{N-1} \\ \mathcal{C}_{N-1} & \mathcal{C}_0 & \ldots & \mathcal{C}_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \ldots & \mathcal{C}_0 \end{array} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathcal{C}_j \Pi^j \equiv P_c(\Pi), \tag{C.5}$$

donde

$$\Pi = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right), \qquad (\Pi^N = I_N, \quad \Pi^t = \Pi^* = \Pi^{-1} = \Pi^{N-1}).$$

Π es la matriz generatriz de las matrices circulantes, y $P_c(t)$ el polinomio representativo de la circulante.

- Cada matriz circulante es diagonalizable, cuyos autovectores son las columnas de la matriz de Vandermonde

$$V_N = V(z_0, \ldots, z_{N-1}) = \sqrt{N}\mathcal{F}^* \ ,$$

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_k &= P_c(\bar{z}_k) = \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{C}_l z_k^{-l} = 2^{-(2s)} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{2s} \tbinom{2s}{n} e^{2\pi i l n/N} e^{-2\pi i k l/N} = \\ &= \tfrac{N}{2^{2s}} \sum_{l=0}^{\bar{q}-1} \tbinom{2s}{k+lN}, \quad (k = 0, \ldots, N-1) \ .\end{aligned}$$

Para $N \leq 2s+1$, aparecen más términos.

Hemos usado $\bar{z}_k$ en vez de z_k en el polinomio P_c para obtener la factorización $\mathcal{B} = \mathcal{F}_N \ D \ \mathcal{F}_N^*$ en vez de la factorización $\mathcal{B} = \mathcal{F}_N^* \ D' \mathcal{F}_N$, donde los autovalores van en orden inverso con respecto a D.

$\bar{q}$ es el *Ceiling* $((2s+1)/N)$. Es fácil probar que $\mathcal{B} = \mathcal{F}_N \ \hat{D} \ \mathcal{F}_N^*$, donde

$$\hat{D} = diag(\hat{\lambda}_0, \ldots, \hat{\lambda}_{N-1}) \ .$$

Demostración: Si utilizamos la relación de ortogonalidad (A.1)

$$\hat{\lambda}_k = 2^{-2s} \sum_{n=0}^{2s} \binom{2s}{n} \sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i l(n-k)/N} = 2^{-2s} N \sum_{n=0}^{2s} \binom{2s}{n} \delta_{n=k \ modN} = N 2^{-2s} \sum_{l=0}^{\bar{q}-1} \binom{2s}{k+lN} \ , \quad (k = 0, \ldots, N-1) \ .$$

Esto se puede ver a partir de

$$\bar{q} = Ceiling\left(\frac{2s+1}{N}\right), \qquad N \leq 2s+1 \ .$$

$n = \{k, k+N, k+2N, \ldots, (N-1)+\bar{q}N\}$, con $k = 0, \ldots, N-1$; de tal forma que $N-1+lN \leq 2s$,

$$(l+1) \leq \frac{2s+1}{N} \leq Ceiling\left(\frac{2s+1}{N}\right) \equiv \bar{q} \Longrightarrow \ l \leq \bar{q}-1 \ .$$

$\blacksquare$

Apéndice D

Operador fase

Una forma de definir el operador de fase Θ fue dada por Dirac [57] a través de una descomposición del operador *destrucción*[1]

$$a \equiv e^{i\Theta}\sqrt{\mathcal{N}}, \qquad a^\dagger \equiv \sqrt{\mathcal{N}}e^{-i\Theta}.$$

$$\mathcal{N}|n\rangle = n|n\rangle, \qquad e^{i\Theta}|n\rangle = |n-1\rangle, \qquad \langle n|e^{i\Theta}|n\rangle = 0. \tag{D.1}$$

Esta definición presenta ciertas dificultades como se puede ver en [58] (ver también [59]). De hecho, uno puedo probar que[2]:

$$e^{i\Theta}e^{-i\Theta} = 1, \;\; e^{-i\Theta}e^{i\Theta} = 1 - |0\rangle\langle 0|,$$

que significa que $e^{i\Theta}$ no es unitario, es decir, Θ no es hermítico.

La dificultad de definir un operador fase hermítico fue resuelto en [60, 61]. Los estados de fase se pueden definir ahora de la forma:

$$|\theta\rangle = \lim_{M\to\infty}(M+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{M} e^{in\theta}|n\rangle,$$

[1] $a^\dagger$ es el operador adjunto del operador *destrucción*, es decir, el operador *creación*. Además, se demuestra fácilmente (D.1) de la forma:

$$e^{i\Theta}|n\rangle = a\mathcal{N}^{-1/2}|n\rangle = |n-1\rangle.$$

Y también podemos ver

$$e^{-i\Theta}e^{i\Theta}|n\rangle = (1 - |0\rangle\langle 0|)|n\rangle = |n\rangle - |0\rangle\delta_{n0}.$$

[2] A partir de $e^{i\Theta} = a\mathcal{N}^{-1/2}$ y $e^{-i\Theta} = \mathcal{N}^{-1/2}a^\dagger$ tenemos

$$e^{i\Theta}e^{-i\Theta}|n\rangle = a\mathcal{N}^{-1}a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}a\mathcal{N}^{-1}|n+1\rangle = |n\rangle$$

para cualquier estado $|n\rangle$. Y por el otro lado, tenemos

$$e^{-i\Theta}e^{i\Theta}|n\rangle = \mathcal{N}^{-1/2}a^\dagger a\mathcal{N}^{-1/2}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{N}^{-1/2}a^\dagger a|n\rangle = |n\rangle$$

para cualquier estado $|n\rangle \neq 0$.

Si trabajamos con un M finito, los estados de fase $|\theta_k\rangle$ con

$$\theta_k = \theta_0 + \frac{2\pi k}{M+1}$$

(para un θ_0 arbitrario) constituye una base ortonormal[3] de $\mathcal{H}_M$. El operador de fase hermítico se define simplemente como

$$\Theta \equiv \sum_{k=0}^{M} \theta_k |\theta_k\rangle\langle\theta_k|.$$

Estos estados no son *físicos*, en el sentido que en el límite, cuando $M \to \infty$, su número de partículas tiende a infinito [61].

3 $$\langle\theta_k|\theta_l\rangle = \lim_{M\longrightarrow\infty} \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^{M} e^{in(\theta_l-\theta_k)} = \lim_{M\longrightarrow\infty} \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^{M} e^{2\pi in(l-k)/(M+1)} = \delta_{lk}.$$

Bibliografía

[1] M. Calixto, J. Guerrero, y J.C. Sánchez-Monreal. *Sampling Theorem and Discrete Fourier Transform on the Riemann Sphere.* Journal of Fourier Analysis and Applications **14** (2008) 538-567.

[2] M. Calixto, J. Guerrero, y J.C. Sánchez-Monreal. *Sampling Theorem and Discrete Fourier Transform on the Hyperboloid.* Journal of Fourier Analysis and Applications **17** (2011) 240-264.

[3] M. Calixto, J. Guerrero and J.C. Sánchez-Monreal. *Almost complete coherent state subsystems and partial reconstruction of wavefunctions in the Fock-Bargmann phase-number representation .* Journal of Physics A (Mathematical & Theoretical) **45** (2012) 244029 (20pp)

[4] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Editorial Academic Press. Second Edition. 1999.

[5] A. Perelomov. *Generalized Coherent States and Their Applications.* Springer-Verlag. 1986.

[6] Sury, B. *Sum of the reciprocals of the binomial coefficients.* Eur. J. comb. **14**, 351-353 (1993).

[7] Lorenzo Abellanas, Alberto Galindo. *Espacios de Hilbert.* EudemaUniversidad/Manuales. 1987.

[8] George B. Arfken, Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists.* International Edition. Academic Press. 1995.

[9] Driscoll, J.R., Healy, D. *Computing Fourier transforms and convolutions on the 2-sphere.* Proc. 34th IEEE FOCS, (1989) 344-349; Adv. in Appl. Math., **15** (1994), 202-250.

[10] Driscoll, J.R., Healy, D. Adv. Appl. Math, **15**,202-250 (1994)

[11] Wigner, E.P. *Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic spectra.* Academic Press, New York (1959)

[12] Arnold F. Nikiforov, Vasilii B. Uvarov. *Special Functions of Mathematical Physics.* Birkhäuser, 1988.

[13] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover publications, INC. New York. 1972.

[14] J. W. Cooley and J.W Tukey. *An algorithm for machine calculation of complex Fourier series.* Math. Comp. **19** (1965), 297-301.

[15] P. Diaconis and D. Rockmore. *Efficient Computation of the Fourier Transform on Finite Groups.* Journal of the American Mathematical Society, **3** (1990) 297-332.

[16] D. Maslen and D. Rockmore. *Generalized FFTs – A survey of some recent results.* Proc. 1995 DIMACS Workshop in Groups and Computation, L. Finkelstein and W. Kantor (eds.), Dimacs Series in Disc. Math. and Comp. Sci, Vol. 28, 183-238.

[17] D. Rockmore. *Some applications of generalized FFTs.* Proc. 1995 DIMACS Workshop in Groups and Computation, L. Finkelstein and W. Kantor (eds.), Dimacs Series in Disc. Math. and Comp. Sci, Vol. 28, 329-370.

[18] D. Healy Jr., D. Rockmore, P. Kostelec and S. Moore. *FFTs for the 2-Sphere - Improvements and Variations.* Journal of Fourier Analysis and Applications **9** (2003), 341 - 385.

[19] E. Majorana. *Atomi orientati in campo magnetico variabile.* Nuovo Cimento **9** (1932) 43 - 50.

[20] M.R. Dennis. *Canonical representation of spherical functions: Sylvester's theorem, Maxwell's multipoles and Majorana's sphere.* J. Phys. **A37** (2004) 9487-9500.

[21] V. Bargmann. *On the Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform.* Comm. Pure. Appl. Math. **14** (1961) 187.

[22] J.R. Klauder and Bo-Sture Skagerstam. *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics.* World Scientific (1985).

[23] P.J. Davis. *Circulant Matrices.* Chelsea Publishing, NY (1994).

[24] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville. *Generalized Inverses.* Springer-Verlag (2003).

[25] M. Holschneider. *Wavelets: an analysis tool.* Oxford University Press (1998).

[26] S.T. Ali, J.P. Antoine, J.P. Gazeau. *Coherent States, Wavelets and Their Generalizations.* Springer (2000).

[27] M. Calixto and J. Guerrero. *Wavelet transform on the circle and the real line: a unified group-theoretical treatment.* Appl. Comput. Harmon. Anal. **21** (2006) 204-229.

[28] J. Guerrero and V. Aldaya. *Invariant Measures on Polarized submanifolds in Group Quantization.* J. Math. Phys. **41** (2000), 6747-6765.

[29] A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul. *Transforms associated to square integrable group representations I. General results.* J. Math. Phys. **26** (1985) 2473-2479.

[30] M. Daoud and A. Jellal. *Quantum Hall Droplets on Disk and Effective Weiss-Zumino-Witten Action for Edge States.*International Journal of Geometric Methods in Modern Physics **4** (2007), 1187-1204.

[31] H. Führ. *Abstract Harmonic Analysis of Continuous Wavelet Transforms.*Springer (2005).

[32] D. Maslen. *Efficient computation of Fourier transforms on compact groups.*Journal of Fourier Analysis and Applications **4** (1998), 19-52.

[33] D. Maslen. *Sampling of functions and sections for compact Groups.* Modern Signal Processing **46** (2003), 247-280.

[34] I. Pesenson. *A sampling theorem on homogeneous manifolds.*Trans. Am. Math. Soc. **352** (2000), 4257-4269.

[35] I. Pesenson. *Poincaré-type inequalities and reconstruction of Paley-Wiener functions on manifolds*J. Geom. Anal. **14** (2004), 101-121.

[36] H. Feichtinger, I. Pesenson. *A reconstruction method for band-limited signals on the hyperbolic plane.*Sampl. Theory Signal Image Process. **4** (2005), 107-119.

[37] I. Pesenson. *Deconvolution of band limited functions on non-compact symmetric spaces.*Houst. J. Math. **32** (2006), 183-204.

[38] M. Ebata, M. Eguchi, S. Koizumi, K. Kumahara. *On sampling formulas on symmetric spaces.*J. Fourier Anal. Appl. **12** (2006), 1-15.

[39] M. Ebata, M. Eguchi, S. Koizumi, K. Kumahara. *Analogues of sampling theorems for some homogeneous spaces.*Hiroshima Math. J. **36** (2006), 125-140.

[40] I. Pesenson. *Paley-Wiener Approximations and Multiscale Approximations in Sobolev and Besov Spaces on Manifolds.*J. Geom. Anal. **19** (2009), 390-419.

[41] M. B. Stenzel. *A Reconstruction Theorem for Riemannian Symmetric Spaces of Non-compact Type.*J. Fourier Anal. Appl. **15** (2009), 839-856.

[42] A. Kyatkin and G.S. Chirikjian. *Algorithms for fast convolutions on motion groups.*Applied and Computational Harmonic Analysis **9** (2000), 220-241.

[43] G.S. Chirikjian and A. Kyatkin. *Engineering applications of noncommutative harmonic analysis.*CRC Press (2001).

[44] A. Kyatkin and G.S. Chirikjian. *Computation of robot configuration and workspaces via the Fourier transform on the discrete motion-group.*International Journal of Robotics Research **18** (1999), 601-615.

[45] J-P. Antoine and A.L. Hohouto. *Discrete frames of Poincaré coherent states in 1+3 dimensions.* Journal of Fourier Analysis and Applications **9** (2003), 141-173.

[46] A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul. *Transforms associated to square integrable group representations I. General results.*J. Math. Phys. **26** (1985) 2473-2479.

[47] O. Christensen. *An introduction to Frames and Riesz Bases.*Birkhäuser, Biston (2003).

[48] Perelomov A.M.: Commun. Math. Phys. **21**, 41 (1971).

[49] Vilenkin N. Ya.: *Special Functions and Theory of Group Representations.*(Nauka, Moscow 1965).

[50] Barut A., Raczka R.: *Theory of Group Representations and Applications.*Polish Scientific Publishers, Warszawa 1977.

[51] Bargmann V.: Ann. Math. **48**, 568 (1947).

[52] Gelfand I.M., Graev M.I., Vilenkin N. Ya.: *Integral Geometry and Related Problems or Representation Theory* .(Fitzmatgiz, Moscow 1962).

[53] James S. Walker. *Fast Fourier Transforms* .II Edition. CRC Press. 1996.

[54] Monforte, J. *The digital reproduction of sound.*Sci. Am., 251(6), 78, 1986.

[55] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.*Princeton University Press, 1996.

[56] K. Seip. *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space.*Bull. Am. Math. Soc. **26** (1992) 322-328.

[57] P.A.M. Dirac. *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation.*Proc. Roy. Soc. (London) A114 (1927) 243-265.

[58] L. Susskind and J. Glogower. Physics **1** (1964) 49.

[59] P. Carruthers and M.M. Nieto. *Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics.*Rev. Mod. Phys. **40** (1968) 411-440.

[60] D.T. Pegg and S.M. Barnett. *Unitary Phase Operator in Quantum Mechanics.*Europhys. Lett. **6** (1988) 483-487.

[61] D.T. Pegg and S.M. Barnett. *Phase Properties of the Quantized Single-mode Electromagnetic Field.*Phys. Rev. **A39** (1989) 1665-1675.

[62] P.L. García de León and J.P. Gazeau. *Coherent state quantization and phase operator.*Physics Letters **A361** (2007) 301-304.

[63] M. Daoud and M. R. Kibler. *Phase operators, temporally stable phase states, mutually unbiased bases and exactly solvable quantum systems.*J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 115303 (18pp).

[64] X.B. Wanga, T. Hiroshima, A. Tomita and M. Hayashi. Physics Reports **448**, 1–111, (2007).

[65] N. Cotfas and J. P. Gazeau. *Finite tight frames and some applications.*J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 193001 (26pp).

[66] B. Sakita. *W_∞ gauge transformations and the electromagnetic interactions of electrons in the lowest Landau level.*Phys. Lett. **B315** (1993) 124-128.

[67] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space.*Wiley-VCH (2001).

[68] A. Ungar. *Generalized hyperbolic functions.*Amer. Math. Monthly **89** (1982), 688-691.

[69] A. Vourdas. J. Phys. A:Math. Gen. **39** (2006) R65-R141.

[70] J. Janszky and An. V. Vinogradov. Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2771-2774.

[71] W. Schleich, M. Pernigo, and F.L. Kien. Phys. Rev. **A44** (1991) 2172-2187.

[72] Jinzuo Sun, Jisuo Wang, and Chuankui Wang. Phys. Rev. **A46** (1992) 1700-1702.

[73] J. Janszky, P. Domokos, and P. Adam. Phys. Rev. **A48** (1993) 2213-2219.

[74] P Domokos, P. Adam, and J. Janszky. Phys. Rev. **A50** (1994) 4293-4297.

[75] S. Szabo, P. Adam, J. Janszky, and P. Domokos. Phys. Rev. **A53** (1996) 2698-2710.

[76] P. Aniello, V.I. Man'ko and G. Marmo. J. Phys. **A41** (2008) 285304.

[77] J.A González and M.A. del Olmo. J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 8841-8857.

[78] B. Yurke and D. Stoler. Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 13-16.

[79] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat, P. Grangier. Nature **312** (2006) 83-86.

[80] M. Kira, S. W. Koch, R. P. Smith, A. E. Hunter and S.T. Cundiff. Nature Physics. (2001) 799-804.

[81] E. Romera, M. Calixto, À. Nagy. Europhys. Lett. **97** (2012), 20011.

[82] M. Calixto and E. Romera. *Schrödinger's catlike-states and entanglement in quantum phase transitions of vibron models.*(2012) sent to publish.